Журнал технической физики, 2011, том 81, вып. 7

01

Особенности решений уравнения теплопереноса в производных дробного порядка

© Р.П. Мейланов, М.Р. Шабанова

Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра РАН,
367030 Махачкала, Россия
e-mail: lanten50@mail.ru

(Поступило в Редакцию 15 августа 2008 г. В окончательной редакции 29 ноября 2010 г.)

Исследуются особенности решений уравнения теплопроводности в производных дробного порядка с учетом диффузионного и конвективного механизмов переноса тепла. Рассмотрены одномерные случаи бесконечной прямой, полуограниченной прямой и задача без начальных условий.

1. Введение

Повышенный интерес к исследованию процессов переноса в сложных средах на основе математического аппарата интегродифференцирования дробного порядка [1,2] вызван рядом обстоятельств. С математической точки зрения это связано с тем, что производные дробного порядка, представляя определенное сочетание операций дифференцирования и интегрирования, дают новый подход к нелокальным дифференциальным уравнениям. Интерпретация производных дробного порядка как способ учета эффектов памяти (нелокальность по времени) и пространственных корреляций (нелокальность по координатам) привела к их широкому применению в естествознании [3–6]. Эффекты памяти и пространственных корреляций существенны для многих реальных объектов, обладающих сложной пространственной структурой и многофазным составом. К таким системам, в частности, относятся среды с фрактальной структурой, для которых характрно наличие развитой межфазной границы с чем, собственно, и связано невыполнение принципа локальной равновесности и необходимоть привлечения представлений геометрии дробной размерности, имеющие свойства самоподобия.

Учет эффектов памяти (временна́я нелокальность) и пространственных корреляций (пространственная нелокальность), в рамках традиционных подходов приводят к появлению в дифференциальных уравнениях интегрального оператора, где его ядро несет информацию о природе нелокальности. Для решения таких уравнений интегральные операторы представляются в виде ряда дифференциальных операторов с возрастающим показателем порядка дифференцирования и при наличии малого параметра ограничиваются несколькими членами ряда. В отсутствии малого параметра такой подход оказывается непродуктивным и, кроме того, полученные уравнения также не всегда удается решить. Например, в работе [7], где изучаются различные модели переноса тепла с учетом пространственно-временно́й нелокальности, предлагается следующая связь между тепловым потоком q и градиентом температуры ∇T:

$$q = -\tau_T \frac{\partial q}{\partial t} - \lambda \nabla T - l^2 \nabla^2 q, \tag{1}$$

где τ_T — время релаксации теплового фонона, l — характерный масштаб нелокальности, λ — коэффициент теплопроводности. Первое слагаемое в (1) описывает эффект памяти („инерционный“ член), последнее — учитывает пространственную нелокальность. Из соотношения (1) и закона сохранения энергии получается следующее уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} + \tau_T \frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial t^2} = a \nabla^2 T(r,t) - l^2 \frac{\partial \nabla^2 T(r,t)}{\partial t}. \tag{2}$$

Здесь $a = \lambda / c_p \rho$ — коэффициент температуропроводности, c_p — удельная изобарная теплоемкость, ρ — плотность вещества. В действительности соотношение (1) в общем случае содержит и производные более высоких порядков соответственно и уравнение (2) при этом усложняется.

В настоящее время можно считать установленным, что математический аппарат интегродифференцирования дробного порядка [1–4] представляет новый подход в описании процессов в системах, для которых существен учет нелокальных свойств по времени и пространству. В рамках математического аппарата интегродифференцирования дробного порядка удается не только более глубоко осознать известные данные, но и получить принципиально новые результаты [3–6,8–14]. В отличие от задач диффузии, которым посвящено большое количество работ, изучению процессов теплопереноса на основе уравнения теплопроводности в производных дробного порядка посвящено значительно меньше работ. В данной работе исследуются особенности решений уравнения теплопроводности в производных дробного порядка по времени и координатам.

