

02,13

Электромагнитные волны с отрицательной групповой скоростью в случайно-неоднородном джозефсоновском переходе

© Ю.И. Маньков

Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН,
Красноярск, Россия
E-mail: mankov@iph.krasn.ru

(Поступила в Редакцию 8 октября 2012 г.)

Методом усредненных функций Грина исследованы электромагнитные волны в случайно-неоднородном джозефсоновском переходе при немонотонном спаде корреляций неоднородностей. Изучены модификация спектра и затухание этих возбуждений, обусловленные пространственными флуктуациями критического тока джозефсоновского перехода. Определены области значений частоты, волнового числа и стохастических параметров среды, при которых волны имеют отрицательную групповую скорость.

1. Введение

В последнее время интенсивно проводятся экспериментальные исследования [1–3] распространения импульсов света с отрицательной групповой скоростью в различных оптических средах. Это явление помимо фундаментального [4–6] может иметь и практическое значение для создания на его основе средств управления сигналом [2]. Достижения в оптике стимулировали поиск материалов, в которых свойственные им возбуждения обладают отрицательной групповой скоростью. Рассматриваются сплошные среды, в которых возможно распространение с отрицательной групповой скоростью акустических [7–9] и спиновых [10,11] волн, а также экситонов и поляритонов [12]. В работе [13] предсказано существование солитонов с отрицательной групповой скоростью в одномерных массивах „малых“ джозефсоновских переходов.

Помимо солитонов в джозефсоновских переходах существуют коллективные электромагнитные плазменно-подобные возбуждения (джозефсоновские плазменные волны), исследованию которых уделяется большое внимание [14]. Частота этих возбуждений в ряде сверхпроводящих материалов и структур составляет от сотен гигагерц до десятка терагерц. Этот важный во многих отношениях диапазон частот электромагнитного излучения, привлекающий внимание специалистов в области физики твердого тела, физики высоких энергий, биологии и медицины, является промежуточным между микроволновой и инфракрасной областями спектра и потому мало доступен для традиционных устройств генерации и приема сигнала, что делает джозефсоновские плазменные волны перспективными для освоения указанного частотного интервала [15]. Толщина джозефсоновских переходов обычно не превышает нескольких нанометров, поэтому на них особенно сильно сказывается влияние различных неоднородностей, которые носят в основном случайный характер. Такие неоднородности могут быть обусловлены, например, пространственным изменением толщины и состава диэлектрического слоя, неоднородностью берегов контакта и т.д. Влияние слу-

чайных неоднородностей на солитоны (флаксоны) в джозефсоновском переходе исследовалось в работе [16], где была предложена модель, согласно которой неоднородности геометрических и физических параметров перехода проявляются в пространственных флуктуациях его критического тока. Эта же модель использовалась в работе [17] для изучения джозефсоновских плазменных волн в переходе с одномерными случайными неоднородностями при экспоненциальном и монотонном спаде их корреляций.

Настоящая работа посвящена исследованию электромагнитных волн в случайно-неоднородном джозефсоновском переходе при немонотонном спаде корреляций неоднородностей. Показано, что такие корреляционные свойства пространственных флуктуаций перехода приводят к минимуму в спектре волн при ненулевом значении волнового числа и возможности распространения возбуждений с отрицательной групповой скоростью.

2. Модель и волновое уравнение

Рассмотрим два одинаковых сверхпроводника, разделенных тонким диэлектрическим слоем толщиной w , который расположен в координатной плоскости $xу$. Начало отсчета вдоль оси z , перпендикулярной плоскости контакта сверхпроводников, выбрано в центре слоя. При длине когерентности сверхпроводника, много большей w , через контакт течет электрический джозефсоновский ток $j_z = j_c \sin \varphi$, где j_c — критический ток джозефсоновского перехода, φ — разность фаз волновых функций сверхпроводящих электронов между берегами перехода. Известно [18,19], что разность фаз в однородном джозефсоновском переходе при отсутствии в нем потерь описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\sin \varphi}{\lambda_J^2}. \quad (1)$$

