10

Получение постоянных электрических полей заданной формы в неявноэлектродной системе

© Г.В. Бадалян

Ереванский физический институт им. А.И. Алиханяна
0036 Ереван, Армения
e-mail: Badalian@mail.Yerphi.am

(Поступило в Редакцию 12 января 2010 г. В окончательной редакции 27 мая 2010 г.)

Рассмотрен метод получения электростатических полей заданной формы в неявноэлектродной цилиндрической системе. „Распределенность" электродов (нитевидные проводники) дает возможность решить обратную граничную задачу — задавать такое азимутальное распределение электрического потенциала по периметру цилиндра, чтобы получить нужное поле внутри, обеспечив при этом большую рабочую область по сравнению с явноэлектродной системой.

Введение

В современной науке и технике, в частности в электронной оптике, широко применяются электрические и магнитные поля самой различной формы для формирования пучков заряженных частиц, конструирования разнообразной электронно-лучевой аппаратуры (см. [1–4] и приведенную библиографию). Характерной особенностью существующих систем, создающих поперечные поля, является наличие электродов (полюсных наконечников), обеспечивающих поля с нужными характеристиками в узкой параксиальной области. А для получения полей заданной формы с большой светосилой, электродам (полюсным наконечникам) необходимо придать определенную геометрическую форму (например, гиперболическую), что порой осложняет реализацию таких отклоняющих и концентрирующих систем. Существуют различные приближенные методы расчета этих полей в зависимости от геометрии [1–5].

В начале 1960 х гг. автором с использованием аппарата скалярного магнитного потенциала был предложен и реализован метод получения постоянных магнитных полей заданной формы в неявнополюсной магнитной системе, задавая определенным законом распределения ампер-витков на внутренней поверхности цилиндрического полого ферромагнетика, т. е. решена обратная граничная задача (см. [6–8], а также монографию [2] стр. 28–29). Аналогичная задача была решена для получения продольных магнитных полей [9]. В настоящее время имеется определенное развитие неявнополюсных магнитов, в частности, на основе закона Био–Савара, имеются практические реализации в сверхпроводящих системах (см., например, [10–12]). Обращаясь к электростатическим системам, отметим, что в монографическом обзоре [3] подробно проанализированы существующие разнообразные электронные линзы и обосновывается необходимость новых конструктивных решений.

Постановка задачи и решение

В настоящей работе рассмотрена задача получения электростатических полей заданной формы в неявноэлектродной цилиндрической системе, при этом решена обратная граничная задача.

Такой метод получения полей обеспечивал бы большую рабочую апертуру (светосилу) по сравнению с традиционной явноэлектродной системой.

Пусть имеется некая длинная цилиндрическая полость длиной L и радиусом R (рис. 1), на внутренней поверхности которой вдоль образующих равномерно распределены изолированные нитевидных проводники, на которые подается потенциал. Толщина и шаг проводников много меньше R. Если внутри полости нет свободных зарядов, то распределение электрического скалярного потенциала внутри полости определяется уравнением Лапласа $\Delta U = 0$. При $L \gg 2R$ рассмотрение задачи переводится на плоскость в рамках круга радиуса R. Тогда в полярной системе координат (r, θ) уравнение Лапласа запишется как [5,13]:

$$r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0. \qquad (1)$$

Общее решение этого уравнения внутри круга $0 \le r \le R$ представляется в виде ряда Фурье [5,13]:

$$U(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} r^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) + U_0. \qquad (2)$$

Если на границе круга $(r = R)$ задано граничное условие — распределение потенциала $f(\theta')$, то потенциал и поле внутри круга полностью будут определяться этим распределением, а постоянные разложения a_m, b_m и U_0 будут интегралами Фурье [5,13]:

$$a_m = \frac{1}{\pi R^m} \int_0^{2\pi} f(\theta') \cos m\theta' d\theta'; \; b_m = \frac{1}{\pi R^m} \int_0^{2\pi} f(\theta') \sin m\theta' d\theta';$$

$$U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta') d\theta'. \qquad (3)$$

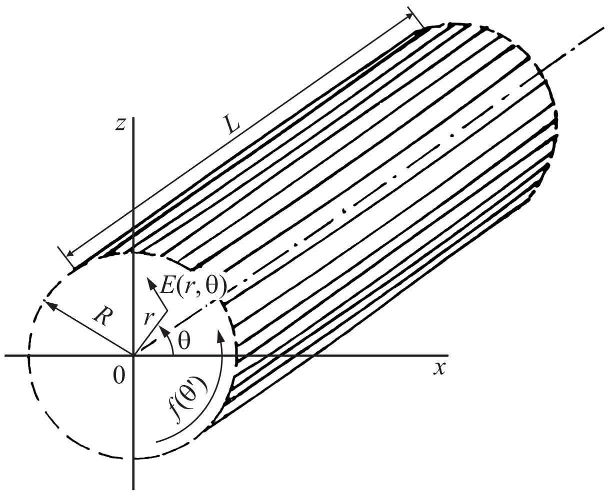

Рис. 1. Принципиальная схема задач.