Задача для бесконечной прямой

При исследовании теплопереноса используются уравнения параболического типа в производных дробного порядка [3,5,6,14]

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi,\tau)}{\partial\tau^\alpha} - D\frac{\partial^\beta}{\partial\xi^\beta}T(\xi,\tau) = 0. \tag{3}$$

Входящие в (3) производные дробного порядка определены следующим образом:

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi,\tau)}{\partial\tau^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^\tau \frac{T(\xi,z)}{(\tau-z)^\alpha}\,dz - \frac{T(\xi,0)}{\Gamma(1-\alpha)\tau^\alpha}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^\beta T(\xi,\tau)}{\partial\xi^\beta} = \frac{1}{2\Gamma(2-\beta)\cos\left(\frac{\pi}{2}(2-\beta)\right)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{T(\xi',\tau)}{|\xi-\xi'|^{\beta-1}}\,d\xi'. \tag{5}$$

Здесь $|\xi|<\infty$, $\tau>0$, $T(\xi,\tau)$ — температура, $D = at_0/x_0^2$ — безразмерный коэффициент температуропроводности, $0<\alpha\le 1.0<\beta\le 2$, $\tau=t/t_0$, $\xi=x/x_0$ — безразмерные время и координата, t_0, x_0 — характерные время и масштаб. Производная Капуто (4) учитывает память (нелокальность во времени), производная Рисса (5) — пространственные корреляции (пространственная нелокальность), $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Решение уравнения (3) подробно рассмотрено в работах [4,10]. По своей структуре уравнение (3) соответствует обобщению учета диффузионного механизма переноса тепла. Рассмотрим случай, когда учитывается конвективный механизм переноса, и уравнение теплопроводности в производных дробного порядка принимает вид

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi,\tau)}{\partial\tau^\alpha} - D\frac{\partial^\beta}{\partial\xi^\beta}T(\xi,\tau) + V\frac{\partial^\gamma}{\partial\xi^\gamma}T(\xi,\tau) = 0, \tag{6}$$

где

$$\frac{\partial^\gamma T(\xi,\tau)}{\partial\xi^\gamma} = \frac{1}{2\Gamma(1-\gamma)\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\gamma)\right)}\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{T(\xi',\tau)}{|\xi-\xi'|^\gamma}\,d\xi',$$

$$1<\beta\le 2.0<\gamma\le 1.$$

Здесь $V=\nu\frac{x_0}{t_0}$ — безразмерная скорость, ν — скорость конвективного потока среды. Для решения уравнения (6) используем преобразование Фурье по пространственной переменной

$$T_F(k,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,\exp(-ikx)T(x,\tau)$$

и преобразование Лапласа по временнóй переменной

$$T_{FL}(k,p) = \int\limits_0^\infty d\tau\,\exp(-p\tau)T_F(k,\tau).$$

Совершая преобразование Фурье и Лапласа, получим

$$T_{FL}(k,p) = \frac{T_F(k,0)}{p^{1-\alpha}\left(p^\alpha + D|k|^\beta - iV|k|^\gamma\operatorname{sign}(k)\right)}, \tag{7}$$

где $\operatorname{sign}(k)$ — знаковая функция. Для определения функции $T(\xi,\tau)$ представим (7) в виде ряда

$$T_{FL}(k,p) = \frac{T_F(k,0)}{p^{1-\alpha}\left(p^\alpha + D|k|^\beta - iV|k|^\gamma\operatorname{sign}(k)\right)} = T_F(k,0)\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{\left(D|k|^\beta - iV|k|^\gamma\operatorname{sign}(k)\right)}{p^{1+\alpha n}}.$$

Заметим, что оригиналом функции $p^{-1-\alpha n}$ является функция $\frac{t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+1)}$, тогда имеем:

$$T_F(k,\tau) = T_F(k,0)\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{\left(D|k|^\beta\tau^\alpha - iV|k|^\lambda\right)^n}{\Gamma(\alpha n+1)} = T_F(k,0)E_{\alpha,1}\left(-(D|k|^\beta - iV|k|^\gamma\operatorname{sign}(k))\tau^\alpha\right).$$

Здесь

$$E_{\alpha,\nu}(-z^\alpha) = \sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{z^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+\nu)}$$

— функция Миттаг-Леффлера [1]. Совершая обратное преобразование Фурье, получим

$$T(\xi,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi'\exp\left(-ik(\xi-\xi')\right)T(\xi',0) \times E_{\alpha,1}\left(-(D|k|^\beta - iV|k|^\gamma\operatorname{sign}(k))\tau^\alpha\right). \tag{8}$$

