01

Треугольное отображение как абстрактная модель эволюции открытых систем

© В.Г Усыченко

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: Usychenko@rphf.spbstu.ru

(Поступило в Редакцию 28 ноября 2010 г.)

Совершен переход от необратимых уравнений термодинамических явлений переноса к треугольному отображению. Показано, что это отображение может служить моделью открытой системы, способной к самоорганизации и эволюции.

Введение

Многое в природе развивается необратимо от простого к сложному. В первую очередь это относится к эволюции Вселенной и жизни на Земле. Для описания этих сложных явлений используют многочисленные модели, базирующиеся на законах квантовой и аналитической механики, термодинамики, классической физики и химии и т. д. Но природа творит, не ведая о законах, открытых человеком. Правомерно считать, что глубинная основа природных эволюционных процессов может быть скрыта в абстрактных математических моделях. И если считать, что самое сложное было когда-то предельно простым, то и абстрактные модели должны быть простыми и наглядными. Попытаемся показать, что одной из моделей необратимой эволюции может служить простая динамическая система, траектории которой образуют на плоскости Пуанкаре треугольное отображение.

Необратимое движение

Необратимость особенно наглядно проявляется в термодинамических законах установившихся одномерных явлений переноса тепла, массы, электрического заряда и т. д. Эти законы можно привести к однообразному виду в форме потока энергии, протекающей через элемент объема $dsdx$:

$$\frac{dQ_{TD}(x)}{dt} = Y_{TD}X_{TD}(x)dsdx \ \ [\text{J/s}].$$

Здесь $X_{TD}(x)$ — термодинамическая сила; Y_{TD} — размерный коэффициент; ds — элементарная площадка, расположенная перпендикулярно потоку. При постоянстве величин, стоящих в правой части, нормируя, получим уравнение

$$ds/dt = u_x, \tag{1}$$

которое описывает равномерное движение материальной точки единичной массы через свободное пространство. Таким образом, фундаментальные свойства необратимого движения можно исследовать с помощью простейшего уравнения (1). Решение уравнения

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t \tag{2}$$

непрерывно как функция начальных данных x_0, $u_x = \dot{x}_0$, равномерно относительно t на полубесконечном интервале изменения $t \geq t_0$, неустойчиво по Лагранжу и по Ляпунову.

Пусть скорость известна с ошибкой, которая равновероятно распределена в диапазоне значений $\dot{x}_0 \pm \Delta\dot{x}$. Решение (2) принимает вид

$$x = x_0 + (\dot{x}_0 \pm \Delta\dot{x})t. \tag{3}$$

С течением времени неограниченно растет масштаб системы — среднестатистическая длина $\dot{x}_0 t$ пройденного пути и размер $\Delta x = 2\Delta\dot{x}t$ пространства неопределенности, в котором можно обнаружить частицу. Но относительные значения

$$\frac{\Delta x}{x - x_0} = \frac{2\Delta\dot{x}}{\dot{x}_0} \tag{4}$$

остаются неизменными.

Возвратное движение

Используем уравнение (2) для описания равномерного движения электрона в ограниченном пространстве, мысленно поместив частицу в одномерный ящик длиной L. Частица сталкивается со стенками ящика упруго, мгновенно меняя направление скорости на противоположное. Такая операция делает движение обратимым в пространстве, но не во времени. Время в нашей задаче по-прежнему изменяется в направлении $t \geq t_0$, где t_0 связано с моментом прохождения координаты x_0 в заданном направлении. Стенки ящика делают движение электрона устойчивым по Лагранжу, но не устраняют локальную неустойчивость.

Мгновенное изменение направления скорости частицы при столкновении со стенкой относится к существенно нелинейному явлению, которое физически не реализуется. Причина в том, что при торможении электрон теряет часть энергии, и после каждого столкновения скорость снижается. Замена электрона атомом не меняет ситуацию принципиально, поскольку атом состоит из заряженных частиц. Даже фотон, не имеющий массы и заряда, при отражении от любого реального зеркала теряет часть энергии. Но как математическая модель движение с упругими столкновениями, сохраняющими энергию тела постоянной, поможет в дальнейшем пониманию более сложных явлений.

Переход к возвратному движению сопровождается изменением пространственного масштаба системы, который теперь не превышает длину L ящика. В результате этого относительные значения отклонений (4)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Delta x(t)}{x(t)-x_0}=\lim_{t\to\infty}\frac{\Delta x(t)}{L}=\lim\frac{2\Delta\dot{x}t}{L}=\infty \tag{5}$$

неограниченно растут со временем.

