

## Переменяющееся поведение на границе синхронизации временных масштабов

© М.О. Журавлев, А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет,  
410012 Саратов, Россия  
e-mail: pifos@bk.ru

(Поступило в Редакцию 12 мая 2010 г. В окончательной редакции 8 октября 2010 г.)

Исследовано переменяющееся поведение, наблюдающееся на границе синхронных временных масштабов взаимодействующих хаотических осцилляторов, находящихся в режиме синхронизации временных масштабов. На основе анализа статистических характеристик (распределений длительности ламинарных участков поведения, зависимости средней длительности ламинарного участка от параметра надкритичности) установлено, что выявленный тип переменяющегося поведения является переменяемостью кольца.

### Введение

Синхронизация хаотических колебаний представляет собой одно из фундаментальных явлений, наблюдающихся в широком классе объектов природы и техники, и привлекает пристальное внимание исследователей [1,2]. Интерес к этому феномену связан как с большим фундаментальным значением исследования [1], так и с широким кругом практических приложений, например, при скрытой передаче информации [3,4], в биологических, химических, физических задачах [5], при управлении хаосом, в том числе в системах СВЧ электроники [6,7].

В настоящее время выявлено несколько типов синхронного поведения однонаправленно и взаимно связанных динамических систем, таких как фазовая синхронизация [8], обобщенная синхронизация [9], синхронизация с запаздыванием [10], полная синхронизация [11], синхронизация временных масштабов [12] и др., каждый из которых обладает своими специфическими особенностями и методами диагностики.

Особый интерес в исследовании синхронной динамики хаотических систем направлен на изучение состояний, предшествующих синхронизации. В настоящее время существует большое количество работ (см., например [13]), в которых установлено, что переход от синхронного режима к асинхронному осуществляется, как правило, через переменяющееся поведение, наблюдаемое вблизи границы синхронизации [10,14]. Кроме того, известно, что каждому из типов синхронизации предшествуют свой определенный тип переменяемости. Переменяемость является важным явлением, наблюдаемым в нелинейных системах, в частности, одним из универсальных сценариев перехода от периодических движений к хаотическим [15,16]. В настоящее время существует определенная классификация переменяющегося поведения, в частности, выделяют переменяющиеся типов I–III [5,7], on-off-переменяемость [18–20], переменяемость „угольного ушка“ [21], переменяемость кольца [13] и др. Все эти типы переменяемости наблюдаются в различных физических и биологических системах [10,22].

Из известных типов синхронного поведения особый интерес для изучения представляет синхронизация временных масштабов [12]. Этот тип синхронной хаотической динамики позволяет рассматривать с единых позиций все типы хаотической синхронизации, перечисленные выше. Более того, он может быть диагностирован даже в тех случаях, когда детектирование других типов синхронного поведения оказывается проблематичным (например, диагностирование режима фазовой хаотической синхронизации в случае фазово-некогерентного аттрактора [23]), что делает его широко распространенным и важным в различных практических приложениях. Важно также отметить широкие возможности диагностики хаотической синхронизации с помощью метода синхронизации временных масштабов в случае многомасштабного хаоса.

Синхронизация временных масштабов основана на анализе поведения рассматриваемых систем на различных временных масштабах, вводимых в рассмотрение с помощью непрерывного вейвлетного преобразования с комплексным базисом [24]. В этом случае, если для временных реализаций, порождаемых рассматриваемыми системами, можно найти такой диапазон временных масштабов, для которого наблюдается синхронное поведение, то такой режим называется синхронизацией временных масштабов [12]. Представляет значительный интерес изучение переменяющегося поведения на границе синхронизации временных масштабов, так как понимание данных явлений позволит более глубоко понять механизмы установления данного типа хаотической синхронизации в связанных системах.

