01;10

Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии

© Ю.К. Голиков, Н.К. Краснова

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: n.k.krasnova@mail.ru

(Поступило в Редакцию 20 апреля 2010 г. В окончательной редакции 30 июня 2010 г.)

Развивается новый подход к определению оптимальных электронно-оптических сред, в которых можно эффективно реализовать идею электронного (ионного) спектрографа. За основу взяты электростатические поля с лапласовым потенциалом, подчиняющимся условию однородности Эйлера. Принцип действия спектрографов с такими полями связан со специальным свойством подобия изоэнергетических семейств траекторий с разными энергиями в условиях однородности. Для построения искомых полей предлагается новый способ аналитического представления, в котором базовым является аппарат комплексного представления Донкина для конусовидных полей. Разработанные алгоритмы позволяют строить в элементарной форме однородные потенциалы в широком классе, в котором классические шаровые и сферические функции являются только частными случаями. На этой базе ставится и решается в общем виде в замкнутой аналитической форме задача Коши для однородных потенциалов с плоскостью симметрии. Приводится ряд конкретных структур этого ряда.

Введение

В основе всех методов электронной спектроскопии лежит точное измерение энергетических спектров электронных пучков, испускаемых возбужденным образцом (мишенью). До недавнего времени для этой цели применялись электростатические энергоанализаторы разнообразных конструкций, работающие в режиме спектрометров. Особенность этих устройств состоит в том, что электроны исследуемого потока последовательными группами, каждая со своей энергией, прогоняются по неподвижной системе траекторий, сфокусированной на узкую выходную щель, за которой стоит приемник, например, цилиндр Фарадея или электронный умножитель [1]. Развертка спектра осуществляется за счет изменения потенциала одного из электродов прибора. Эти инструменты доведены до высокой степени совершенства, и борьба идет за выполнение светосилы при высоком энергетическом разрешении [2]. Поскольку такой последовательный энергоанализ занимает достаточно много времени и требует избыточного количества электронов от источника, то он явно не годится для исследования быстропротекающих процессов на поверхности образца.

Принципиально иной режим измерения спектров осуществляется в электронно-оптической схеме спектрографа. Здесь также работает электрическое поле, но при постоянном потенциале на электродах. Все электроны исследуемого потока пространственно разделяются полем на струи в соответствии с энергией, и каждая из них попадает на свой локальный приемник — обычно это малый фрагмент позиционно-чувствительного детектора (ПЧД) — микроканального умножителя в виде пластины или линейки. Данный способ фиксации энергии более информативен, чем в случае спектрометра, и особенно хорош для быстропротекающих процессов.

В электронно-оптическом смысле между спектрометрами и спектрографами существует глубокое различие. Для построения более или менее удачного спектрометра годится электрическое поле практически любой геометрии, поскольку всегда удается найти режим фокусировки одной электронной струи с фиксированным параметром $W = E_0/|q\Phi_0|$, где E_0 — энергия электронов; q — абсолютное значение заряда электрона; Φ_0 — потенциал развертки. Качество фокусировки может оказаться не слишком хорошим, а величина дисперсии умеренной, однако, в целом, вопрос о работоспособности спектрометра можно считать в принципе решенным. В спектрографе поле решает более сложную комбинированную задачу. Оно должно обеспечить одновременную фокусировку совокупности пространственно разделенных струй из некоторого диапазона энергий E_0 при неизменном потенциале Φ_0. Кроме того, желательно, чтобы фокусы всех этих струй лежали в плоскости, с которой можно совместить сигнальную пластину (ПЧД). Очевидно, удовлетворить всем этим требованиям одновременно могут только какие-то избранные специфические полевые структуры. Здесь, конечно, следует отметить уникальное по своей простоте и эффективности поле плоского конденсатора, которое в равной мере воплощает обе идеи спектрографа и спектрометра для ленточных и конических пучков в режиме фокусировки II порядка на границе поля при угле входа центральной траектории пучка $\theta = 45^\circ$. Однако оно имеет ограничение по светосиле и конструктивным особенностям, которые стараются преодолеть с помощью более сложных электродных конфигураций.