Представим наблюдателя, который хочет измерить точное значение скорости электрона, регистрируя моменты t_i $(i=1,2,3,\ldots)$ прохождения координаты x_q в заданном направлении. Часы у наблюдателя абсолютно точные, но период $T_i=t_i-t_{i-1}$ возвратного движения он каждый раз измеряет неточно, поскольку не может мгновенно зафиксировать координату x_q в момент ее прохождения. Поэтому измеренное значение $T_i=T_0\pm\Delta T$ не совпадает с точным значением T_0, а известно с погрешностью, равномерно распределенной в интервале $2\Delta T$. По причине абсолютной точности часов погрешность $\pm\Delta T$ не зависит от числа n возвратов. Разность времени $t_i-t_{i-n}=nT_0\pm\Delta T$ между отсчетами, отстоящими друг от друга на n возвратов, отличается от точного значения nT_0, оказываясь в том же интервале неопределенности $2\Delta T$. Это обстоятельство позволяет найти точное значение T_0, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_i-t_{i-n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(T_0+\frac{2\Delta T}{n}\right)=T_0.$$

Пусть, например, $2\Delta T=10^{-2}$. После первого измерения наблюдатель узнал значение периода с точностью до второго знака после запятой. Третью цифру он узнает, зафиксировав $n=10$ моментов прохождения координаты, четвертая цифра станет известна после 100 возвратов, и так далее. Каждая последующая цифра заранее неизвестна наблюдателю. Если значение T_0 является иррациональным числом, то при неограниченном времени наблюдения образуется неограниченная последовательность случайных цифр. „Добывая" каждую новую цифру, наблюдатель получает нужную ему информацию, но для несведущего человека полученная последовательность представляется не информацией, а беспорядком, хаосом. В таких бесконечных и непредсказуемо меняющихся процессах термины новизна, информация, случайность, хаос могут выступать наравне. Если число цифр ограничено, то движение является периодическим. Периодическое движение информации не производит [1].

Что будет при прерывистом наблюдении? Из (5) следует, что спустя время t_1, когда размер пространства неопределенности

$$\Delta x=2\Delta\dot{x}t_1\geq L$$

превысит длину L ящика, наблюдатель, следивший за движением электрона, не сможет предсказать его координату: частицу с равной вероятностью можно обнаружить в любом месте ящика. Через это же время полностью утрачивается информация о начальных значениях t_0, x_0 и начальном направлении движения. Если фиксировать мгновенные координаты электрона через интервалы времени $T>t_1$, то получится неограниченная последовательность случайных чисел, равномерно распределенных в диапазоне значений $0\leq x\leq L$. Время

$$t_1\geq\frac{L}{2\Delta\dot{x}} \tag{6}$$

можно назвать временем исчезновения памяти о прошлом. С этим временем непосредственно связана теорема отсчетов В. Котельникова. Просматривается также аналогия с бросанием монеты. Если за время полета монета совершит один оборот, тренированный глаз успеет заметить это. Орел и решка выпадают случайно лишь тогда, когда не успевают сосчитать число совершенных монетой оборотов. В трехмерном мире по такой же причине случайно выпадает игральная кость.

Переход к треугольному отображению

Начнем отсчет времени с момента $t_0=0$, когда частица находилась в точке $x_0=0$ соприкосновения со стенкой. На интервале времени $0<t<T/2$ координата электрона меняется в диапазоне значений $0<x<L$ по закону $x=\dot{x}_0t$; при $t=T/2$ получаем $x=L=\dot{x}_0T/2$. На интервале времени $T/2<t<T$ электрон возвращается обратно, и его координата меняется в диапазоне значений $L>x>0$ по закону $x=2L-\dot{x}_0t$. Движение электрона в ящике записывается так:

$$f(x)=\begin{cases}x=\dot{x}_0t, & 0<t<T/2,\\ 2L-x=2L-\dot{x}_0t, & T/2<t<T.\end{cases} \tag{7}$$

С течением времени электрон будет пробегать через любую выбранную точку x_q неограниченное число $k=1,2,3,\ldots$ раз. Обратим внимание на то, что уравнение (7) инвариантно к скорости и связанному с ней периоду возврата T, поскольку все определяет координата $0\leq x(t)=\dot{x}_0t\leq L$. Иными словами, частица будет проходить через одни и те же значения координат $0\leq x\leq L$ при произвольном значении $\dot{x}_0>0$. Скорость может также менять скачком свое значение в момент столкновения со стенкой в точке $x_0=0$.