Здесь t — время, $c_0 = c\sqrt{w/\epsilon d}$ — скорость распространения электромагнитных волн в переходе (скорость

Свихарта), c — скорость света в вакууме, ε — диэлектрическая проницаемость перехода, $d = w + 2\lambda$, где λ — глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник, λ_J — джозефсоновская глубина проникновения. В дальнейшем будем рассматривать „большой“ джозефсоновский переход: $L_x, L_y \gg \lambda_J$, где L_x, L_y, L_z — размеры образца в направлениях соответствующих осей координат; объем образца $V = L_x L_y L_z$.

В случайно-неоднородном джозефсоновском переходе физические величины в уравнении (1) являются случайными функциями координат. Чтобы упростить модель, следуя работе [16], будем предполагать, что скорость c_0 однородна, а флуктуирует джозефсоновская глубина проникновения

$$\lambda_J^{-2}(\mathbf{x}) = \lambda_J^{-2}[1 + \gamma\rho(\mathbf{x})], \quad (2)$$

где $\rho(\mathbf{x})$ — статистически однородная случайная функция, центрированная ($\langle\rho\rangle = 0$) и нормированная ($\langle\rho^2\rangle = 1$). Угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций случайной функции $\rho(\mathbf{x})$; $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$; γ — относительная среднеквадратичная флуктуация критического тока, $0 \leq \gamma < 1$. Используя в уравнении (1) формулу (2), полагая $\varphi \ll 1$ и проводя преобразование Фурье по времени, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi(\omega, \mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(\omega, \mathbf{x})}{\partial y^2} + [v - \eta\rho(\mathbf{x})]\varphi(\omega, \mathbf{x}) = 0, \quad (3)$$

где $v = (\omega^2 - \omega_J^2)/c_0^2$; ω — частота волны, $\omega_J = c_0/\lambda_J$ — джозефсоновская плазменная частота; $\eta = \gamma/\lambda_J^2$; $\varphi \sim \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)]$; $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$. В однородном переходе ($\gamma = 0$) из выражения (3) следует

$$v(k) = k^2, \quad (4)$$

отсюда для спектра волн получаем формулу

$$\omega = \sqrt{\omega_J^2 + c_0^2 k^2}, \quad (5)$$

согласно которой групповая скорость $v_{g0} = d\omega/dk$ имеет вид

$$v_{g0} = \frac{kc_0^2}{\omega}. \quad (6)$$

Чтобы исследовать джозефсоновские плазменные волны в случайно-неоднородном переходе ($\gamma \neq 0$), воспользуемся приближением Крейчнана [20], позволяющим учесть многократное рассеяние волн на неоднородностях, которое известно также как самосогласованное приближение [21]. Простая формулировка этого приближения предложена в [22]. Согласно подходу, изложенному в этих работах, образ Фурье усредненной функции Грина, соответствующей уравнению (3), имеет вид

$$\bar{G}(\mathbf{k}, \nu) = \frac{(2\pi)^{-3}}{\nu - k^2 - \Sigma(\mathbf{k}, \nu)}, \quad (7)$$

где массовый оператор $\Sigma(\mathbf{k}, \nu)$ подчиняется интегральному уравнению

$$\Sigma(\mathbf{k}, \nu) = \eta^2 \int \frac{S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1}{\nu - k_1^2 - \Sigma(\mathbf{k}_1, \nu)}. \quad (8)$$

Здесь $S(\mathbf{k})$ — спектральная плотность, связанная преобразованием Фурье с корреляционной функцией неоднородностей $K_\rho(\mathbf{r}) = \langle\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})\rangle$; $k_1 = |\mathbf{k}_1|$.