Интерес к спектрографам ярко обозначился сравнительно недавно в связи с появлением ПЧД, и пока не находятся в литературе сколь-нибудь общие подходы к синтезу этих приборов. Отдельные частные результаты подаются авторами как чисто компьютерный продукт без обсуждения побудительных электронно-оптических идей, что, конечно, не способствует развитию теории спектрографов [3,4]. Существуют попытки построения спектрографов на базе привычных спектрометров, например, цилиндрического зеркала [5], усеченного цилиндра [6]. Действительно, вблизи основного фокуса спектрометра при фиксированном значении W_0 наблюдается криволинейный фрагмент фокусировок худшего качества. Если W варьируется вблизи W_0, то можно уловить соответствующие электронные струи с помощью плоского ПЧД, совмещенного с поверхностью точек фокусировки, хотя бы приближенно. Эту схему, безусловно, можно оптимизировать в каждом конкретном случае, но данный путь кажется нам недостаточно продуктивным. Нужны другие, более радикальные идеи, способные в принципиальном ключе решить проблему спектрографа. Далее будем строить свою идеологию синтеза спектрографов.

Спектрография и принцип подобия

Начнем со следующего очевидного наблюдения: электронные струи в плоском конденсаторе с линейным по координатам потенциалом при разных энергиях E_0 имеют одинаковую форму и различаются только масштабом. Здесь налицо проявление специального принципа подобия, свойственного полям с потенциалом, однородным по Эйлеру, в данном случае кратности $n = 1$. Логично предположить, что „спектрографическая ситуация“ присуща всем однородным полям с кратностями однородности $n \neq 0$. Докажем этот факт строгими математическими рассуждениями. Условие однородности функции $\varphi(x, y, z)$ по Эйлеру дается уравнением [7]

$$x\varphi_x + y\varphi_y + z\varphi_z = n\varphi. \tag{1}$$

Все решения (1) удовлетворяют тождеству Эйлера

$$\varphi(cx, cy, cz) = c^n\varphi(x, y, z), \quad c = \text{const}. \tag{2}$$

Это более конструктивный признак однородности, с помощью которого легко получить представление о структуре данного класса функций. Полагая

$$c = \frac{1}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{3}$$

получим выражение

$$\varphi_{x,y} = \rho^n g\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right), \tag{4}$$

где g — произвольная функция двух переменных. С помощью (4) построим физический потенциал

$$\Phi = \Phi_0 \rho^n g\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right), \tag{5}$$

где Φ_0 — характерный потенциал, выраженный в вольтах. Реальные декартовы координаты X, Y, Z выразим через безразмерные координаты x, y, z посредством характерного масштаба l, задаваемого в метрах,

$$X = lx, \quad Y = ly, \quad Z = lz. \tag{6}$$

Следуя [8], построим удобную безразмерную модель движения частиц массы m и заряда q в данных полях. Физическое время t, задаваемое в секундах, выразим через безразмерный текущий параметр τ по формуле

$$t = T\tau, \tag{7}$$

и масштаб времени T подчиним условию

$$T = l\sqrt{\frac{m}{|q\Phi_0|}}. \tag{8}$$

В этих условиях безразмерная функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - \rho^n g\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right). \tag{9}$$

Начальные данные движения — координаты X_0, Y_0, Z_0 и скорости V_{0X}, V_{0Y}, V_{0Z} — преобразуются в безразмерные величины x_0, y_0, z_0 и $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ соответственно

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{X_0}{l}, \quad y_0 = \frac{Y_0}{l}, \quad z_0 = \frac{Z_0}{l}, \\ \dot{x}_0 &= \frac{T}{l}V_{0X}, \quad \dot{y}_0 = \frac{T}{l}V_{0Y}, \quad \dot{z}_0 = \frac{T}{l}V_{0Z}. \end{aligned} \tag{10}$$

Начальная кинетическая энергия частицы

$$E_0 = m\frac{V_0^2}{2} = m\frac{V_{0X}^2 + V_{0Y}^2 + V_{0Z}^2}{2}$$

заменится безразмерным параметром энергии

$$W = \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}{2} = \frac{E_0}{|q\Phi_0|}. \tag{11}$$