Перейдем к безразмерным величинам:

$$x=x/L=\dot{x}_0t/L,\quad 0\leq x/L\leq 1;$$

$$t=\frac{t}{T/2}=2\,\frac{t}{T},\quad 0\leq t/T_k\leq 0.5;\quad \dot{x}_0=\dot{x}_0/\dot{x}_0=1.$$

Значения x/L и $2t/T$ меняются одинаково. Введя обозначение $\theta = t/T$, преобразуем (7) к виду

$$f(\theta) = \begin{cases} 2\theta, & 0 < \theta < 1/2, \\ 2(1-\theta), & 1/2 < \theta < 1, \end{cases} \tag{8}$$

Выражением (8) описывается хорошо известное [2,3] треугольное отображение, приведенное на рис. 1. От физической системы с непрерывным временем совершен переход к множеству чисел, принадлежащих интервалу $0 < \theta < 1$ и связанных между собой линейным детерминированным законом (8). Для решения системы (8) обычно используют итерации: каждое последующее значение θ_{k+1} находится по предыдущему значению θ_k в соответствии с правилом $\theta_{k+1} = f(\theta_k)$, в котором $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ играет роль дискретного времени.

Последовательность чисел $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k, \ldots$ является необратимой. Это следует из необратимости во времени исходного уравнения (2) и наглядно видно из рис. 1: одной ординате θ_k соответствуют два значения θ_{k-1}, поэтому обратное движение является неоднозначным. Если задать два начальных значения $\theta_{01} = \theta_0$ и $\theta_{02} = \theta_0 + \varepsilon$, различающихся на малую величину $\varepsilon \ll \theta_0$, то корреляция между вытекающими из них последовательностями чисел будет ослабевать с ростом k и через

$$k > \log_2(1/\varepsilon) \tag{9}$$

итераций последовательности станут некоррелированными. Формула (9) является дискретным аналогом формулы (6).

На рис. 2 приведены итерационные значения решения системы (8) при $\theta_{01} = \sqrt{0.870\,001} \cong 0.932\,738\,44$ и $\theta_{02} = \sqrt{0.87} \cong 0.932\,737\,9$. Разница между этими начальными значениями $\varepsilon = \theta_{01} - \theta_{02} \cong 5.4 \cdot 10^{-7}$. Из рисунка видно, что сначала последовательности чисел

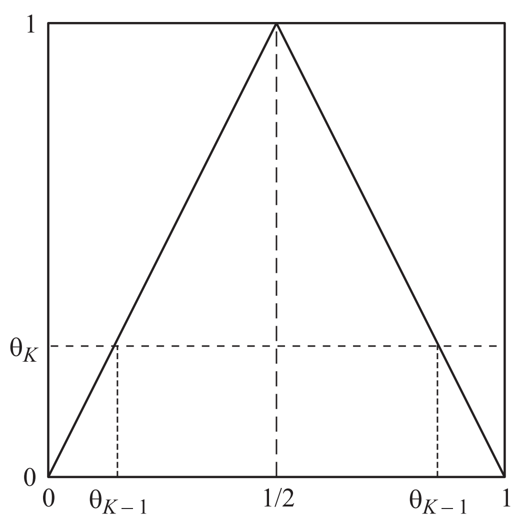

Рис. 1. Геометрическое представление треугольного отображения.

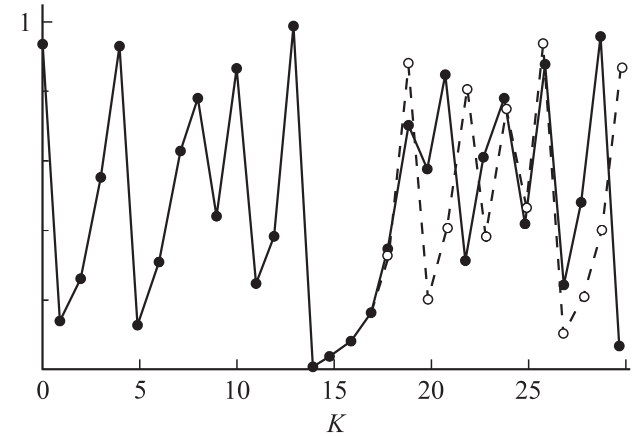

Рис. 2. Последовательность итерационных значений системы (8) при двух начальных значениях, различающихся на $\varepsilon = 5.4 \cdot 10^{-7}$.

практически повторяют друг друга, но постепенно различия нарастают. После 21-й итерации произошло расцепление корреляций и процессы стали независимыми.

Последовательность итерационных значений $\ldots \theta_{k-1}, \theta_k, \theta_{k+1}, \ldots$ не является абсолютно случайной, или δ-коррелированной, подобно дробовому шуму. Это видно, например, по значениям θ_k, принадлежащим итерациям с номерами $14 \le k \le 19$: при каждом увеличении k на единицу они возрастают вдвое. Проанализировав достаточно длинную последовательность, нетрудно определить закон (8), заметив, что с ростом k удваиваются значения всех $\theta_k < 0.5$, а значения всех $\theta_k > 0.5$ уменьшаются по правилу $\theta_{k+1} = 2(\theta_k - 1)$. Таким образом, закон, приводящий к детерминированному хаосу, находится по кажущимся случайными отсчетам.