Рассмотрим джозефсоновский переход со случайными неоднородностями, обладающими немонотонным спадом корреляций. Для описания таких неоднородностей будем использовать корреляционную функцию и спектральную плотность в виде

$$K_\rho(\mathbf{r}) = \left(1 - \frac{rk_c}{3}\right) e^{-k_c r}, \quad S(\mathbf{k}) = \frac{4k_c^2}{3\pi^2(k_c^2 + k^2)^3}, \quad (9)$$

где k_c — корреляционное волновое число неоднородностей; $r = |\mathbf{r}|$, $k = |\mathbf{k}|$. Функция $\rho(\mathbf{x})$ и спад корреляций предполагаются достаточно плавными (корреляционный радиус $r_c = 1/k_c \gg a_0$, где a_0 — межатомное расстояние). Выражение (9) описывает немонотонный спад корреляций неоднородностей, который предполагает наличие локальных корреляций между положительными и отрицательными флуктуациями [23], приводящих к равенству $\int_{V_0} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$, где V_0 — малый локальный объем.

Из этого условия для корреляционной функции следует $\int_V K(\mathbf{x}) dx = 0$, откуда имеем $S(0) = 0$. Представление о немонотонном спаде корреляций широко используется при исследовании случайно-неоднородных материалов (см., например, [23–28]). В работе [28] во втором порядке теории возмущений показана возможность аномальной дисперсии объемных плазменных волн в проводнике с пространственными флуктуациями решеточного потенциала, корреляционные свойства которых описываются функциями (9). Такими корреляциями обладают неоднородности с выраженным средним размером, пропорциональным r_c (спектральная плотность в (9) имеет максимум при $k = k_s \equiv k_c/\sqrt{2}$). В частности, немонотонный спад корреляций предполагает отсутствие однородных реализаций в ансамбле случайных функций. Известны также временные флуктуации, спектральная плотность которых $S(\omega)$ обращается в нуль не только при $\omega \rightarrow \infty$, но и при $\omega \rightarrow 0$, получившие название „зеленый шум“. Его влияние исследовалось [29], в том числе, на джозефсоновские переходы.

3. Спектр и групповая скорость волн

Используя выражение (9) для спектральной плотности в интегральном уравнении (8) и полагая, что в подынтегральном выражении этого уравнения массовый оператор зависит только от $|\mathbf{k}_1|$, найдем его численное решение, подставляя которое в формулу (7), определим зависимости положения ν_m и ширины $\Delta\nu$ пика функции

