

01;09

# Атомная антенна: нелинейное рассеяние лазерного импульса сверхатомной интенсивности

© П.А. Головинский, Е.М. Михайлов

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет,  
394006 Воронеж, Россия  
e-mail: golovinski@bk.ru

(Поступило в Редакцию 6 апреля 2010 г.)

Разработана полуклассическая модель генерации высоких гармоник при ионизации путем подавления атомного барьера. Рассмотрено распывание волнового пакета ионизованного электрона, выбраного в виде гауссова распределения. Квантовая природа процесса учитывается начальным дискретным уровнем электрона, а распывание конечного волнового пакета происходит в непрерывном спектре. Электрон после отрыва от атома считается свободным, его движение происходит под действием поля лазерного импульса, а кулоновское взаимодействие электрона с остовом носит характер возмущения. Рассчитано излучение электрона через его ускорение, выраженное в терминах средней силы взаимодействия электрона с кулоновским центром атома.

## Введение

Прогресс в создании ультракоротких лазерных импульсов высокой интенсивности привел к достижению качественно нового уровня технологии и появлению аттосекундной физики. Механизм получения аттосекундных импульсов тесно связан с генерацией высокочастотных гармоник исходного излучения [1]. Ранее были разработаны аналитические методы описания динамики оптического электрона для туннельного и многофотонного диапазонов лазерного поля, определяемых несущей частотой  $\Omega$ , амплитудой электрического поля  $F_0$  и начальной энергией связи в атоме  $\varepsilon_0$ . Переход от режима туннельной ионизации к многофотонной ионизации зависит от значения параметра Кельдыша  $\gamma = \omega \sqrt{|\varepsilon_0|} / F_0$  (используется атомная система единиц, в которой  $m = e = \hbar = 1$ ). Если параметр  $\gamma \ll 1$ , то ионизация носит туннельный характер, а в противоположном пределе  $\gamma \gg 1$  процесс является многофотонным. В режиме ионизации подавлением потенциального барьера лазерным полем такая классификация теряет смысл в связи с полным изменением физической картины процесса.

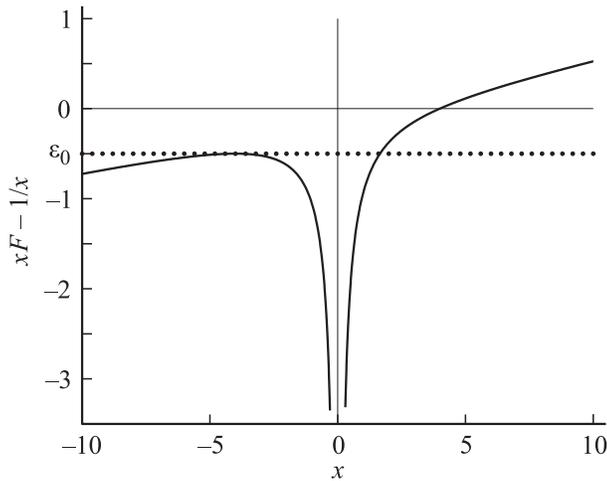
Данная работа посвящена построению полуклассической модели нелинейного рассеяния лазерного излучения в процессе ионизации атома коротким лазерным импульсом сверхатомной интенсивности. В этом случае после достижения внешним полем значений, достаточных для ионизации вверх потенциального барьера, движение электрона происходит в непрерывном спектре. Ранее для описания такого движения использовалось квазиклассическое приближение [2,3]. Дополнительно удалось учесть как классический характер движения центра масс образующегося волнового пакета, так и его диффузионное распывание [4,5]. В этих работах не преодолена трудность определения начальных параметров сформированного в непрерывном спектре волнового па-

кета, вследствие чего дальнейшие уточнения, связанные с учетом распывания волнового пакета, в определенной мере теряют ценность. Вопрос учета начальных условий в классическом приближении рассмотрен в [6]. В данной работе авторы ограничились классическим описанием самой ионизации при подавлении лазерным полем потенциального барьера, а квантовая природа процесса учтена выбором начальной энергии электрона в атоме, начальной волной функции и механизмом распывания волнового пакета после отрыва электрона от атома.