При таком определении постоянных на границе $(r = R)$ тождественно будет иметь

$$f(\theta') = \sum_{m=1}^{\infty} R^m (a_m \cos m\theta' + b_m \sin m\theta') + U_0. \quad (4)$$

Обычно $f(\theta')$ — периодическая функция и поэтому $U_0 \equiv 0$. Очевидно, что искомое решение для потенциала (и поля) внутри круга $(r < R)$ целиком зависит от граничного условия $f(\theta')$.

Попытаемся поставить обратную задачу — какое должно быть граничное условие, чтобы получить внутри поле заданной формы. В соответствии с работой [14] постоянные Фурье a_m и b_m можно представить через соответстующие значения производных в нуле $(r = 0)$ составляющих напряженности E электрического поля вдоль осей x и z:

$$a_m = \frac{1}{m!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0}, \quad b_m = \frac{1}{m!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_z}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0}. \quad (5)$$

Тогда уравнение (4) запишется в форме

$$f(\theta') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^m}{m!}\left[\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0} \cos m\theta' + \left(\frac{\partial^{m-1}E_z}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0} \sin m\theta'\right]. \quad (6)$$

Из полученного выражения видно, что если задаваться распределением потенциала на границе $f(\theta')$ пропорционально $\cos m\theta'$, то из всей суммы в (6) в силу тождества останется только выбранный гармонический член m-го порядка, остальные члены обратятся в нули (см. также выражение (3)). Тогда, очевидно,

$$f(\theta') = \frac{R^m}{m!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0} \cos m\theta' \equiv V_m \cos m\theta', \quad (7)$$

где V_m — амплитуда распределения граничного потенциала.

Соответственно при таком выборе распределения потенциала на границе в выражении потенциала $U(r,\theta)$ (выражение (2)) останется только член с коэффициентом $(\partial^{m-1}E_x/\partial x^{m-1})_{r=0}$, и поле в любой точке внутри круга будет определяться этим коэффициентом, т.е. описываться законом поперечного распределения соответственно данному порядку производной поля в нуле.

Действительно, скалярный потенциал для выбранного случая будет иметь следующий вид:

$$U_m(r,\theta) = \frac{r^m}{m!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0} \cos m\theta. \quad (8)$$

Радиальная и азимутальная составляющие напряженности поля будут соответственно

$$E_r = -\frac{\partial U_m(r,\theta)}{\partial r} = -\frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0} \cos m\theta,$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U_m(r,\theta)}{\partial \theta} = \frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0} \sin m\theta. \quad (9)$$

Полная напряженность в данной точке поля, очевидно, равна

$$E(r,\theta) = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0} \quad (10)$$

и не зависит от угла.

Определим E_z и E_x через составляющие поля E_r и E_θ. Известно, что всегда:

$$E_z = E_r \sin\theta + E_\theta \cos\theta,$$

$$E_x = E_r \cos\theta - E_\theta \sin\theta. \quad (11)$$

Используя выражения (9) и (11), получим:

$$E_z = \frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0} \sin(m-1)\theta,$$

$$E_x = -\frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0} \cos(m-1)\theta. \quad (12)$$

Легко видеть, что на оси x: $\theta = 0$, $r = x$, следовательно,

$$E_z = 0,$$

$$E_x = -\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0}. \quad (13)$$

Из выражений (9)–(13) видно, что, задаваясь значением $m = 1, 2, 3, \ldots$, т.е. распределением граничного условия $f(\theta')$ по законам $\cos\theta', \cos 2\theta', \cos 3\theta', \ldots$, получим поля: — однородное E_{x_0}, линейно меняющееся по радиусу с градиентом $(\partial E_x/\partial x)_{r=0}$; — нелинейное поле с квадратичной нелинейностью $(\partial^2 E_x/\partial x^2)_{r=0}$ и т.д.