В работе рассматривается поведение однонаправленно связанных систем Ресслера на границе синхронных и асинхронных временных масштабов<sup>1</sup>. При изменении масштаба наблюдения в этом случае происходит смена наблюдаемого типа поведения с синхронного на

<sup>1</sup> В режиме синхронизации временных масштабов (при фиксированном наборе значений управляющих параметров) на разных временных масштабах наблюдения может наблюдаться как синхронная, так и асинхронная динамика [12].

асинхронный, или наоборот. Методика выделения значений длительности ламинарных и турбулентных фаз для данного случая была разработана, апробирована и описана в [25]. В настоящей работе рассмотрен вопрос о том, каким закономерностям подчиняется такая смена поведения, что обеспечивает понимание механизмов перехода от синхронного поведения к асинхронному в режиме синхронизации временных масштабов.

## 1. Синхронизация временных масштабов

Концепция синхронизации временных масштабов [12] основана на введении непрерывного множества фаз исследуемых сигналов связанных хаотических систем с помощью непрерывного вейвлетного преобразования временной реализации  $x(t)$

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt, \quad (1)$$

где  $\psi_{s, t_0}(t)$  — вейвлетная функция, получаемая из материнского вейвлета  $\psi_0(t)$

$$\psi_{s, t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - t_0}{s}\right). \quad (2)$$

Временной масштаб  $s$  определяет ширину вейвлета  $\psi_{s, t_0}(t)$  — временной сдвиг вейвлетной функции вдоль оси времени, символ „\*“ в соотношении (1) означает комплексное сопряженное.

В качестве материнского вейвлета в соответствии с работой [12] используется вейвлет Морле [26]

$$\psi_0(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\omega_0 \eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right). \quad (3)$$

Выбор значения параметра вейвлета  $\omega_0 = 2\pi$  обеспечивает соотношение  $s \approx 1/f$  между временным масштабом  $s$  вейвлетного преобразования и частотой  $f$  преобразования Фурье.

Вейвлетный спектр

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| e^{j\varphi_s(t_0)} \quad (4)$$

характеризует поведение изучаемой системы на каждом временном масштабе  $s$  в любой момент времени  $t_0$ . При этом величина  $|W(s, t_0)|$  характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба  $s$  в момент времени  $t_0$ . Одновременно для каждого временного масштаба  $s$  оказывается естественным образом определена непрерывная фаза  $\varphi_s(t) = \arg W(s, t)$ . Иначе говоря, оказывается возможным характеризовать поведение каждого временного масштаба  $s$  с помощью сопоставленной с ним фазы  $\varphi_s(t)$ , являющейся непрерывной функцией временного масштаба  $s$  и времени  $t$ . Введенное таким образом в рассмотрение семейство

фаз наиболее полно характеризует поведение связанных систем: возможно описать поведение системы на каждом временном масштабе с помощью ассоциированной с ним фазы  $\varphi_s(t)$ .

Рассмотрим поведение двух связанных хаотических осцилляторов, порождающих временные реализации  $x_{1,2}(t)$ . Если для таких систем можно найти интервал временных масштабов  $s_l \leq s \leq s_h$ , для которого выполняется условие захвата фаз

$$|\varphi_{s1}(t) - \varphi_{s2}(t)| < \text{const}, \quad (5)$$

и условие ненулевой энергии (доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на данный интервал временных масштабов, оказывается отличной от нуля)

$$E_{\text{snhr}} = \int_{s_l}^{s_h} \langle E(t) \rangle ds > 0, \quad (6)$$

то такой режим называется синхронизацией временных масштабов.