## Полуклассическая модель

При действии лазерных импульсов сверхатомной интенсивности электрон после ионизации атома можно считать почти свободным, так что его движение управляется лазерным полем, а взаимодействие с атомным остовом является возмущением. Такое приближение было предложено в работе [7] для объяснения механизма передачи энергии лазерного поля внутренним электронам атома. Подобная модель рассмотрена также в работе [8], где она получила название „атомная антенна“. Отметим, что эффективный механизм передачи энергии между электронами в процессе многоэлектронной нелинейной ионизации атомных электронов лазерными полями умеренной интенсивности действительно был обнаружен экспериментально в двухэлектронной ионизации гелия и получил соответствующее теоретическое объяснение [9].

В настоящей работе применима модель „атомной антенны“ к описанию нелинейного рассеяния лазерного излучения. Рассмотрим атом водорода, поскольку процессы в более сложных атомах могут быть описаны подобным образом с использованием эффективного заряда атомного остова. Будем считать поле волны линейно поляризованного лазерного излучения столь сильным, что движение электрона при надбарьерной ионизации близко к одномерному и происходит главным



**Рис. 1.** Потенциальная энергия электрона в момент подавления барьера как функция координаты  $x$  вдоль направления поляризации лазерного поля.

образом вдоль направления электрического поля  $OX$ , как показано на рис. 1. Классическая надбарьерная ионизация атома водорода с главным квантовым числом  $n$  возможна, если сумма потенциальной энергии атома  $V(r) = -1/r$  и энергии электрона в поле волны  $xF(t)$  в точке максимума станет меньше энергии начального связанного состояния  $E_n = -1/(2n^2)$ . Для точного кулоновского потенциала условие открытия канала надбарьерной ионизации имеет вид [10]:

$$F_{\min} = \frac{1}{16n^4}. \quad (1)$$

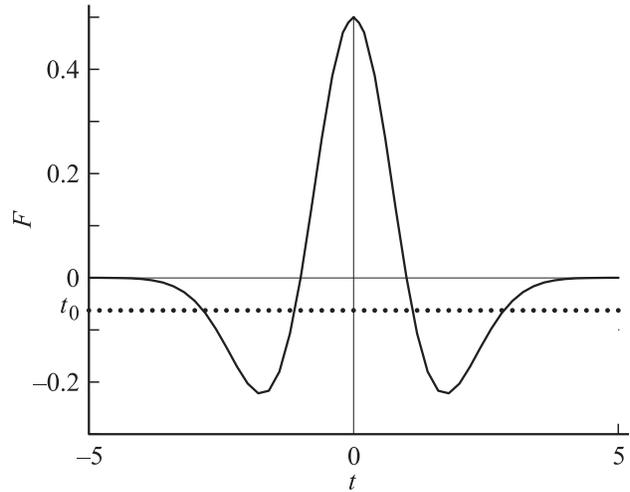
В дальнейших рассуждениях ограничимся рассмотрением электрона в начальном основном состоянии с  $n = 1$ . Отрыв от атома будет происходить в момент времени  $t_0$ , когда лазерное поле в первый раз достигнет напряженности подваления барьера  $F_{\min} = 1/16$  и откроется канал надбарьерной ионизации. Этот момент определяет совпадение энергии связанного в атоме электрона с максимальной высотой потенциального барьера и начало классического движения в точке с координатами  $|x| = 1/\sqrt{F_{\min}} = 4$ ,  $y = z = 0$  центра масс электронной волновой функции. Момент времени  $t_0$  существенно зависит от характерной амплитуды электрического поля  $F_0$  и формы лазерного импульса.

В качестве примера рассмотрим рассеяние импульса в виде всплеска, называемого „мексиканская шляпа“ [11]:

$$F(t) = F_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \left(1 - \frac{t^2}{\tau^2}\right). \quad (2)$$

Здесь  $\tau$  обозначает характерную длительность лазерного импульса.

На рис. 2 показаны форма импульса для  $F_0 = 0.5$ ,  $\tau = 1$  и момент времени, при котором выполняется условие (1). Характер движения электрона после



**Рис. 2.** Импульс „мексиканская шляпа“  $F(t)$  и время  $t_0$  открытия надбарьерной ионизации; пунктиром показана величина  $F_{\min}$ .