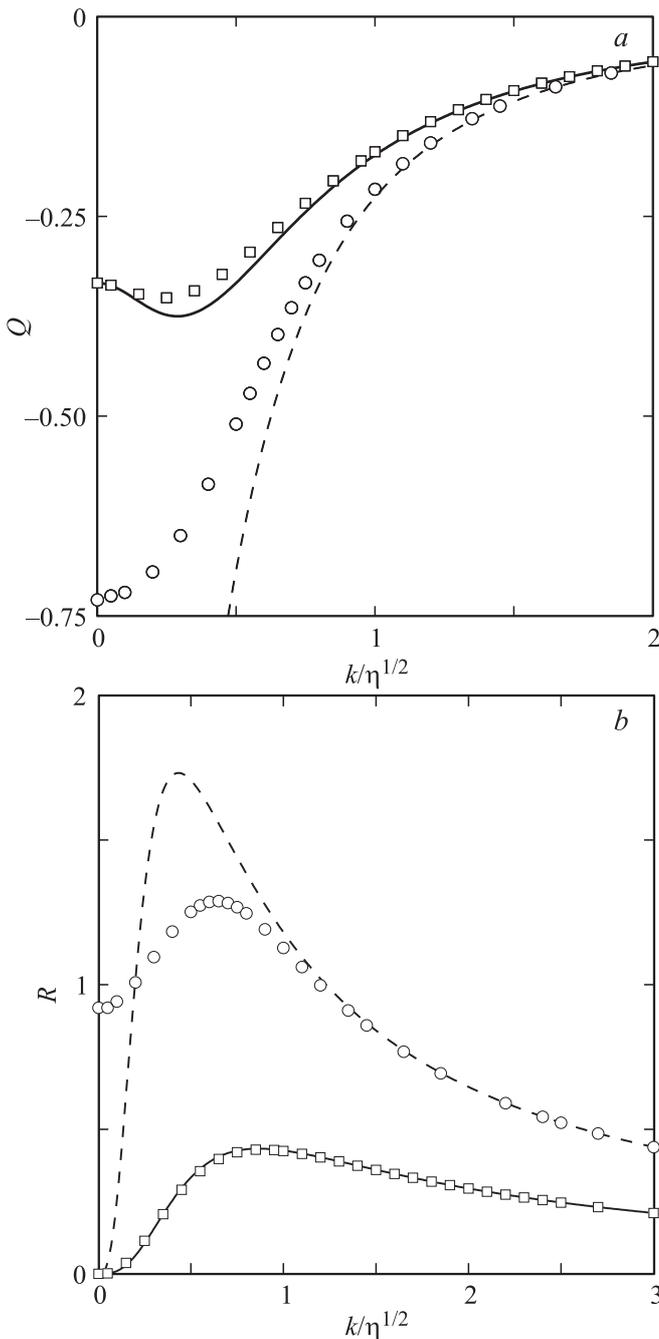


Рис. 1. а) Спектр ν' джозефсоновских плазменных волн и положение ν_m пика функции $\overline{G}''(k, \nu)$: $Q = (\nu_m - k^2)/\eta$ (точки), $Q = (\nu' - k^2)/\eta$ (линии). б) Затухание ν'' волны и ширина $\Delta\nu$ пика функции $\overline{G}''(k, \nu)$: $R = \Delta\nu/\eta$ (точки), $R = 2\nu''/\eta$ (линии). Квадраты и кружки (определяются формулами (7) и (8)), а также сплошные и штриховые кривые (задаются выражением (14)) построены при $k_c/\sqrt{\eta} = 1$ и 0.5 соответственно.

$\overline{G}''(k, \nu) = \text{Im} \overline{G}(k, \nu)$ от k . Функции $\nu_m(k)$ и $\Delta\nu(k)$ показаны на рис. 1, а и б соответственно. В частности, рис. 1, а демонстрирует смещение пика $\overline{G}''(k, \nu)$ в область меньших частот ($\nu_m - k^2 < 0$) по сравнению с его положением в однородной среде, которое отображает-

ся прямой линией $Q = 0$. Значение $|\nu_m - k^2|$ наиболее велико в области $k \leq \sqrt{\eta}$, где получена немонотонная зависимость разности $\nu_m - k^2$ от k (квадраты), характерная для $k_c \gtrsim \sqrt{\eta}$. При $k_c < \sqrt{\eta}$ разность $\nu_m - k^2$ монотонно возрастает с увеличением k (кружки). По-разному в зависимости от k_c ведет себя и ширина $\Delta\nu$ пика $\overline{G}''(k, \nu)$, которая вычислялась на половине его высоты. Это иллюстрируют на рис. 1, б последовательности точек, полученные при разных значениях k_c . Так, для всех $k_c \gtrsim \sqrt{\eta}$ функция $\Delta\nu(k)$ стремится к нулю при $k \rightarrow 0$ (квадраты), в то время как при $k_c < \sqrt{\eta}$ она остается конечной (кружки). Последнее обусловлено тем, что в ширину пика, вычисленную в самосогласованном приближении, вносит вклад неоднородное (флуктуационное) уширение, которое определяется стохастическим разбросом резонансных частот.

Спектр джозефсоновских плазменных волн будем определять в области значений стохастических параметров перехода $k_c \gtrsim \sqrt{\eta}$. При таких k_c и η в знаменателе подынтегрального выражения в правой части уравнения (8) можно использовать приближение $\Sigma(\mathbf{k}_1, \nu) = \Sigma(k, \nu)$, предложенное в работе [22]. Указанная замена допустима [30], если справедливы неравенства

$$\left| \frac{d\Sigma(k, \nu)}{dk} \right| \ll 2k, \quad \left| \frac{d^2\Sigma(k, \nu)}{dk^2} \right| \ll 2. \quad (10)$$