Как отмечалось выше, все остальные известные типы синхронного поведения (фазовая синхронизация, обобщенная синхронизация, синхронизация с запаздыванием, полная синхронизация) могут быть рассмотрены как частные проявления синхронизации временных масштабов. Действительно, в случае классической синхронизации периодических осцилляторов синхронное поведение будет наблюдаться на всех временных масштабах (в силу определения вейвлетного преобразования (1), временного масштаба  $s$ , ассоциированной с ним непрерывной фазы  $\varphi_s(t)$  и самого определения режима синхронизации временных масштабов). В случае хаотических колебаний ситуация оказывается сложнее. Тем не менее, если два хаотических осциллятора находятся в одном из вышеперечисленных режимов хаотической синхронизации, то в этом случае для временных реализаций  $x_{1,2}(t)$ , порождаемых этими осцилляторами, обязательно существует диапазон синхронных временных масштабов (см. подробнее [12]). Для данного диапазона будет выполняться условие захвата фаз (7) и ненулевой энергии (8) и соответственно реализовываться режим синхронизации временных масштабов. Для того чтобы диагностировать режим синхронизации временных масштабов, необходимо проверить выполнение условий (5) и (6) для некоторого диапазона временных масштабов.

В то же время на временных масштабах  $s$ , лежащих вне указанного диапазона  $s_l \leq s \leq s_h$ , условие захвата фаз (5) выполняться не будет. На этих масштабах наблюдения интервалы времени, характеризующиеся синхронной динамикой, будут прерываться участками, где разность фаз достаточно резко изменяется на величину порядка  $2\pi$ . Иными словами, на таких временных масштабах будет наблюдаться перемежающееся поведение, причем временной масштаб  $s$ , на котором осуществляется наблюдение, выступает в качестве критического параметра, от которого зависят характеристики перемежаемости. По мере приближения масштаба наблюдения  $s$  к диапазону синхронных временных

масштабов  $[s_l; s_h]$  длительность участков ламинарного поведения будет увеличиваться (и стремиться к бесконечности при  $s \rightarrow s_l - 0$  и  $s \rightarrow s_h + 0$ ), в то время как количество турбулентных участков будет уменьшаться (и соответственно стремиться к нулю при  $s \rightarrow s_l - 0$  и  $s \rightarrow s_h + 0$ ).

Наличие переключающегося поведения на границе синхронных временных масштабов связанных хаотических осцилляторов в научной литературе ранее не описывалось. В настоящей работе впервые рассматривается вопрос о том, к какому типу переключаемости следует отнести данный тип динамики. Как будет показано ниже на примере двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера, в этом случае в системе реализуется переключаемость кольца [13].

## 2. Система двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера

Модельная система однонаправленных связанных осцилляторов Ресслера имеет вид:

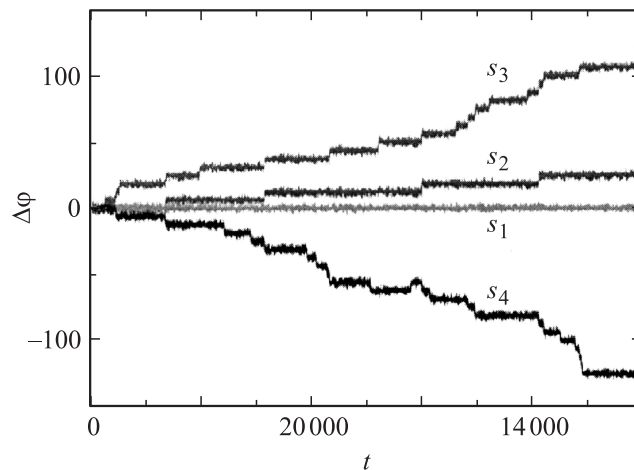
$$\begin{cases} \dot{x}_d = -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d = \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d = p + z_d(x_d - c), \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_r = -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r = \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r = p + z_r(x_r - c), \end{cases} \quad (8)$$

где  $(x_d, y_d, z_d)$   $[(x_r, y_r, z_r)]$  — безразмерные декартовы координаты ведущего [ведомого] осциллятора;  $\varepsilon$  — параметр, отвечающий за интенсивность связи. Система (7) является ведущей, а система (8) — ведомой. Значения управляющих параметров по аналогии с предыдущими исследованиями<sup>2</sup> [13,25,26] были выбраны следующими:  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10.0$ . Параметры  $\omega_d = 0.93$  и  $\omega_r = 0.95$  отвечают собственным частотам ведущей и ведомой подсистем соответственно. Следует отметить что, при указанных значениях управляющих параметров оба осциллятора в автономном режиме демонстрируют хаотические колебания.