ионизации определяется не только временной формой импульса, но и начальной энергией связи электрона в атоме. Оба этих фактора влияют на момент открытия канала надбарьерного движения. Движение оторванного электрона под действием симметричного падающего лазерного импульса, удовлетворяющего условию  $\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = 0$ , асимметрично, и электрон, в отличие от исходно свободного, в конечном счете получает ненулевую энергию и импульс. Траектория электрона располагается вдоль оси  $OX$ , и смещение электрона  $a(t)$  находится из классического уравнения движения с соответствующими начальными условиями:

$$\ddot{a} = -F(t), \quad a_0 = 4, \quad \dot{a}_0 = 0. \quad (3)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$a(t) = F_0\tau^2 \left[ \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) - \exp\left(-\frac{t_0^2}{2\tau^2}\right) \right] + F_0 \left(-\frac{t_0^2}{2\tau^2}\right) t_0(t - t_0) + a_0. \quad (4)$$

На рис. 3 показано смещение (4) электрона как функция времени для указанных выше параметров поля. Как видно, траектория электрона частично возвращается назад под действием знакопеременной силы.

Подавление барьера наступает лишь через некоторое время после нафронтальной части лазерного импульса до подавления барьера в общем излучении рассеяния воспользуемся известной формулой Аммосова–Делоне–Крайнова [12], согласно которой вероятность ионизации в единицу времени

$$w(F) = \frac{2 \exp(2)}{\pi|F|} \exp\left(-2 \frac{2}{3|F|}\right). \quad (5)$$

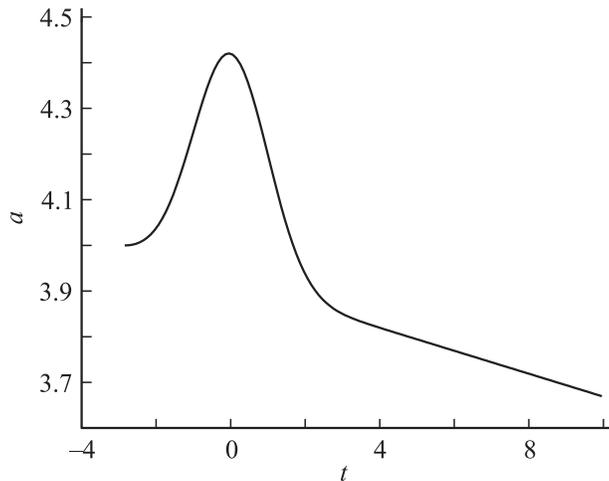


Рис. 3. Смещение электрона  $a$  как функция времени  $t$ .

В формуле (5) учтено, что атом водорода находится в исходном основном состоянии. Надбарьерная ионизация происходит при условии  $F \geq 1/16$ , а характерное время туннельной ионизации при доатомной напряженности лазерного поля на три порядка больше, чем период колебаний  $T \geq 10$  этого поля в видимом диапазоне. Следовательно, начальная часть ультракороткого импульса, содержащего несколько периодов, за время  $t < t_0$ , т.е. до подавления барьера, не вносит значительного вклада в ионизацию атома. В силу этого данный механизм далее не рассматривается.

### Рассеяние излучения

Поле излучения на больших расстояниях от атома, вычисленное в классическом дипольном приближении, пропорционально второй производной по времени от дипольного момента  $\mathbf{d}$  электрона [13]

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{c^2 R_0} [ \ddot{\mathbf{d}} \mathbf{n} ], \quad (6)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль направления излучения,  $R_0$  — расстояние от точки излучения до точки наблюдения. Дипольное приближение следует использовать с определенной осторожностью, поскольку для его применимости необходимо выполнение условия  $\omega d < c$ . Здесь  $\omega$  — частота излучения электромагнитной волны электроном,  $c$  — скорость света. Это означает, что дипольное приближение в данной задаче выполняется, если энергия излученного фотона не превосходит 1 keV. Уравнение (6) дает две составляющие рассеянного излучения, связанные с нелинейной трансформацией импульса и с линейным когерентным рассеянием света на свободном электроне без изменения формы рассеянного импульса по отношению к форме с падающего импульса. Стоит отметить, что в существенно нелинейном случае эти компоненты невозможно разделить.