Заметим, что решение (8) при $V=0$ совпадает с решением, полученным в [10]. Для сравнения решения (8) с известными результатами рассмотрим случай, когда начальное условие задается в виде [15] $T(\xi,0)=T_0[1-H(\xi)]$, где $H(\xi)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Рассматривая случай $\alpha=1$ выражение (8) можно преобразовать к виду

$$T(\xi,\tau) = \frac{T_0}{\pi}\int\limits_0^\infty dk\int\limits_0^\infty d\xi'\cos\left(k(\xi+\xi') - V\tau k^\gamma\right)\exp(-D\tau k^\beta).$$

Полагая далее, что $\beta=2$, $\gamma=1$, получим

$$T(\xi,\tau) = \begin{cases}\frac{T_0}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi-V\tau}{2\sqrt{D\tau}}\right), & \xi\ge V\tau;\\ \frac{T_0}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{V\tau-\xi}{2\sqrt{D\tau}}\right)\right], & \xi<V\tau.\end{cases} \tag{9}$$

Решение (9) совпадает с ранее известным решением [15]. Полагая $\alpha = 1$, $\beta \to 1$, $\gamma = 1$, получим новый класс решений:

$$T(\xi, \tau) \to \begin{cases} \frac{T_0}{2}\left[1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi - V\tau}{D\tau}\right)\right], & \xi \geq V\tau; \\ \frac{T_0}{2}\left[1 + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{V\tau - \xi}{D\tau}\right)\right], & \xi < V\tau. \end{cases}$$

В случае дельта-источника, когда $T(\xi, 0) = T_0\delta(\xi)$ из (8) получим

$$T(\xi, \tau) = \frac{T_0}{2\pi}\int_0^\infty dk\Big\{\exp(-ik\xi)E_{\alpha,1}\big(-(Dk^\beta - iVk^\gamma)\tau^\alpha\big)$$

$$+\exp(ik\xi)E\big(-(Dk^\beta + iVk^\gamma)\tau^\alpha\big)\Big\}. \qquad (10)$$

Если $\alpha = 1$, то (10) дает

$$T(\xi, \tau) = \frac{T_0}{\pi}\int_\pi^\infty dk\cos(k\xi - Vk^\gamma\tau)\exp(-Dk^\beta\tau). \qquad (11)$$

Полагая в (11) $\beta = 2$, $\gamma = 1$, получим

$$T(\xi, \tau) = \frac{T_0}{\sqrt{4\pi D\tau}}\exp\left(-\frac{(\xi - V\tau)^2}{4D\tau}\right).$$

Если же в (11) положить $\gamma = 1$ и $\beta \to 1$, то имеем

$$T(\xi, \tau) \to \frac{T_0}{\pi}\,\frac{D\tau}{(\xi - V\tau)^2 + (D\tau)^2}.$$

Как видно, зависимость температуры от координаты при изменении производной по координате от значения $\beta = 2$ до $\beta = 1$ меняется от экспоненциального характера до степенного. Именно степенной характер зависимости физических величин от координаты и характерен системам, для которых важны эффекты памяти и корреляций.

Задача для полуограниченной прямой

Рассмотрим задачу для полупространства, когда $0 < \xi < \infty$, $\tau > 0$. В этом случае уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi, \tau)}{\partial\tau^\alpha} - D\,\frac{\partial^\beta T(\xi, \tau)}{\partial\xi^\beta} = 0 \qquad (12)$$

с граничным условием $T(0, \tau) = \mu(\tau)$. Однако производная Рисса определена на полупрямой и задается выражением [1]

$$\frac{\partial^\beta T(\xi, \tau)}{\partial\xi^\beta} = \frac{1}{2\Gamma(2-\beta)\cos\left(\frac{\pi}{2}(2-\beta)\right)}\,\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\int_0^\infty \frac{T(\xi', \tau)}{|\xi - \xi'|^{\beta-1}}\,d\xi'.$$

Решение задачи разделим, как и в [16], на две части. Необходимо найти решение уравнения (12) в виде суммы $T(\xi, \tau) = T_1(\xi, \tau) + T_2(\xi, \tau)$, где $T_1(\xi, \tau)$ и $T_2(\xi, \tau)$ удовлетворяют краевым условиям $T_1(\xi, 0) = \psi(\xi)$, $T_1(0, \tau) = 0$; $T_2(\xi, 0) = 0$, $T_2(0, \tau) = \mu(\tau)$.