В безразмерной модели исчезают физические правила подобия, связанные с изменением потенциалов, линейных физических масштабов и энергий, но зато полностью обнажается математическая сущность движения и, в частности, специальный принцип подобия, свойственный данным полям. Чтобы выявить его, подвергнем пространство (x, y, z) преобразованию подобия с коэффициентом k и введем новое безразмерное время, положив

$$x^* = kx, \quad y^* = ky, \quad z^* = kz, \quad \tau^* = a\tau. \tag{12}$$

Функция L из (9) примет вид

$$\begin{gathered} L = \frac{a^2}{k^2}\,\frac{\left(\frac{dx^*}{d\tau^*}\right)^2 + \left(\frac{dy^*}{d\tau^*}\right)^2 + \left(\frac{dz^*}{d\tau^*}\right)^2}{2} - \frac{1}{k^n}\rho^{*n} g\left(\frac{x^*}{\rho^*}, \frac{y^*}{\rho^*}\right), \\ \rho^* = \sqrt{x^{*2} + y^{*2} + z^{*2}}. \end{gathered} \tag{13}$$

Выберем параметр времени a из условия

$$\frac{a^2}{k^2} = \frac{1}{k^n}$$

или

$$a = k^{(2-n)/2}, \tag{14}$$

тогда из (13) выделится общий множитель $1/k^n$, который можно опустить в силу инвариантности однородных уравнений Лагранжа относительно операции умножения функции Лагранжа на произвольную постоянную. В результате получим

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx^*}{d\tau^*}\right)^2 + \left(\frac{dy^*}{d\tau^*}\right)^2 + \left(\frac{dz^*}{d\tau^*}\right)^2\right] - \rho^{*n} g\left(\frac{x^*}{\rho^*}, \frac{y^*}{\rho^*}\right). \tag{15}$$

С точностью до обозначений структуры (9) и (15) совпадают, и следовательно, оба интегральных многообразия траекторий для них в целом совпадают. Если взять какую-нибудь фиксированную траекторию с энергией W_0, то, меняя k, можно построить бесконечное множество взаимоподобных траекторий с энергиями

$$W = k^n W_0. \tag{16}$$

Иначе говоря, интегральное многообразие динамической системы в однородном по Эйлеру полю всегда распадается на множество семейств, внутри каждого из которых траектории взамно подобны. В этом и состоит математическая сущность специального принципа подобия. Его исключительную полезность для теории спектрографов легко осознать из следующего построения.

Рассмотрим точечный источник, расположенный в начале координат $x = y = z = 0$. Пусть из него летят электроны разных энергий E_0 в некотором достаточно узком телесном угле. В безразмерной модели движения диапазон энергий $E_1 < E_0 < E_2$ порождает диапазон изменения параметра $W = E_0/|q\Phi_0|$ при $\Phi_0 = \text{const}$ в пределах

$$W_1 = \frac{E_1}{|q\Phi_0|}, \quad W_2 = \frac{E_2}{|q\Phi_0|}. \tag{17}$$

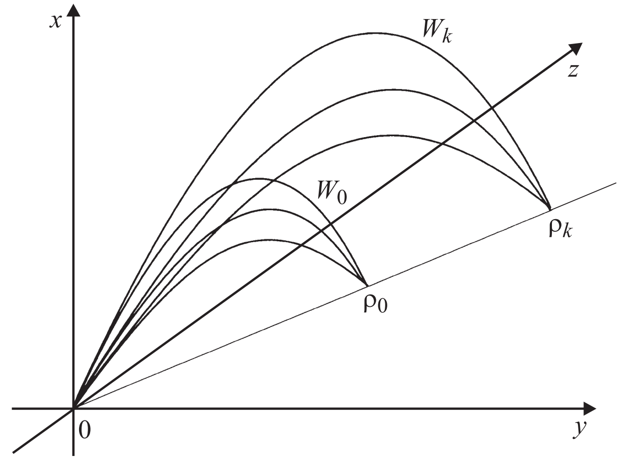
Выберем какое-нибудь конкретное значение W_0 из этого диапазона (W_1, W_2). Ему отвечает изоэнергетическое семейство траекторий, которое образует струю в пространстве (x, y, z). При благоприятных условиях может оказаться, что эта струя сфокусируется в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), расположенной на расстоянии ρ_0 от начала координат

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}. \tag{18}$$

Проведем через эти точки прямую — луч (см. рисунок). Преобразуем выделенную струю W_0 по принципу подобия с коэффициентом k. Получим новую струю с энергией W_k

$$W_k = k^n W_0. \tag{19}$$

Если первоначальная струя W_0 была сфокусирована по углам влета в точке (x_0, y_0, z_0) с каким-то вполне определенным порядком фокусировки, то преобразование



Движение потоков заряженных частиц в режиме спектрографа.