Задача определения временной характеристики рассеянного импульса в модели „атомной антенны“ решается достаточно просто. Требуется определить временную зависимость электрического дипольного момента электрона, рассчитать его вторую производную, а спектр гармоник может быть найден с помощью преобразования Фурье. Для целого ряда физических процессов важен именно спектральный состав излучения  $dW_\omega/d\omega$ , т.е. функция распределения фотонов по частоте. Спектральное распределение фотонов может быть найдено так же, как и в случае тормозного излучения, вызванного столкновением заряженных частиц [13]:

$$\frac{dW_\omega}{d\omega} = \frac{2}{3\pi c^3} |\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2, \quad \mathbf{d}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(t) \exp(i\omega t) dt. \quad (7)$$

Перейдем к конкретным расчетам в рассматриваемой модели. С момента надбарьерной ионизации и вплоть до окончания импульса главный механизм распада состояния атома связан с расплыванием электронного волнового пакета. В это время атомный потенциал не играет особой роли в динамике электрона. Этот факт позволяет описать квантовую эволюцию системы аналитически. Нестационарное уравнение Шредингера без учета потенциала атома имеет вид:

$$i\psi = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{p}} + \frac{1}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi. \quad (8)$$

Его решение дается волковской функцией волнового пакета, которая изначально совпадает с невозмущенной волновой функцией основного состояния и учитывает внешнее переменное поле вектором-потенциалом  $\mathbf{A}(t)$ , связанным с электрическим полем лазерной волны соотношением [13]  $\mathbf{F}(t) = -\frac{1}{c} \partial \mathbf{A}(t) / \partial t$ , где  $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$  — оператор импульса.

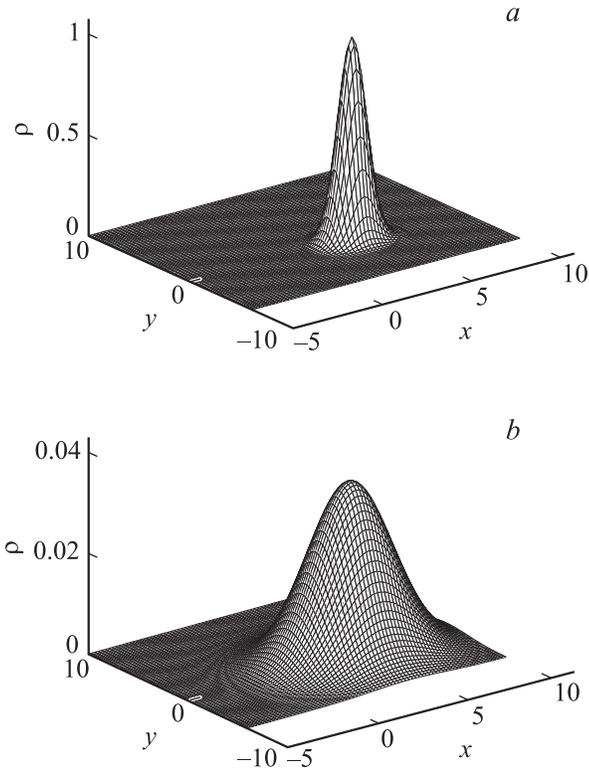
Динамика электронной волновой функции в этих условиях может быть найдена с помощью преобразования Крамерса [5]

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp(-\nabla \mathbf{a}) \exp\left(-i \int_0^t \frac{\mathbf{A}^2(\tau)}{2c^2} d\tau\right) \varphi_0(\mathbf{r}, 0). \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{a}(t) = \frac{1}{c} \int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau$  — вектор классического смещения электрона,  $\psi(\mathbf{r}, t)$  — волновой пакет электрона в лазерном поле [14],  $\varphi_0(\mathbf{r}, 0)$  — волновая функция электрона в момент подавления барьера.