Для нахождения $T_1(\xi, \tau)$ используем метод продолжения задачи полупространства на полное пространство [16]. Предварительно заметим, что если функция $\psi(\xi) = -\psi(-\xi)$, то функция

$$U(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^\infty dk\int_{-\infty}^\infty d\xi'\exp\big(-ik(\xi - \xi')\big)\psi(\xi')E_{\alpha,1}(-D|k|^\beta\tau^\alpha)$$

обращается в нуль для значения $\xi = 0$. Рассмотрим вспомогальную задачу: определим функцию $U(\xi, \tau)$ для $|\xi| < \infty$, удовлетворяющую уравнению (3) с краевыми условиями $U(0, \tau) = 0$, $U(\xi, 0) = \psi(\xi)$ для $\xi > 0$. Такое решение можно определить с помощью функции

$$\Psi(\xi) = \left\{\begin{matrix} \psi(\xi), & \xi > 0 \\ -\psi(-\xi), & \xi < 0 \end{matrix}\right\},$$

так что решение уравнения (3) имеет вид

$$U(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dk$$

$$\times\int_{-\infty}^\infty d\xi'\exp\big(-ik(\xi - \xi')\big)\Psi(\xi')E_{\alpha,1}(-D|k|^\beta\tau^\alpha).$$

Рассмотрим $U(\xi, \tau)$ только в области $\xi \geq 0$, где $U(\xi, \tau) = T_1(\xi, \tau)$. Имеем

$$U(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dk\int_{-\infty}^\infty d\xi'\exp\big(-ik(\xi - \xi')\big)$$

$$\times\ \Psi(\xi')E_{\alpha,1}(-D|k|^\beta\tau^\alpha)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty dk\int_{-\infty}^\infty d\xi'\sin(k\xi)\sin(k\xi')\psi(\xi')E_{\alpha,1}(-D|k|^\beta\tau^\alpha).$$

Таким образом, искомое решение $T_1(\xi, \tau)$ задается выражением

$$T_1(\xi, \tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk\int_0^\infty d\xi'\psi(\xi')\sin(k\xi)\sin(k\xi')E_{\alpha,1}(-Dk^\beta\tau^\alpha). \qquad (13)$$

Для определения $T_2(\xi, \tau)$ рассмотрим (13), в котором $\psi(\xi) = T_0$, получим

$$T_1(\xi, \tau) = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^\infty dk\,\frac{\sin(k\xi)}{k}\,E_{\alpha,1}(-Dk^\beta\tau^\alpha). \qquad (14)$$

Если начальное условие задать при $\tau = \tau_0\big(T_1(\xi, \tau_0)\big)$, то решение (14) можно записать в виде

$$T_1(\xi,\tau) = \frac{2T_0}{\pi}\int\limits_0^\infty dk\,\frac{\sin(k\xi)}{k}\,E_{\alpha,1}\big(-Dk^\beta(\tau-\tau_0)^\alpha\big).$$

Найдем функцию $T_2(\xi, \tau)$. Функция

$$\bar T(\xi,\tau) = \frac{2\mu_0}{\pi}\int\limits_0^\infty dk\,\frac{\sin(k\xi)}{k}\,E_{\alpha,1}\big(-Dk^\beta(\tau-\tau_0)^\alpha\big)$$

является решением уравнения (12), удовлетворяющим условиям $\bar T(\xi,\tau_0) = \mu_0$, $\bar T(0,\tau) = 0$. Функция

$$\bar{\bar T}(\xi,\tau) = \mu_0\left(1 - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dk\,\frac{\sin(k\xi)}{k}\,E_{\alpha,1}\big(Dk^\beta(\tau-\tau_0)^\alpha\big)\right)$$

$$= \mu_0\,U(\xi,\tau-\tau_0)$$

является решением уравнения (12) с краевыми условиями $\bar{\bar T}(\xi,\tau) = 0$, $\bar{\bar T}(0,\tau) = \mu_0$ в случае $\tau > \tau_0$. В случае переменного граничного условия $T_2(0,\tau) = \mu(\tau)$ решение $T_2(\xi,\tau)$ в соответствии с принципом Дюамеля [16] можно представить в виде

$$T_2(\xi,\tau) = \int\limits_0^\tau \frac{\partial}{\partial\tau}\,U(\xi,\tau-\tau')\mu(\tau')d\tau'. \qquad (15)$$