Действительно, из разложения знаменателя подынтегрального выражения уравнения (8) в окрестности точки $k_1 = k$ в степенной ряд

$$\begin{aligned} \nu - k_1^2 - \Sigma(k_1, \nu) &= g - \left[2k + \frac{d\Sigma(k, \nu)}{dk} \right] (k - k_1) \\ &\quad - \left[1 + \frac{1}{2} \frac{d^2\Sigma(k, \nu)}{dk^2} \right] (k - k_1)^2 - \dots \end{aligned} \quad (11)$$

при сохранении в нем первых трех членов и выполнении неравенств (10) следует

$$\nu - k_1^2 - \Sigma(k_1, \nu) \approx \nu - k_1^2 - \Sigma(k, \nu). \quad (12)$$

В выражении (11) $g = \nu - k^2 - \Sigma(k, \nu)$ — знаменатель функции Грина (7). Для джозефсоновских плазменных волн неравенства (10) выполняются при $k_c > k_{c1} \approx 0.7\sqrt{\eta}$ и $k < k_c/2$, а также при $k \gg \sqrt{\eta}$ независимо от величины k_c . Итак, проводя интегрирование в правой части уравнения (8), получаем

$$\Sigma(k, \nu) = -\eta^2 \frac{F_1 + iF_2}{3[(g + k_c^2)^2 + 4k^2k_c^2]^2}, \quad (13)$$

где $F_1 = k_c^6 + k_c^4(7g + 12k^2) + gk_c^2(3g - 4k^2) - 3g^3$, $F_2 = 8k_c\sqrt{g + k^2}(g^2 + gk_c^2 + 2k^2k_c^2)$. Выражение (13) приводится к алгебраическому уравнению шестой степени относительно $\sqrt{g + k^2}$. Его численное решение дает возможность найти величину $\Sigma(k, \nu)$, которая при $k_c \geq k_{c1}$ совпадает с решением исходного интегрального уравнения (8). Такое соответствие позволяет применить

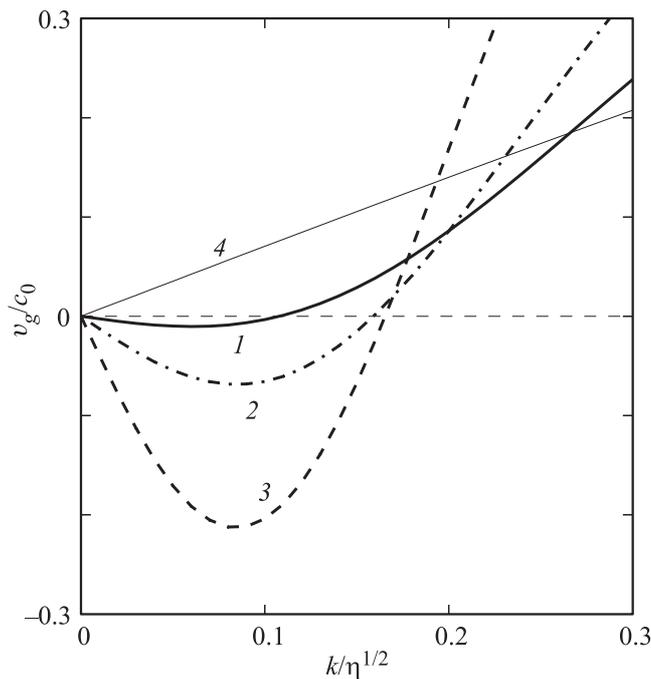


Рис. 2. Зависимость групповой скорости от волнового числа. Кривые построены по формуле (16) при $k_c/\sqrt{\eta} = 1$ (1), 0.85 (2) и 0.7 (3). Линия 4 отвечает выражению (6).