подобия, очевидно, не меняет этот порядок; варьируется только аберрационный коэффициент. Точка фокусировки переместится из положения ρ_0 в положение ρ_k на том же луче

$$\rho_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} = k\rho_0. \tag{20}$$

Изменяя k, возможно „диспергировать“ весь первоначальный поток вдоль построенного луча в соответствии с энергией W. Выразим k из (19) и подставим в (20), получим окончательное выражение для положения сфокусированного пятна на луче при произвольной энергии W

$$\rho_k = \rho_0\left(\frac{W}{W_0}\right)^{1/n}. \tag{21}$$

Сам выбор W_0 и величина ρ_0 зависят от конкретной структуры однородного поля и условий фокусировки, и здесь появляются большие возможности для управления „спектрографической ситуацией“.

Отсюда находим линейную энергетическую дисперсию

$$D = W\frac{d\rho_k}{dW} = \frac{\rho_0}{n}\left(\frac{W}{W_0}\right)^{1/n}. \tag{22}$$

Это универсальное выражение одинаково для всех однородных полей независимо от их конкретной структуры. Если вдоль луча фокусировки выстроить позиционно-чувствительный детектор, то он одновременно зафиксирует весь спектр энергий E_0 заданного точечного источника в диапазоне (E_1, E_2). Все эти рассуждения естественным образом приводят к наглядной и общей электронно-оптической схеме спектрографа, базирующейся на законе подобия пучков. Реализация схемы может быть самой разнообразной в зависимости от геометрии выбранного однородного потенциала. В частности, может оказаться, что он обладает фокусировкой не в виде пятнышек, а например, в виде криволинейных полосок, как это имеет место в плоском электрическом поле $(n = 1)$. Чтобы реализовать намеченную программу, сначала следует разобраться с возможными аналитическими формами представления однородных лапласовых потенциалов, наиболее подходящими для определения спектрографических сред с заранее заданными характеристиками.

Желательно выйти за рамки известной классической теории и построить более общие и гибкие алгоритмы, удобные для решения задачи Коши и граничных задач в классе однородных потенциалов как аналитическими, так и компьютерными методами. Стартовой позицией для нас служат потенциалы Донкина [10,11].

Генезис однородных гармонических потенциалов из потенциалов Донкина

Однородные гармонические потенциалы нулевой кратности $(n = 0)$ находятся как совместные решения уравнения Лапаласа и соответствующего уравнения Эйлера (1) при $n = 0$:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$x\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \tag{23}$$

Общее решение этой системы дает формула Донкина [10]

$$\Omega(\omega) = \psi(x, y, z) + i\varphi(x, y, z),$$

$$\omega = u + iv = \frac{x + iy}{z + \rho}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{24}$$

где $\Omega(\omega)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного. Обе функции ψ, φ гармонические и зависят от отношения координат, например, от x/z и y/z. Поверхности постоянного уровня $\psi = \mathrm{const}$ и $\varphi = \mathrm{const}$ — суть семейства конусов с общей вершиной в начале координат $x = y = z = 0$. Поэтому поля, порождаемые ими, иногда называют конусовидными. Представление Донкина, по существу, сводит все проблемы, связанные с конусовидными полями, к классической теории аналитических функций комплексного переменного, что делает его исключительно мощным инструментом.

Целью настоящей работы является разработка математического аппарата комплексного представления однородных гармонических потенциалов с целочисленными кратностями $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Порождающим фактором нам послужат потенциалы Донкина (24). Сначала сформулируем простые леммы, важные для нас.

Лемма 1. Частная производная по z от общей однородной структуры (4) кратности n дает новую однородную функцию кратности $(n-1)$.

Лемма 2. Дифференцирование произвольной гармонической функции $\varphi(x, y, z)$ по координатам x, y, z в любом числе операций и любых комбинациях всегда дает новые гармонические функции.

Лемма 3. Преобразование Кельвина однородной гармонической функции кратности n порождает гармоническую однородную функцию кратности $[-(n + 1)]$ с той же угловой частью.