Учитывая соотношения

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\,U(\xi,\tau-\tau')$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dk\,\frac{\sin(k\xi)}{k}\,\frac{\partial}{\partial\tau}E_{\alpha,1}\big(-Dk^\beta(\tau-\tau')^\alpha\big),$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\,E_{\alpha,1}\big(-Dk^\beta(\tau-\tau')^\alpha\big)$$

$$= -Dk^\beta(\tau-\tau')^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\big(-Dk^\beta(\tau-\tau')^\alpha\big),$$

в (15) получим следующее выражение для $T_2(\xi,\tau)$:

$$T_2(\xi,\tau) = \frac{2D}{\pi}\int\limits_0^\infty dk\int\limits_0^\tau d\tau'\,\frac{\sin(k\xi)}{k^{1-\beta}}\,\mu(\tau-\tau')\tau'^{\alpha-1}$$

$$\times E_{\alpha,\alpha}(-Dk^\beta\tau'^\alpha). \qquad (16)$$

Окончательное искомое решение задачи (12) с учетом (13,16) принимает вид

$$T(\xi,\tau) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dk\int\limits_0^\infty d\xi'\psi(\xi')\sin(k\xi)\sin(k\xi')E_{\alpha,1}(-Dk^\beta\tau^\alpha)$$

$$+\frac{2D}{\pi}\int\limits_0^\infty dk\int\limits_0^\tau d\tau'\,\frac{\sin(k\xi)}{k^{1-\beta}}\,\mu(\tau-\tau')\tau'^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-Dk^\beta\tau'^\alpha). \qquad (17)$$

Отметим, что при $\beta = 2$ (17) совпадает с ранее полученным решением [13,14]. Для сравнения (17) с известными решениями рассмотрим случай, когда начальное условие постоянное: $\mu(\tau) = \tilde T_0$. Полагая, что $\alpha = 1$, $\beta = 2$, получим

$$T(\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D\tau}}\int\limits_0^\infty d\xi'\left[\exp\left(-\frac{(\xi-\xi')^2}{4D\tau}\right)\right.$$

$$\left.-\exp\left(-\frac{(\xi+\xi')^2}{4D\tau}\right)\right]\psi(\xi') + \tilde T_0\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{D\tau}}\right)\right), \qquad (18)$$

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x \exp(-z^2)dz$. Первое слагаемое соответствует известному решению для задачи с нулевым граничным условием (16). Отметим, что при $\xi = 0$ первое слагаемое в (18) обращается в ноль. Второе слагаемое соответствует задаче с нулевым начальным условием [15]. Для случая $\alpha = 1$, $\beta \to 1$ имеем

$$T(\xi,\tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\xi'\left[\frac{D\tau}{(\xi-\xi')^2 + (D\tau)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{D\tau}{(\xi+\xi')^2+(D\tau)^2}\right]\psi(\xi') + \tilde T_0\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{D\tau}\right)\right). \qquad (19)$$

Как видно, новый класс решений (19) отличается своим поведением для больших значений времен. Асимптотическое поведение решений (18) и (19) меняется от экспоненциального характера до степенного. Если в (17) положить $\psi(\xi') = T_0$, $\mu(\tau) = \tilde T_0$, получим следующее выражение:

$$T(\xi,\tau) = \tilde T_0 + \frac{2}{\pi}\,(T_0 - \tilde T_0)$$

$$\times\int\limits_0^\infty dk\,\frac{\sin(k\xi)}{k}\,E_{\alpha,1}(-Dk^\beta\tau^\alpha). \qquad (20)$$

При $\alpha = 1$, $\beta = 2$ решение (20) дает $T(\xi,\tau) = \tilde T_0 + (T_0 - \tilde T_0)\operatorname{erf}\big(\frac{\xi}{2\sqrt{D\tau}}\big)$, что совпадает с традиционным решением [17]. В остальных случаях $(0 < \alpha < 1)$ имеет новый класс решений.