При определенных значениях управляющих параметров в данной системе возникает режим фазовой хаотической синхронизации. Как уже было отмечено выше,

<sup>2</sup> Выбор значений управляющих параметров, совпадающих с использованными в более ранних работах, призван облегчить сопоставление материала, изложенного в разных статьях, и при необходимости провести не только качественное, но и количественное сопоставление приведенных результатов. В то же время необходимо отметить, что флуктуации выбранных значений управляющих параметров качественно не изменяют поведения анализируемой системы; в частности, режим переключаемости кольца, рассматриваемый в настоящей работе, наблюдается и при других значениях управляющих параметров.



**Рис. 1.** Зависимость разности фаз исследуемой системы от безразмерного времени  $t$  на различных временных масштабах при фиксированном значении параметра связи  $\varepsilon = 0.085$ , соответствующем режиму синхронизации временных масштабов, где значения временных масштабов равны:  $s_1 = 5.0$ ,  $s_2 = 4.9915$ ,  $s_3 = 4.9918$ ,  $s_4 = 8.2475$ .

фазовая хаотическая синхронизация является одним из частных случаев синхронизации временных масштабов, поэтому в случае режима фазовой синхронизации в рассматриваемой системе также будет диагностироваться режим синхронизации временных масштабов. При этом наряду с синхронными будут существовать и асинхронные временные масштабы, для которых не выполняются условия (5) и (6). При уменьшении параметра связи между осцилляторами ширина диапазона синхронных временных масштабов уменьшается, и при значениях параметра связи меньше критического  $\varepsilon_{PS}$ , соответствующего границе режима фазовой хаотической синхронизации, на всех временных масштабах наблюдается асинхронная динамика.

На рис. 1 показано поведение разности мгновенных фаз  $\Delta\varphi(s, t) = \varphi_d(s, t) - \varphi_r(s, t)$  исследуемых хаотических систем для разных временных масштабов при фиксированном параметре связи  $\varepsilon = 0.085$ , соответствующем режиму синхронизации временных масштабов. Из рисунка видно, что для временного масштаба  $s_l = 5.0$ , находящегося в диапазоне синхронных масштабов  $[s_l; s_h]$  ( $s_l = 4.9919$ ,  $s_h = 8.246$ ), разность фаз  $\Delta\varphi(s_l, t)$  с течением времени почти не изменяется и остается ограниченной. С другой стороны, для временных масштабов  $s_2 = 4.9915$ ,  $s_3 = 4.9918$  и  $s_4 = 8.2475$ , находящихся за пределами синхронного диапазона, разность фаз неограниченно возрастает (убывает), что свидетельствует об отсутствии синхронизма на данных масштабах. Для этих асинхронных временных масштабов зависимость  $\Delta\varphi(t)$  можно разделить на участки, где разность фаз оказывается ограниченной в пределах  $2\pi$  (ламинарная динамика), и участки, на которых наблюдается скачок фазы (турбулентная динамика).

Как уже отмечалось выше, подобный тип поведения, при котором в различные моменты времени система

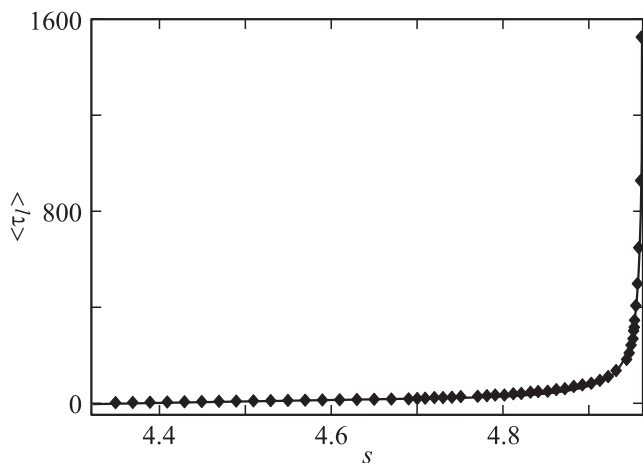
демонстрирует чередующиеся между собой режимы, называется перемежаемостью. Каждый тип перемежающегося поведения характеризуется своими законами распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности [13,26]. Как правило, на основании анализа данных характеристик можно делать вывод о типе перемежающегося поведения, наблюдающегося в том или ином случае.