При больших интенсивностях лазерного поля точный вид волнового пакета не имеет принципиального значения для выяснения основных особенностей нелинейного рассеяния. В целях удобства вычислений начальное сферически симметричное  $s$ -состояние оптического электрона выберем в форме гауссова распределения

$$\varphi_0(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{(\pi \Gamma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\Gamma^2}\right), \quad (10)$$



**Рис. 4.** Электронная плотность в последовательные моменты времени: *a* — ( $t = t_0$ ), *b* —  $t = t_0 + 3$ .

нормированного на единицу. Для основного состояния атома водорода ширина  $\Gamma \sim 1$ . Если требуется сделать расчет более точным, волновую функцию начального состояния можно представить в виде суперпозиции нескольких функций Гаусса. После преобразования Крамерса найдем выражение для эволюции волнового пакета в виде

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \chi(t)f(\mathbf{r}, t), \\ f(\mathbf{r} - \mathbf{a}(t)) &= \exp\left(-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{a}(t))^2}{2(\Gamma^2 + it)}\right), \\ \chi(t) &= \frac{1}{[\pi(\Gamma^2 + it)]^{3/2}} \exp\left(-i \int_0^t \frac{\mathbf{A}^2(\tau)}{2c^2} d\tau\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Аналитическое выражение (11) для волновой функции показывает, что электронная плотность осциллирует вдоль поляризации поля вблизи начального распределения. Функция постепенно расплывается вследствие дисперсии волнового пакета. На рис. 4 расплывание электронной плотности  $\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$  показано в последовательные моменты времени  $t = t_0$  и  $t = t_0 + 3$ .

Для расчета излучения электрона найдем ускорение, которое пропорционально среднему значению силы взаимодействия электрона с лазерным полем и кулоновским центром:

$$\ddot{\mathbf{d}} = \int \frac{\mathbf{r}}{r^3} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} + \mathbf{F}(t). \quad (12)$$

Здесь учтено, что дипольный момент электрона  $\mathbf{d}$  отличается от радиуса-вектора только знаком  $\mathbf{r}$ . Самоогласованное описание предполагает, что начальное условие обеспечивает выполнение равенства  $\dot{\mathbf{d}}(t_0) = 0$ , т. е. излучение отсутствует, когда электрон находится на вершине барьера и обладает нулевым ускорением. Это позволяет установить соответствие полуклассического и классического описания излучения фотона в случае ионизации подавлением потенциального барьера.

При расчете интеграла в уравнении (12) удобно применить преобразование Фурье кулоновского потенциала. Воспользуемся формулой [15]

$$\int \frac{e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{r} d\mathbf{r} = -\frac{4\pi}{q^2}. \quad (13)$$

С учетом уравнения (13) запишем

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla \frac{1}{r} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int \frac{i\mathbf{q}e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{q^2} d\mathbf{q}. \quad (14)$$

Подставив уравнение (14) в (12) и принимая в расчет (11), имеем

$$\ddot{d}_x(t) = \frac{1}{2\pi^2} |\chi(t)|^2 \int \frac{iq_x}{q^2} \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{a}) d\mathbf{q} + F(t). \quad (15)$$

Функция

$$\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{a}) = \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} |f(\mathbf{r} - \mathbf{a}(t))|^2 d\mathbf{r} \quad (16)$$

представляет собой формфактор распределения  $|f(\mathbf{r})|^2$ , смещенного на расстояние  $\mathbf{a}(t)$  от центра атома. Расчет внутреннего интеграла в формуле (16) после замены переменной  $\mathbf{r} - \mathbf{a} = \mathbf{r}'$  дает

$$\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{a}) = [4\pi b^2]^{3/2} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{a} - q^2 b^2), \quad (17)$$