Задача без начальных условий

Рассмотрим важную для прикладных аспектов задачу без начальных условий. Особенность применения математического аппарата интегродифференцирования дробного порядка в том, что в зависимости от решаемой задачи необходимо применить соответствующую производную дробного порядка. Если для рассматриваемой задачи необходимо учесть начальные условия, то производная по времени используется в виде Капуто (4). В случае задачи без начальных условий, когда начальное условие не влияет на распределение температуры в момент наблюдения, ставится задача нахождения решения обобщенного уравнения теплопроводности, удовлетворяющего граничному условию одного из трех типов, заданных для всех $\tau > -\infty$. В этих условиях в обобщенном уравнении теплопроводности (12) необходимо использовать производную Лиувилля [1]

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi,\tau)}{\partial\tau^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\frac{T(\xi,z)}{(z-z)^\alpha}\,dz.$$

Уравнение теплопроводности для задачи без начальных условий (рассматривается случай $\beta = 2$) принимает вид

$$\frac{\partial^\alpha T(\xi,\tau)}{\partial\tau^\alpha} - D\,\frac{\partial^2 T(\xi,\tau)}{\partial\xi^2} = 0, \qquad (21)$$

где $0 < \xi < \infty$, $\tau > -\infty$. Рассмотрим случай граничного условия первого типа $T(0,\tau) = \varphi(\tau)$. Совершая в (21) преобразования Фурье по временнóй переменной и синус-преобразование по координатной переменной, получим следующее выражение для образа функции:

$$T_{SF}(k,\omega) = Dk\,\frac{\varphi_F(\omega)}{Dk^2 + (i\omega)^\alpha}. \qquad (22)$$

Здесь

$$\varphi_F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\,\exp(-i\omega\tau)\varphi(\tau).$$

Совершая обратное преобразование Фурье и обратное синус-преобразование из (22), получим

$$T(\xi,\tau) = \frac{2D}{\pi}\int\limits_0^\infty dk\,k\sin(k\xi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\exp(i\omega\tau)\frac{\varphi_F(\omega)}{Dk^2 + (i\omega)^2}. \qquad (23)$$

Рассмотрим по аналогии в работе [16] случай, когда $\varphi(\tau) = \tilde{T}_0\cos(\Omega\tau)$. Тогда, поскольку $\varphi_F(\omega) = \pi\tilde{T}_0[\delta(\omega+\Omega) + \delta(\omega-\Omega)]$, уравнение (23) принимает вид

$$T(\xi,\tau) = \tilde{T}_0\left[\cos(\Omega\tau)I_1(\xi,\alpha) + \cos\left(\Omega\tau - \frac{\pi}{2}\alpha\right)I_2(\xi,\alpha)\right]. \qquad (24)$$

Интегралы I_1, I_2 определены следующим образом:

$$I_1(\xi,\alpha) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dz\,\sin\left(\xi\sqrt{\frac{\Omega^\alpha z^2}{D}}\right)\frac{z^3}{z^4 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)z^2 + 1}, \qquad (25)$$

$$I_2(\xi,\alpha) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dz\,\sin\left(\xi\sqrt{\frac{\Omega^\alpha z^2}{D}}\right)\frac{z}{z^4 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)z^2 + 1}. \qquad (26)$$

Расчет интегралов (25), (26) приводит к результату

$$I_1(\xi,\alpha) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dz\,\sin\left(\xi\sqrt{\Omega^\alpha/D}\,z\right)\frac{z^3}{z^4 + 2\cos(\pi\alpha/2)z^2 + 1}$$
$$= \exp\left(-\xi\sqrt{\Omega^\alpha/D}\cos(\pi\alpha/4)\right)\Big[\cos\left(\xi\sqrt{\Omega^\alpha/D}\sin(\pi\alpha/4)\right)$$
$$+ \sin\left(\xi\sqrt{\Omega^\alpha/D}\,\sin(\pi\alpha/4)\right)\operatorname{ctg}(\pi\alpha/2)\Big],$$

$$I_2(\xi,\alpha) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dz\,\sin\left(\xi\sqrt{\Omega^\alpha/D}z\right)\frac{z}{z^4 + 2\cos(\pi\alpha/2)z^2 + 1}$$
$$= \frac{1}{\sin(\pi\alpha/2)}\exp\left(-\xi\sqrt{\Omega^\alpha/D}\cos(\pi\alpha/4)\right)$$
$$\times\sin\left(\xi\sqrt{\Omega^\alpha/D}\sin(\pi\alpha/4)\right)$$