### 3. Перемежаемость кольца для различных временных масштабов

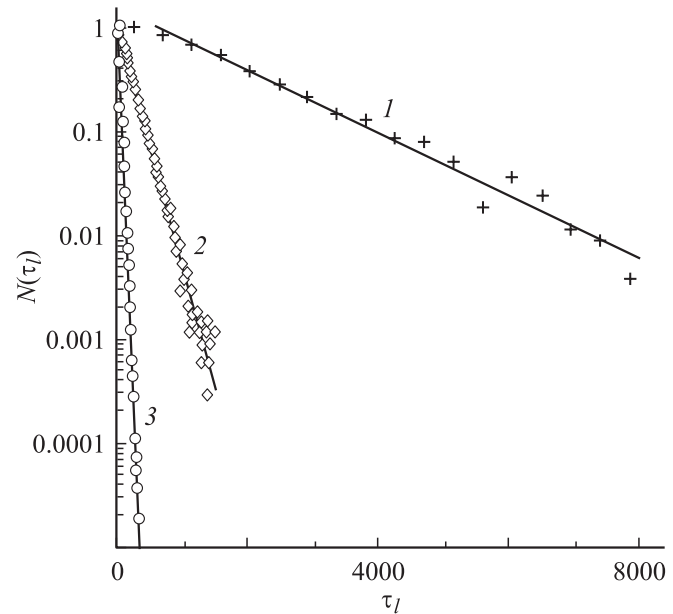
Изучим теперь количественные характеристики перехода от синхронной динамики к асинхронной при изменении временного масштаба. В ходе исследований этого перехода в качестве критического параметра выступает временной масштаб  $s$ .

Для определения типа перемежающегося поведения, реализуемого в исследуемой системе при переходе от синхронной динамики к асинхронной (или наоборот), рассматривалась зависимость средней длительности ламинарных участков поведения  $\langle \tau_l \rangle$  от параметра надкритичности. В качестве параметра надкритичности использовалась величина  $(s_c - s)$ , где  $s_c = 4.9919$  — значение временного масштаба, разграничивающего синхронные и асинхронные временные масштабы.

На рис. 2 показана найденная зависимость средней длительности ламинарных участков поведения  $\langle \tau_l \rangle$  от параметра надкритичности  $(s_c - s)$  при фиксированном значении параметра связи  $\varepsilon = 0.085$ . Длительность ламинарных участков определялась с помощью метода, предложенного в [27]. На этом же рисунке приведена теоретическая зависимость средней длительности ламинарных участков  $\langle \tau_l \rangle$  от параметра надкритичности,



**Рис. 2.** Зависимость средней длительности (в безразмерных единицах) ламинарных участков поведения от параметра надкритичности  $(s_c - s)$  (показана точками) и аппроксимирующая ее кривая (9)  $s_c = 4.9919$ ,  $s_l = 4.34$ ,  $T = 8$ .



**Рис. 3.** Распределение длительностей ламинарных участков поведения  $N(\tau_l)$  при различных значениях временного масштаба  $s$  (в безразмерных единицах), нормированные на максимальное значение (показаны символами) и соответствующие им экспоненциальные аппроксимации (10), показанные сплошными линиями: 1 — временной масштаб  $s = 4.9885$ , прямая линия соответствует соотношению  $N(\tau_l) = 1.518 \exp(-7 \cdot 10^{-4} \tau_l)$ ; 2 —  $s = 4.97$ ,  $N(\tau_l) = 0.961 \exp(-5 \cdot 10^{-3} \tau_l)$ ; 3 —  $s = 4.72$ ,  $N(\tau_l) = 1.004 \times \exp(-3 \cdot 10^{-2} \tau_l)$ .