Иными словами, можно изготовить указанным способом электрический диполь с однородным полем, электрическую квадрупольную линзу, электрическую шестипольную линзу и т.д.

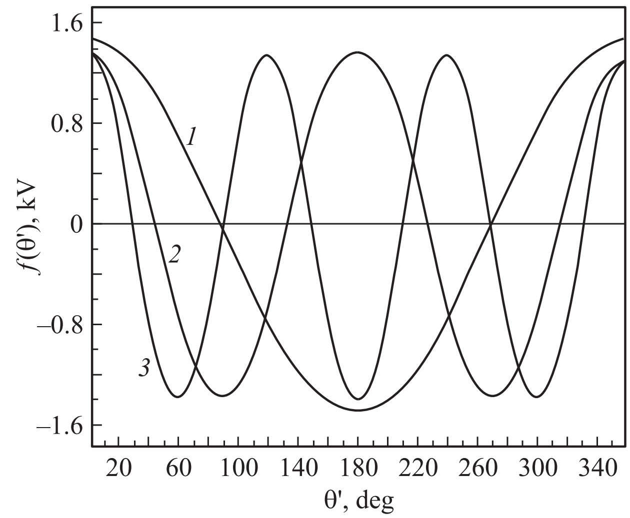

Рис. 2. Распределение граничного потенциала $f(\theta')$ при бесконечном числе проводников для рассмотренных в примере гармоник поля: *1* — $V_1\cos\theta'$; *2* — $V_2\cos 2\theta'$; *3* — $V_3\cos 3\theta'$. При конечном числе проводников ($n = 36$) вместо сплошных кривых будут дискретные последовательности точек через каждый шаг (10°) изменения азимута.

В качестве примера: в соответствии с формулой (7) необходимые амплитуды распределения граничного потенциала

$$V_m = \frac{R^m}{m!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0}$$

для вышерассмотренных типов полей ($m = 1, 2, 3$) будут соответственно

$$V_1 = RE_{x_0}, \qquad V_2 = \frac{R^2}{2!}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{r=0},$$

$$V_3 = \frac{R^3}{3!}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}\right)_{r=0},$$

и если при апертуре $2R = 12$ cm задать $E_{x_0} = 250$ V/cm, $(\partial E_x/\partial x)_{r=0} = 80$ V/cm^2, $(\partial^2 E_x/\partial x^2)_{r=0} = 40$ V/cm^3, то эти амплитуды составят 1.4–1.5 kV (рис. 2).

Предложенный метод можно применить не только для получения чистых гармоничных составляющих поля, но и для получения электрических полей более сложной конфигурации, представляющих суперпозицию нескольких, в основном первых, гармонических составляющих (включая в общем случае и постоянный член).

Пусть в разложении требуемого сложного поля должны присутствовать производные $(\partial^{m-1}E_x/\partial x^{m-1})_{r=0}$ первых m порядков. Тогда, согласно вышесказанному, распределение потенциала на границе должно иметь вид (см. выражение (7)):

$$f(\theta') = \sum_1^m \frac{R^m}{m!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0}\cos m\theta'. \qquad (14)$$

Выражения для скалярного потенциала и составлящих электрического поля запишутся известным образом, см. выражения (8), (9) и (12):

$$U_s(r,\theta) = \sum_1^m \frac{r^m}{m!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0}\cos m\theta, \qquad (15)$$

$$E_r = -\sum_1^m \frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0}\cos m\theta, \qquad (16)$$

$$E_\theta = \sum_1^m \frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0}\sin m\theta, \qquad (17)$$

$$E_z = \sum_1^m \frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0}\sin(m-1)\theta, \qquad (18)$$

$$E_x = -\sum_1^m \frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}E_x}{\partial x^{m-1}}\right)_{r=0}\cos(m-1)\theta, \qquad (19)$$

Раскроем ряд z-составляющей поля:

$$E_z = r\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{r=0}\sin\theta + \frac{r^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}\right)_{r=0}\sin 2\theta$$
$$+ \frac{r^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 E_x}{\partial x^3}\right)_{r=0}\sin 3\theta + \ldots \qquad (20)$$

Учитывая очевидные соотношения

$$r\sin\theta = z, \quad r\cos\theta = x, \quad r^2\sin 2\theta = 2xz,$$
$$r^3\sin 3\theta = 3x^2z - z^3,$$