Доказательство. Преобразование Кельвина [12] состоит из геометрического преобразования инверсии в шаре, которая сводится к алгебраическим заменам координат

$$x \to \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \; y \to \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \; z \to \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \tag{25}$$

и умножению преобразованной функции на множитель

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{26}$$

Если применить эти манипуляции к общей структуре (4), то, очевидно, функция $g\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right)$ сохранит свой вид, степенной множитель преобразуется, и получим функцию φ^* вида

$$\varphi^* = \frac{1}{\rho^{n+1}}\, g\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right). \tag{27}$$

Лемма 4. Если две функции $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ порознь гармоничны, а их градиенты взаимно ортогональны $\nabla P \nabla Q = 0$, то произведение (PQ) также является гармонической (лапласовой) функцией.

Доказательство очевидно.

С помощью указанных лемм можно построить теперь широкий мир однородных лапласовых потенциалов с целочисленными степенями (кратностями), используя только общее комплексное выражение потенциала Донкина (24) с произвольной аналитической функцией $\Omega(\omega)$. Начнем этот процесс с построения стартовой структуры, а именно однородного гармонического потенциала кратности $n = -1$. Это можно сделать тремя разными способами, например, применяя к (24) лемму 1 либо лемму 3, но нагляднее всего нам кажется использование леммы 4, если взять в качестве P кулоновский потенциал, а в качестве Q — потенциал Донкина (24). Действительно, поверхности постоянного уровня ψ и φ из (24) — суть семейство конусов с общей вершиной, а эквипотенциали кулоновского центра — суть сферы, ортогональные конусам. Следовательно, их градиенты также взаимно ортогональны. Все условия леммы 4 выполнены, и можно сразу записать

$$\Omega_{-1} = \frac{\Omega(\omega)}{\rho}, \tag{28}$$

$$\omega = \frac{x + iy}{z + \rho}. \tag{29}$$

Эту основную структуру (28) резонно назвать анизотропным кулоновским центром, ибо темп спадания потенциала здесь такой же, как у обычного кулоновского центра, но интенсивность моделируется функцией Ω, зависящей от направления $(x/z, y/z)$. Кроме применения в спектрографии он обещает более глубокие физические интерпретации, выходящие за рамки нашей статьи.

Далее, применяя к (28) лемму 1 многократно, можно получить бесконечную цепочку однородных потенциалов с отрицательными степенями

$$\Omega_{-2}(x,y,z)=\frac{\partial\Omega_{-1}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho^2}\left(\omega\Omega_\omega+\frac{z}{\rho}\,\Omega\right), \tag{30}$$

$$\Omega_{-3}(x,y,z)=\frac{\partial\Omega_{-2}}{\partial z}=\frac{1}{\rho^3}\Bigg[\omega(\omega\Omega_\omega)_\omega+\frac{3z}{\rho}\,\omega\Omega_\omega+\left(\frac{3z^2}{\rho^2}-1\right)\Omega\Bigg], \tag{31}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Omega_{-(n+1)}=\frac{\partial^n\Omega_{-1}}{\partial z^n}, \tag{32}$$

где $\Omega_\omega=d\Omega/d\omega$.

Уже из выражений (30), (31) легко понять, что угловая часть с ростом n будет состоять из расширяющейся линейной комбинации чистых функций от комплексного аргумента потенциалов Донкина и коэффициентов перемешивания, состоящих из степеней величины z/ρ, которые заведомо не гармоничны.

Все эти потенциалы лекго превратить в однородные гармонические потенциалы целых положительных степеней при помощи леммы 3. Например, из (30) получается

$$\Omega_1(x,y,z)=-\rho\left(\omega\Omega_\omega+\frac{z}{\rho}\,\Omega\right), \tag{33}$$

а из (31)

$$\Omega_2(x,y,z)=\rho^2\Bigg[\omega(\omega\Omega_\omega)_\omega+\frac{3z}{\rho}\,\omega\Omega_\omega+\left(\frac{3z^2}{\rho^2}-1\right)\Omega\Bigg]. \tag{34}$$

Итак, нами найден простой и прозрачный алгоритм определения широкого класса однородных лапласовых потенциалов для спектрографии. Его ядром является произвольный комплексный потенциал Донкина, чем достигается большая гибкость в приложениях. Естественно предположить, что этим способом можно построить все без исключения однородные гармонические функции с целыми индексами (степенями), но объем статьи не позволяет нам углубляться в эту сугубо математическую тему. Поэтому ограничимся явными интересными физическими применениями.