и выражение (24) принимает вид

$$T(\xi,\tau) = \tilde{T}_0\exp\left(-\xi\sqrt{\Omega^\alpha/D}\cos(\pi\alpha/4)\right)$$
$$\times\cos\left(\Omega\tau - \xi\sqrt{\Omega^\alpha/D}\,\sin(\pi\alpha/4)\right). \qquad (27)$$

При $\alpha = 1$ решение (27) переходит в известное решение [16]:

$$T(\xi,\tau) = \tilde{T}_0\exp\left(-\xi\sqrt{\Omega/2D}\right)\cos\left(\Omega\tau - \xi\sqrt{\Omega/D}\right). \qquad (28)$$

Как видно из (27) и (28), учет эффектов памяти приводит к перенормировке характерного масштаба затухания и времени запаздывания температурных волн. Для характерного масштаба затухания температурных волн имеем $l = x_0/\left(\sqrt{2}\cos(\pi\alpha/4)\right)$, где $x_0 = \sqrt{2a^2/\omega}$ характерный масштаб затухания при отсутствии учета эффектов памяти (случай $\alpha = 1$). Для характерного времени запаздывания температурных волн имеем: $\tau_3 = \tau_0\sqrt{2}\sin(\pi\alpha/4)$, где $\tau_0 = x\sqrt{1/(\omega a^2)}$ — время запаздывания без учета эффектов памяти. При $\alpha < 1$ характерные длина затухания и время запаздывания уменьшаются: $l < x_0$, $\tau_3 < \tau_0$.

Заключение

Описание процессов переноса тепла на основе дифференциальных уравнений дробного порядка позволяет естественным образом учесть пространственную и временную нелокальности. Дифференциальные уравнения в производных дробного порядка имеют более широкий, зависящий от трех параметров α, β и γ, класс решений. В частном случае ($\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$) полученные решения совпадают с ранее известными решениями. В остальных случаях мы имеем новый класс решений, асимптотическое поведение которых качественно отличается от ранее известных решений. Важно то, что функциональный вид полученных решений определяется значениями показателей производных дробного порядка α, β и γ, и, тем самым, они становятся новыми параметрами теории для интерпретации экспериментальных данных.

Список литературы

[1] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
[2] *Oldham K.B., Spanie J.* The fractional calculus. NY. 1974. 234 p.
[3] *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
[4] *Kilbas A.A., Srivastave H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. North Holland, Amsterdam: Elsevier 2006.
[5] *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во „Артишок“, 2008. 512 с.
[6] *Бабенко Ю.И.* Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена: СПб: НПО „Профессионал“, 2009. 584 с.
[7] *Соболев С.Л.* // УФН. 1997. Т. 167. № 10. С. 1095–1106.
[8] *Чукбар К.В.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. № 5. С. 1875–1884.
[9] *Мейланов Р.П.* // ИФЖ. 2001. Т. 74. № 2. С. 34–37.
[10] *Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G.* // Fractal calculation and applied analysis. 2001. Vol. 4. N 2. P. 153–192.
[11] *Мейланов Р.П., Янполов М.С.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. № 1. С. 67–73.
[12] *Мейланов Р.П., Свешникова Д.А., Шабанов О.М.* // ЖФХ. 2003. Т. 77. № 2. С. 260–264.
[13] *Mainardi F.* // Chaos, Solitons and Fractals. 1996. Vol. 7. P. 1461–1469.
[14] *Liu Junyi, Xu Mingyu* // J. Math. Appl. 2009. Vol. 351. P. 536–542.
[15] *Фарлоу С.* Уравнения в частных производных. М.: Мир, 1985. 382 с.
[16] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
[17] *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.