формулу (13) для определения закона дисперсии усредненных волн. Используя в выражении (13) равенство $g = 0$, получаем

$$v(k) - k^2 = -\eta^2 \frac{k_c^2 + 12k^2}{3(k_c^2 + 4k^2)^2} - \eta^2 \frac{16ik^3}{3k_c(k_c^2 + 4k^2)^2}. \quad (14)$$

Действительная часть функции $v(k)$ и удвоенное значение ее мнимой части показаны на рис. 1, *a* и *b* соответственно: $v' = \text{Re } v(k)$, $v'' = -\text{Im } v(k)$. Видно хорошее совмещение сплошных линий и последовательностей точек, отмеченных квадратами. Такое поведение характерно для спектра и затухания волн при $k_c \gtrsim \sqrt{\eta}$. Первое слагаемое в правой части выражения (14) имеет минимум при $k = k_v \equiv k_c/2\sqrt{3}$, что по порядку величины совпадает с положением максимума k_s спектральной плотности и указывает на причину немонотонности дисперсионной кривой: модификация спектра волн наиболее велика при тех k , которым отвечает окрестность максимального значения спектральной плотности. В частности, при монотонном спаде корреляций неоднородностей, когда функция $S(k)$ максимальна при $k = 0$, наибольшей модификации подвергается частота однородных возбуждений.

Из формулы (14) и определения v при $k_c > k_{c1}$ следует неравенство $\text{Im } \omega^2 \ll \text{Re } \omega^2$, которое позволяет упростить выражения для спектра $\omega' = \text{Re } \omega(k)$ и затухания $\omega'' = -\text{Im } \omega(k)$ волн. В таком приближении имеем

$$\omega' = \left[\omega_J^2 + c_0^2 k^2 - \eta^2 c_0^2 \frac{k_c^2 + 12k^2}{3(k_c^2 + 4k^2)^2} \right]^{1/2}, \quad (15)$$

отсюда для групповой скорости $v_g = d\omega'/dk$ получаем

$$v_g = \frac{c_0^2 k}{\omega'} \left[1 - \eta^2 \frac{4(k_c^2 - 12k^2)}{3(k_c^2 + 4k^2)^3} \right]. \quad (16)$$

На рис. 2 приведены зависимости $v_g(k)$ при нескольких значениях k_c . Видно, что $v_g < 0$ при $k < k_g$, где k_g находим из условия равенства нулю выражения в квадратных скобках в (16)

$$k_g = \sqrt{\eta \frac{2A^2 - 3AK_c^2 - 6}{12A}}. \quad (17)$$

Здесь $A = (9K_c^2 + 3\sqrt{3 + 9K_c^4})^{1/3}$, $K_c = k_c/\sqrt{\eta}$. Из требования положительности подкоренного выражения в формуле (17) следует неравенство $k_c < k_{c2} \equiv (4/3)^{1/4} \sqrt{\eta}$. Функция $k_g(k_c)$, показанная на рис. 3, в интервале $k_{c1} < k_c < k_{c2}$ достигает максимального значения $k_g = \sqrt{\eta}/6$ в точке $k_c = \sqrt{5\eta}/3$ и стремится к нулю при $k_c \rightarrow k_{c2}$, оставаясь конечной при $k_c = k_{c1}$. Таким образом, неравенство $v_g < 0$ выполняется внутри области, очерченной на рис. 3 кривой $k_g(k_c)$ и прямой линией $k_c = k_{c1}$. В пределах этой области справедливо неравенство $k \ll k_c$, что позволяет воспользоваться в выражении (14) разложением в степенной ряд по k и получить

$$\omega \approx \omega_0 + \frac{k^2 c_0^2}{2\omega_0} \left(1 - \frac{4\eta^2}{3k^4} \right) - i \frac{8\eta^2 c_0^2 k^3}{3\omega_0 k_c^5}, \quad (18)$$

где $\omega_0 = \omega_J(1 - \gamma\eta/3k_c^2)^{1/2}$. Отсюда следует, что при $\gamma = 0.5$ и $k_{c1} < k_c < k_{c2}$ интервал изменения ω' определяется неравенствами $-0.25 < (\omega' - \omega_J)/\omega_J < -0.08$. Кроме того, из формулы (18) для затухания волны