Однородные потенциалы с плоскостью симметрии

Из всего многообразия однородных потенциалов выделим такие, чтобы выполнялось условие

$$\varphi(x,y,z)=\varphi(x,-y,z). \tag{35}$$

Плоскость симметрии $y=0$ в этом случае может быть носительницей основного потока, подвергаемого спектрографическому преобразованию. Именно в этой ситуации могут реализоваться объемные фокусировки по двум углам влета с малыми аберрациями. Построения класса таких симметричных потенциалов легко осуществить, если взять потенциал — генератор Донкина Ω_ω — в виде

$$\Omega=i\,f(\omega)=\psi+i\varphi, \tag{36}$$

где $f(\omega)$ не содержит мнимости нигде, кроме самого аргумента ω. Иначе говоря, f — вещественная функция, если аргумент ω веществен. В этих условиях функция $\varphi(x,y,z)$, очевидно, четная по y. Построим теперь потенциал

$$\Omega_{-1}=\frac{i\,f(\omega)}{\rho}=\psi_{-1}(x,y,z)+i\varphi_{-1}(x,y,z). \tag{37}$$

Поскольку ρ — вещественная симметричная по y функция, то φ_{-1} в (37) будет также заведомо четной по y. Следовательно, уже построена основная структура с нужными свойствами, из которой дифференцированием по z можно построить множество симметричных потенциалов с отрицательными индексами. Легко доказать, что оператор $\partial/\partial z$, примененный к четной по y однородной функции, дает всегда тоже четную функцию. Таким образом, из (30), (31) и (32) получим симметричные потенциалы вида

$$\begin{cases}\Omega_{-2}=-i\,\dfrac{\omega f_\omega+\frac{z}{\rho}f}{\rho^2},\\[2mm] \Omega_{-3}=\dfrac{i}{\rho^3}\left[\omega(\omega f_\omega)_\omega+\dfrac{3z}{\rho}\,\omega f_\omega+\left(\dfrac{3z^2}{\rho^2}-1\right)f\right],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Omega_{-(n+1)}=i\,\dfrac{\partial^n}{\partial z^n}\,\dfrac{f}{\rho}.\end{cases} \tag{38}$$

Преобразование Кельвина, очевидно, сохраняет симметрию потенциала, и с его помощью все потенциалы (38) можно „перевернуть“ и получить систему однородных структур с целыми положительными степенями.

Задача Коши для однородных симметричных потенциалов

В работе [11] авторы бегло коснулись задачи Коши для однородных гармонических потенциалов нулевой кратности и нашли простой алгоритм решения при помощи комплексного потенциала Донкина. Это решение оказывается ключом подхода к задаче Коши для однородных симметричных полей с любыми целыми степенями, поэтому изложим его более подробно. Положим

$$\Omega(\omega)=i\,f\left(\frac{x+iy}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\psi+i\varphi. \tag{39}$$

Симметричный скалярный потенциал запишем в форме

$$\varphi = \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right). \qquad (40)$$

Задача Коши состоит в том, чтобы восстановить пространственный ход гармонического потенциала по его значениям в плоскости симметрии $y = 0$.

Из (40) видно, что ход потенциала в плоскости симметрии следует задавать формулой

$$\varphi\big|_{y=0} = \lambda\left(\frac{z}{x}\right). \qquad (41)$$

Функция λ предполагается аналитической. Поскольку f в (39) — суть функция вещественная при вещественном аргументе, то полагая $y = 0$ и соединяя с (41), получим уравнение

$$f\left(\frac{x}{z + \sqrt{x^2 + z^2}}\right) = \lambda\left(\frac{z}{x}\right). \qquad (42)$$

Обозначим, как и раньше, „укороченный" аргумент в структуре f той же буквой ω:

$$\omega = \frac{x}{z + \sqrt{x^2 + z^2}} \qquad (43)$$

и разрешим это равенство относительно величины z/x. Получим

$$\frac{z}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \omega\right). \qquad (44)$$

Подставив (44) в (42), получим искомую структуру неизвестной функции f в виде

$$f(\omega) = \lambda\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \omega\right)\right]. \qquad (45)$$

Остается заменить в (45) вещественный аргумент ω полным комплексным аргументом Донкина

$$\omega = \frac{x + iy}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (46)$$

и подставить полученное выражение для f в (45). Искомый комплексный потенциал запишется в виде

$$\Omega(\omega) = i\lambda\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \omega\right)\right] = i\lambda\left(\frac{zx - iy\rho}{x^2 + y^2}\right). \qquad (47)$$

Он и дает решение задачи Коши для однородного гармонического потенциала нулевой кратности.