Выше говорили, что при столкновении со стенкой ящика частица теряет часть энергии на излучение. Если стенки ящика проницаемы для фотонов, то эта энергия покидает систему. Скорость частицы снижается от оборота к обороту, каждый раз принимая новое значение $\dot{x}_{0j}$, и движение будет продолжаться, пока $\dot{x}_{0j} > 0$. При $\dot{x}_{0j} = 0$ частица останавливается, при этом ее координата скачком выходит из системы (8) и оказывается в системе

$$\phi(\theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < \theta < 1/2, \\ (1-\theta), & 1/2 < \theta < 1, \end{cases}$$

что можно интерпретировать как гибель частицы. Для того чтобы движение длилось бесконечно долго, нужно компенсировать утрачиваемую энергию, подавая ее извне. Это делает систему неустойчивой, что подтверждается показателем Ляпунова, который у треугольного отображения имеет значение $\lambda = \ln 2 > 0$. Таким образом, абстрактная модель (8) описывает открытую неустойчивую систему. Согласно положениям синергетики [4–7], такие системы способны к самоорганизации и эволюции.

Эволюция открытых систем

Интересен случай, когда поступающая в систему энергия превышает потери. Если частица одна, то ее кинетическая энергия будет возрастать по причине увеличения скорости. Но скорость в природе ограничена, поэтому с течением времени начнет расти масса, у которой нет, как у скорости, верхнего предельного значения. Если частиц много и каждая из них является атомом идеального газа, то за счет релятивистского эффекта будет расти масса каждого атома. Увеличение массы равносильно увеличению потенциальной энергии. Если между частицами существует полевое взаимодействие, то поступающая извне энергия может идти не на увеличение скорости и релятивистской массы частиц, а на их кооперацию, самоорганизацию, сопровождающуюся увеличением массы (потенциальной энергии) коллективной структуры [7]. В процессе изменения массы скорость структуры и время возврата будут меняться, свидетельствуя о том, что система находится в стадии развития. Если время возврата стало неизменным (перидическим), значит, масса и скорость достигли своих стационарных значений, развитие структур завершилось, производство информации прекратилось, энергия, поступащая извне, в точности компенсирует энергию, рассеиваемую системой во внешнюю среду. (Заметим, что в синергетике понятия структуры и информации взаимозависимы [7].)

Итак, открытая система, элементы которой находятся в ограниченном пространстве и, взаимодействуя друг с другом, непрерывно потребляют энергию извне, может с течением времени усиливать имеющиеся внутренние различия, порождая непредсказуемую информацию путем развития старых и создания все новых и новых структур. Это свойство широко представлено в живой природе, у которой смена поколений равносильна возврату к началу, т.е. в точку x_0 в детерминированном законе (8). Малейшие отклонения от нормы в структуре клетки будут возрастать при каждом акте деления, в каждом новом поколении. Сколь бы незначительными не были первичные различия, спустя время t_1, или число поколений k (см. неравенства (6), (9) или рис. 2), они приведут к существенным изменениям, делающим особи неузнаваемыми. Именно это обстоятельство привело к огромному разнообразию жизненных форм на Земле, которые множатся и развиваются благодаря энергии Солнца, непрерывно поступающей на Землю в течение миллиардов лет. И все это многообразие обязано существованию детерминированного закона эволюции, наличие которого обнаруживается в геологических отложениях, в палеонтологии, биологии, генетике, ищется с помощью ускорителей и коллайдеров. По следам, оставленным в разных науках, этот закон должен быть расшифрован. Надежду на это дает описанный выше пример, когда по последовательности отсчетов, приведенных на рис. 2, был найден способ определения детерминированного закона эволюции (8).

Заключение

Во многих книгах и учебных пособиях треугольное отображение используют как пример простой динамической системы, демонстрирующей хаотическое поведение. Но, быть может, правильнее считать, что за хаос нами принимается информация, постоянно генерируемая эволюционирующей открытой системой, абстрактной математической моделью которой и является треугольное отображение. И тогда континуум иррациональных чисел отражает, помимо прочего, и те бесконечные изменения, которые происходят во множестве необратимых процессов, протекающих в необратимо расширяющейся Вселенной.

Список литературы

[1] *Пригожин И.Р.* Конец определенности. Время, хаос и новые законы природы. Ижевск: РХД. 1999. 216 с.

[2] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.

[3] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.

[4] *Хакен Г.С.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.

[5] *Хакен Г.С.* Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 419 с.

[6] *Николис Г., Пригожин И.Р.* Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядочению через флуктуации. М.: Мир, 1979. 342 с.

[7] *Усыченко В.Г.* Электронная синергетика. Физические основы самоорганизации и эволюции материи. СПб.—М.— Краснодар: Лань, 2010. 240 с.