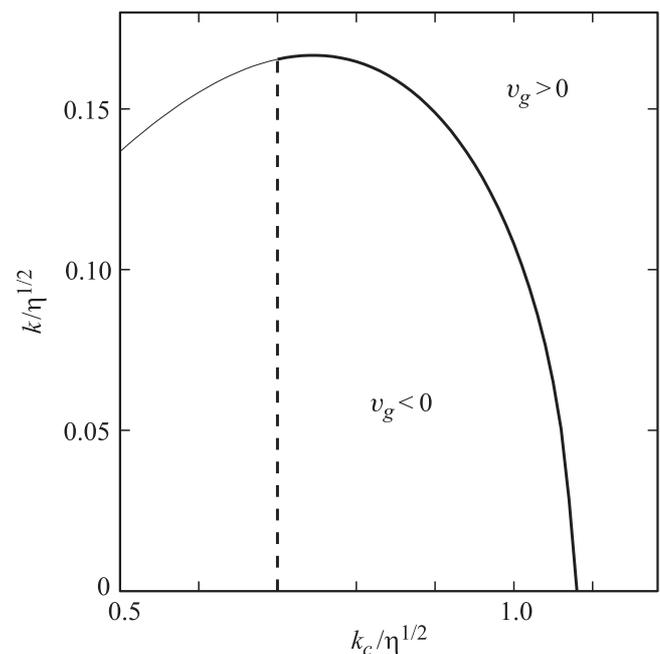


Рис. 3. Области значений групповой скорости разного знака. Сплошная линия определяется выражением (17), штриховая задана равенством $k_c = k_{c1}$.

следует $\omega'' \ll |\omega' - \omega_J|$ и $\omega'' \propto k^3$. Аналогичная зависимость затухания от волнового вектора была получена в работе [27] для спиновых волн в ферромагнетике с флуктуирующей магнитной анизотропией при немономонном гауссовском спаде корреляций неоднородностей.

4. Заключение

С помощью метода усредненных функций Грина исследованы модификация спектра и затухание электромагнитных волн в случайно-неоднородном джозефсоновском переходе при немономонном спаде корреляций неоднородностей. На основе самосогласованного приближения, позволяющего учесть многократное рассеяние волн на неоднородностях, определены зависимости от волнового числа k частоты и затухания усредненных волн, а также положения ν_m и ширины $\Delta\nu$ пика мнимой части образа Фурье усредненной функции Грина. Изучена эволюция таких зависимостей при изменении корреляционного радиуса и относительных среднеквадратичных флуктуаций неоднородностей. Определена область существования отрицательной групповой скорости джозефсоновских плазменных волн, обусловленной случайными неоднородностями перехода. Этот эффект наиболее выражен при $k_c \sim \sqrt{\eta}$ ($k_{c1} < k_c < k_{c2}$), откуда следует $v_g \sim -kc_0^2/3\omega'$, т.е. $|v_g| \sim v_{g0}/3$. Если $k_c \sim \sqrt{\eta}$, то корреляционный радиус $r_c \sim \lambda_J/\sqrt{\gamma}$. При $\lambda_J = 10^{-4}$ см и $\gamma \sim 0.5$ эффективными оказываются неоднородности с $r_c \sim 1.4 \cdot 10^{-4}$ см. Стохастические параметры перехода r_c и γ формируются при его изготовлении, в процессе которого возможно, в том числе, и целенаправленное создание случайных неоднородностей с нужными свойствами. Как правило, требуется сильное воздействие на образец для изменения значений r_c и γ , поэтому „настроиться“ на эффект отрицательной групповой скорости вероятно удалось бы, варьируя λ_J , например меняя температуру перехода. Подходящим объектом для экспериментальных исследований рассмотренных в работе явлений, возможно, могли бы стать джозефсоновские переходы из высокотемпературного сверхпроводника $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, в котором отмечалось неоднородное распределение тока [15].

Отметим, что формула (14), определяющая спектр и затухание волн, может быть получена во втором порядке теории возмущений [31], если $\gamma \ll 1$ и $k_c \gg \sqrt{\gamma\eta/3}$. Использованное нами самосогласованное приближение существенно расширяет область применимости выражения (14) и полученных на его основе формул (15) и (16) для спектра волн и их групповой скорости.