Рассмотрим теперь ту же задачу для потенциала (37). Здесь условие Коши запишется как

$$\frac{f(\omega)}{\rho}\bigg|_{y=0} = \frac{\lambda\left(\frac{z}{x}\right)}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

или

$$\frac{f\left(\frac{x}{z+\sqrt{x^2+z^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{\lambda\left(\frac{z}{x}\right)}{\sqrt{x^2 + z^2}}. \qquad (48)$$

Радикалы в знаменателях слева и справа в выражении (48) сокращаются, и остается то же равенство (42), которое уже разрашено нами. Следовательно, f будет иметь ту же форму (47). Тогда для кратности $n = -1$ угловая часть остается точно такой же, что и в случае нулевой кратности. Теперь обратимся к общему случаю отрицательных степеней из (38) и запишем условие Коши в плоскости симметрии, в котором задается только угловая часть, зависящая от отношения $\frac{z}{x}$, поскольку соответствующая степень ρ входит по природе однородности потенциала. Имеем

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{f(\omega)}{\rho}\bigg|_{y=0} = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{f\left(\frac{x}{z+\sqrt{x^2+z^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{\lambda\left(\frac{z}{x}\right)}{\sqrt{(x^2 + z^2)^{n+1}}}. \qquad (49)$$

Введем новую переменную

$$p = \frac{z}{x}, \qquad (50)$$

тогда (49) запишется в виде

$$\frac{\partial^n}{\partial p^n}\frac{f\left(\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}\right)}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\lambda(p)}{\sqrt{(1 + p^2)^{n+1}}}. \qquad (51)$$

Получилось простое обыкновенное дифференциальное уравнение, общий интеграл которого находится n-кратным интегрированием правой части (51). При этом появляется еще полином степени $(n-1)$ по p с произвольными коэффициентами, который можно сразу отбросить, ибо он уничтожится сам собой при возвращении к общему комплексному потенциалу (38). Из (51) получаем

$$\frac{f\left(\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}\right)}{\sqrt{1 + p^2}} = \int\left[\int \ldots \int \frac{\lambda(p)}{(1 + p^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dp\right] dp = N(p). \qquad (52)$$

С помощью (52) выражаем $p = z/x$ через ω и получаем явное представление для искомого потенциала — генератора Донкина f

$$f(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \omega\right) N\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega} - \omega\right)\right].$$

Остается подставить вместо вещественного ω полный комплексный аргумент Донкина (46) и далее по формуле (38) вычислить окончательный искомый потенциал кратности $[-(n + 1)]$. С помощью преобразования Кельвина все эти потенциалы с отрицательными степенями можно трансформировать в потенциалы с целыми положительными степенями.

Заключение

Подводя итоги проведенного исследования, можно сделать следующие выводы.

1. Предложен и обоснован новый вариант общей электронно-оптической схемы спектрографа.

2. Разработан замкнутый аналитический аппарат представления однородных лапласовых потенциалов.

3. Построен явный аналитический алгоритм решения задачи Коши для однородных симметричных потенциалов с целыми отрицательными и положительными степенями.

Список литературы

[1] *Афанасьев В.П., Явор С.Я.* Электростатические энергоанализаторы для пучков заряженных частиц. М.: Наука, 1978. 224 с.
[2] *Голиков Ю.К., Холин Н.А., Шорина Т.А.* // Научное приборостроение. 2009. Т. 19. № 2. С. 13–24.
[3] *Jacka M., Kirk M., Gomati M.M.El., Prutton M.* // Rev. Sci. Insturm. 1999. Vol. 70. N 5. P. 2282–2287.
[4] *Read F.H.* // Rev. Sci. Instrum. 2002. Vol. 73. N 3. P. 1129–1139.
[5] *Зашквара В.В., Ашимбаева Б.У., Былинкин А.Ф.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 10. С. 2021–2025.
[6] *Овсянникова Л.П., Фишкова Т.Я.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 11. С. 133–135.
[7] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 607 с.
[8] *Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В.* Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Л.: Изд-во ЛПИ, 1984. 79 с.
[9] *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.
[10] *Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.–Л.: Гос. тех.-теор. изд-во, 1934. 467 с.
[11] *Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 2. С. 91–94.
[12] *Гринберг Г.А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 727 с.