получим

$$E_z = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{r=0} z + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}\right)_{r=0} 2xz$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 E_x}{\partial x^3}\right)_{r=0}(3x^2z - z^3) + \ldots \qquad (21)$$

Аналогичным образом для E_x получим

$$E_x = -\Bigg[E_{x_0}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{r=0} x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}\right)_{r=0}(x^2 - z^2)$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 E_x}{\partial x^3}\right)_{r=0}(x^3 - 3xz^2) + \ldots\Bigg]. \qquad (22)$$

В интересном случае $z = 0$ имеем

$$E_z = 0, \qquad (23)$$

$$E_x = -\Bigg[E_{x_0} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{r=0} x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}\right)_{r=0} x^2$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 E_x}{\partial x^3}\right)_{r=0} x^3 + \ldots\Bigg].$$

Ограничиваясь, например, в выражении (15) первыми тремя членами, можно получить суммарное электрическое поле с заданными параметрами, которое послужит как для отклонения и концентрации, так и для устранения сферической абберации траектории частиц.

Укажем еще одну возможность в формуле (6), заключающуюся в том, что можно использовать также первый синусный член в квадратной скобке. Действительно, выбрав, например, выражение распределения потенциала на границе в виде суммы $A\cos\theta' + B\sin\theta'$, можно получить поле, имеющее две взаимно-перпендикулярные однородные составляющие, причем величину каждой из них можно менять независимо, что удобно для корректировки траектории пучков частиц.

Заключение

В работе рассмотрено создание поперечных электростатических полей заданной формы с помощью неявноэлектродной цилиндрической системы. „Распределенность" электродов (нитевидные проводники) дает возможность решить обратную граничную задачу — задавать такое граничное распределение электрического потенциала, чтобы получить нужное поле в полости. По сравнению с явноэлектродной данная система будет обладать большей рабочей апертурой (светосилой). Дополнительными аргументами, по-видимому, могут быть избежание необходимости изготовления сложных явных электродов (типа гиперболических), практическое отсутствие металлических частей и малый вес.

Такие системы могут быть применены для формирования пучков заряженных частиц низких энергий.

Безусловно, будут определенные трудности в изготовлении такой неявноэлектродной системы и соответствующего питающего устройства. В настоящее время в Ереванском физическом институте начато конструирование макетного образца, и мы надеемся по ходу работы получить ответы на многие вопросы создания и испытания такой системы.

Автор благодарит Э.Г. Газазяна за полезное обсуждение.

Список литературы

[1] *Кельман В.М., Явор С.Я.* Электронная оптика. СПб: Наука, 1968. 487 с.

[2] *Явор С.Я.* Фокусировка заряженных частиц квадрупольными линзами. М.: Атомиздат, 1968. 263 с.

[3] *Баранова Л.А., Явор С.Я.* Электростатические электронные линзы. М.: Наука, 1986. 192 с.

[4] *Жигарев А.А.* Электронная оптика и электронно-лучевые приборы. М.: Высш. шк., 1972. 539 с.

[5] *Бинс К., Лауренсон П.* Анализ и расчет электрических и магнитных полей. М.: Энергия, 1970. С. 94–95.

[6] *Бадалян Г.В.* // ЖТФ. 1963 с. Т. 33. Вып. 3. С. 345–349.

[7] *Азатян А.А., Бадалян Г.В., Ерицян Г.Н.* // ПТЭ. 1963. № 3. С. 142–145.

[8] *Азатян А.А., Бадалян Г.В., Ерицян Г.Н.* // Тр. IV Межвуз. конф. по электронным ускорителям. М.: Высш. шк., 1964. С. 347–358.

[9] *Бадалян Г.В.* // Известия АН Арм.ССР Сер. физ. мат. наук. 1964. Т. 17. № 5. С. 121–126. № 6. С. 141–148.

[10] *Скачков В.С.* Препринт ИТЭФ-178. 1984.

[11] *Акишин П.Г., Бутенко А.В., Коваленко А.Д.* и др. Препринт ОИЯИ Р9-2005-221.

[12] *Акишин П.Г., Бутенко А.В., Коваленко А.Д.* и др. // Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3. № 2(131). С. 105–110.

[13] *Смирнов В.И.* Курс Высшей математики. Т. II. М.: Наука, 1974. С. 603–606.

[14] *Греков Н.И., Рябов А.П., Гольдин Л.Л* // ПТЭ. 1956. № 2. С. 29.