Автор признателен В.А. Игнатченко за обсуждение результатов работы и ценные критические замечания.

Список литературы

- [1] L. Zhang, L. Zhan, K. Qian, J. Liu, Q. Shen, X. Hu, S. Luo. Phys. Rev. Lett. **107**, 093 903 (2011).
- [2] K. Qian, L. Zhan, L. Zhang, Z.Q. Zhu, J.S. Peng, Z.C. Gu, X. Hu, S.Y. Luo, Y.X. Xia. Opt. Lett. **36**, 2185 (2011).
- [3] R.T. Glasser, U. Vogl, P.D. Lett. Opt. Express **20**, 13 702 (2012); Phys. Rev. Lett. **108**, 173 902 (2012).
- [4] В.Г. Веселаго. УФН **92**, 517 (1967); УФН **181**, 1201 (2011).
- [5] Р.А. Силин. УФН **176**, 562 (2006).
- [6] В.П. Макаров, А.А. Рухадзе. УФН **181**, 1357 (2011).
- [7] А.А. Maznev, A.G. Every. Appl. Phys. Lett. **95**, 011 903 (2009).
- [8] В.А. Буров, В.Б. Волошинов, К.В. Дмитриев, Н.В. Поликарпова. УФН **181**, 1205 (2011).
- [9] M.I. Shalaev, S.A. Myslivets, V.V. Slabko, A.K. Popov. Opt. Lett. **36**, 3861 (2011).
- [10] А.В. Васьковский, Э.Г. Локк. УФН **176**, 403 (2006).
- [11] A.V. Chumak, P. Dhagat, A. Jander, A.A. Serga, B. Hillebrands. Phys. Rev. B **81**, 140 404R (2010).
- [12] В.М. Агранович, Ю.Н. Гаргштгейн. УФН **176**, 1051 (2006).
- [13] E. Arévalo. Eur. Phys. Lett. **83**, 10 004 (2008).
- [14] S. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, F. Nori. Rep. Prog. Phys. **73**, 026 501 (2010).
- [15] Ю.Я. Дивин, У. Поппе, И.М. Котелянский, В.Н. Губанков, К. Урбан. РЭ **53**, 1205 (2008).
- [16] М.Б. Минеев, М.Ф. Фейгельман, В.В. Шмидт. ЖЭТФ **81**, 290 (1981).
- [17] Ю.И. Маньков. ЖТФ, **81**, 8, 88 (2011).
- [18] А. Бароне, Дж. Патерно. Эффект Джозефсона. Мир, М. (1984). 639 с.
- [19] К.К. Лихарев. Введение в динамику джозефсоновских переходов. Наука, М. (1985). 319 с.
- [20] R.H. Kraichnan. J. Math. Phys. **2**, 124 (1961).
- [21] G. Brown, V. Celli, M. Haller, A.A. Maradudin, A. Marvin. Phys. Rev. B **31**, 4993 (1985).
- [22] V.A. Ignatchenko, V.A. Felk. Phys. Rev. B **71**, 094 417 (2005).
- [23] М.А. Кривоглаз. В кн.: Вопросы физики металлов и металловедения. Киев (1961). В. 13. С. 17.
- [24] E. Schlömann. Phys. Rev. **135**, A413 (1964).
- [25] М.В. Медведев. ФММ **55**, 629 (1983).
- [26] В.А. Игнатченко, Р.С. Исаков. ФММ **65**, 679 (1988); ФММ **9**, 5 (1990).
- [27] В.А. Игнатченко, И.В. Богомаз. ФММ **67**, 866 (1989).
- [28] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov. J. Phys.: Cond. Matter **3**, 5837 (1991).
- [29] С.А. Гуз, Ю.Г. Красников, М.В. Свиридов. ДАН **365**, 34 (1999).
- [30] Ю.И. Маньков. ФТТ **54**, 1249 (2012).
- [31] В.А. Игнатченко, Р.С. Исаков. ЖЭТФ **72**, 1005 (1977).