где  $b^2 = (\Gamma^2 + t^2/\Gamma^2)/4$ . Подставив (17) в (15) и используя цилиндрическую симметрию задачи, получим

$$\ddot{d}_x = I(a, b) + F(t), \quad (18)$$

где

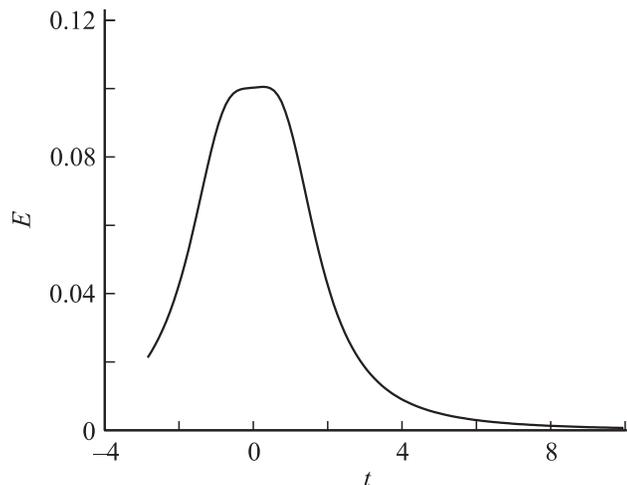
$$I(a, b) = \frac{1}{2\pi^2 \Gamma^3} \int \frac{iq_x}{q^2} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{a} - q^2 b^2) d\mathbf{q}. \quad (19)$$

При выводе формулы (19) учтено, что

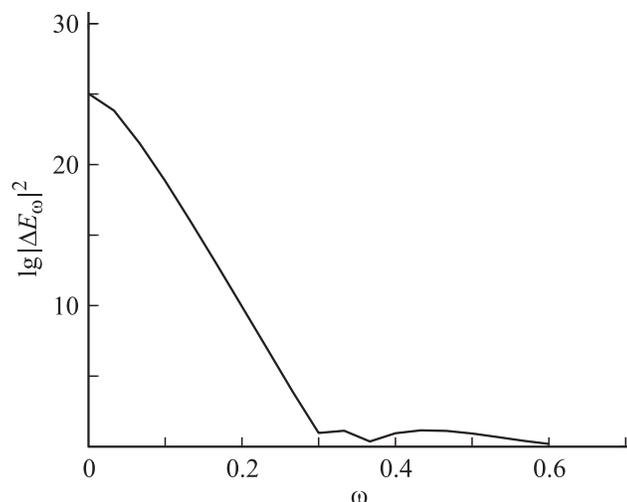
$$|\chi(t)|^2 = \frac{1}{(4\pi \Gamma^2 b^2)^{3/2}}.$$

В дальнейшем в уравнении (19) необходимо проинтегрировать по импульсу. Для этих целей проведем интегрирование по угловым переменным и преобразуем интеграл к виду

$$I(a, b) = \frac{2}{\pi \Gamma^3} \int_0^\infty \frac{qa \cos(aq) - \sin(aq)}{q^3} \exp(-q^2 b^2) dq. \quad (20)$$



**Рис. 5.** Электрическое поле  $E$  рассеянного излучения как функция времени  $t$ .



**Рис. 6.** Спектр рассеянного излучения.

ции высоких гармоник, сопровождающих нелинейную ионизацию атомов под действием сверхсильных лазерных полей. Отличительной особенностью полученного решения является аналитический учет взаимодействия электронного волнового пакета с атомным остовом. В данном подходе не возникает проблем определения параметра удара, и нет особенности в сечении, возникающей при центральном ударе электрона в атомный остов, что обычно для классических моделей. В итоге выведены универсальные аналитические выражения для формы рассеянного импульса.

Модель может быть применена для лазерных импульсов произвольной формы, поскольку использованная функция „мексиканская шляпа“ является фреймом для разложения произвольного импульсного сигнала. Полученные в работе результаты позволяют достаточно просто оценить экспериментальную возможность наблюдения нелинейного преобразования ультракороткого сверхатомного лазерного импульса и рассчитать его спектр для простых атомарных сред без использования серьезных компьютерных ресурсов в дополнение к методу расчета линейного рассеяния при низких интенсивностях [17].

Отметим близость нашего описания нелинейного рассеяния к работе [18]. Основное отличие состоит в том, что при построении аналитической модели процесса авторами [18] используется феноменологическое представление о формировании конечного состояния в виде свободного волнового пакета, в то время как нами учитывалось расплывание пакета совместно с действием поля, а начальные параметры определялись из условия подавления потенциального барьера. Физическая модель данной работы та же, что в [19], однако имеются существенные отличия в деталях решения. Последовательно применяемая нами калибровка взаимодействия электрона с лазерным полем в форме импульса позволила представить все аналитические результаты в компактной и ясной форме, а описание импульсов с помощью вейвлетов вида „мексиканская шляпа“ получить полностью аналитическое решение для формы рассеянного импульса. Кроме того, нами учтен снос, приобретаемый электроном за счет ускорения полем при ионизации. Важность этого эффекта была отмечена в [19], но обсуждение носило только качественный характер.

В данной работе описано рассеяние очень короткого импульса, так что в результате существенного сокращения его длительности не происходит. Однако проведенные расчеты объясняют механизм укорочения рассеянного импульса и в том случае, когда исходный лазерный импульс обладает большой интенсивностью, но длителен по действию, т.е. содержит много периодов колебаний. В этом случае электрон вырывается на фронте импульса, и волновая функция расплывается за атомные времена. Излучение вторичных фотонов происходит так же, как и для короткого импульса за времена, соизмеряемые с атомными. Особенностью рассмотренного основного состояния атома водорода

После интегрирования по модулю импульса окончательно получим:

$$I(a, b) = \frac{1}{\pi \Gamma^3 b a} \left[ a \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{a^2}{4b^2}\right) - \pi b \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2b}\right) \right], \tag{21}$$

где  $\operatorname{erf}(u)$  — интеграл ошибок [16].

Формулы (18) и (21) позволяют легко рассчитать временную зависимость рассеянного поля для любой формы падающего лазерного импульса.

На рис. 5 приведена временная форма рассеянного импульса (2), а рис. 6 показывает его спектральное представление.

## Заключение

Предложенная в работе модель является развитием полуклассического приближения для описания генера-

является отсутствие узлов в распределении электронной плотности. В общем случае произвольного  $s$ -состояния имеется  $n-1$  узловая поверхность [10]. Это позволяет получать большее количество осциллирующих рассеянного поля при отрыве электрона от атома, т.е. путем предварительного заселения определенного состояний управлять не только длительностью, но и структурой рассеянного импульса.

Авторы выражают признательность М.Я. Амусья за неоднократные стимулирующие обсуждения.

## Список литературы

- [1] *Pukhov A., Gordienko S., Baeva T.* // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91. P. 173 002 (1–4).
- [2] *Connerade J.P., Conen K., Dietz K., Henkel J.* // J. Phys. B. At. Mol. Opt. Phys. 1992. Vol. 25. P. 3771.
- [3] *Lewenstein M., Kulanter K.C., Schafer K.J., Bucksbaum P.H.* // Phys. Rev. A. 1995. Vol. 51. P. 1495.
- [4] *Grobe R., Fedorov M.V.* // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 68. P. 2592.
- [5] *Golovinski P.A.* // Laser Phys. 1993. Vol. 3. P. 280.
- [6] *Головинский П.А., Михайлов Е.М., Преображенский М.А.* // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. Вып. 6. С. 48.
- [7] *Головинский П.А., Бердышев А.В.* // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. Вып. 4. С. 208.
- [8] *Кучиев М.Ю.* // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 45. Вып. 7. С. 319.
- [9] *Golovinski P.A.* // Laser Phys. 1997. Vol. 7. P. 655.
- [10] *Бете Г., Солпитер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.: Наука, 1960. 562 с.
- [11] *Добешин И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2001. 464 с.
- [12] *Atmosov M.A., Golovinski P.A., Kiyun I.Yu., Krainov V.P., Ristich V.M.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1992. Vol. 9. P. 1225.
- [13] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
- [14] *Давыдов А.С.* Квантовая механика. М.: Наука, 1973. 703 с.
- [15] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 767 с.
- [16] *Абрамовиц М., Стиган И.А.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 826 с.
- [17] *Golovinski P.A., Mikhailov E.M.* // Laser. Phys. Lett. 2006. Vol. 3. P. 259.
- [18] *Емелин М.Ю., Рябикин М.Ю., Сергеев А.М.* // ЖЭТФ. 2008. Т. 133. Вып. 2. С. 243.
- [19] *Fedorov M.V., Peatross J.* // Phys. Rev. 1995. Vol. 52. N 1. P. 504.