характерная для перемежаемости кольца [13].

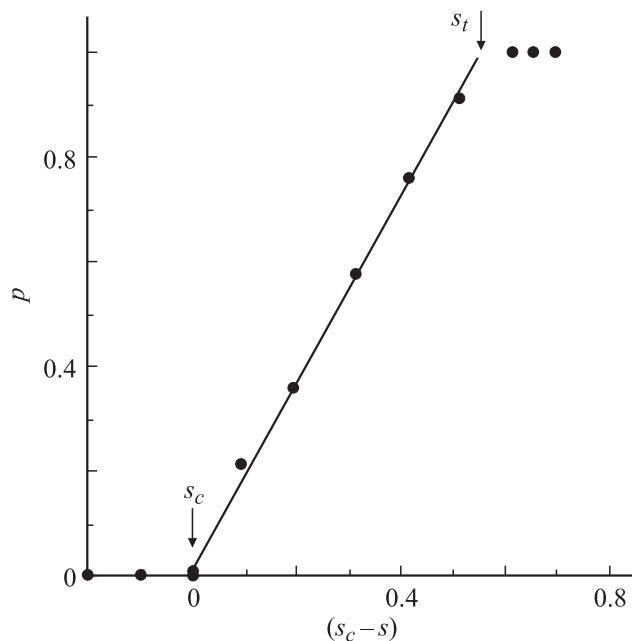
$$\langle \tau \rangle = T \left( 1 - \ln^{-1} \left( \frac{s - s_l}{s_c - s_l} \right) \right), \quad (9)$$

где  $s_c$  — значение, разграничивающее диапазон синхронных и асинхронных временных масштабов,  $s_l$  — значение временного масштаба, ограничивающего область перемежаемости кольца (см. подробнее [13]),  $T$  — значение средней длительности участка ламинарного поведения, которое наблюдается при  $s = s_l$ . Из рис. 2 видно, что численные данные, показанные точками, находятся в очень хорошем соответствии с теоретической зависимостью (9).

Еще одной важной характеристикой перемежающегося поведения, позволяющей в ряде случаев установить тип перемежаемости, является распределение длительности участков ламинарного поведения при фиксированных значениях управляющих параметров. Известно, что в случае перемежаемости кольца такое распределение подчиняется экспоненциальному закону [13].

$$N(\tau) \sim \exp(-\alpha\tau), \quad (10).$$

В ходе исследований было установлено, что распределение длительности ламинарных участков поведения при фиксированном значении параметра связи на разных временных масштабах является экспоненциальным



**Рис. 4.** Вероятность детектирования турбулентного участка поведения на временном интервале длительностью  $T$  (в безразмерных единицах), в зависимости от параметра надкритичности. Линией представлена соответствующая аппроксимация  $p = 1.78 \cdot (s_c - s) + 0.018$ .

(рис. 3), что также позволяет говорить о наличии перемежающегося поведения типа кольца. Механизмы, приводящие к возникновению перемежающегося поведения, в рассматриваемом случае также оказываются теми же, что и в случае перемежаемости кольца для взаимодействующих систем Ресслера [13] — на комплексной плоскости  $W(s, t)$ , отвечающей поведению ведомой системы, вращающейся вокруг начала координат в соответствии с фазой  $\varphi(s, t)$  ведомой системы, порог возникновения перемежающегося поведения проявляется в охвате фазовой траектории точки  $(0,0)$  (см. [13]).

Кроме приведенных характеристик для описания перемежаемости можно использовать также такую характеристику, как вероятность детектирования турбулентного участка поведения на временном интервале длительностью  $T$  в зависимости от параметра надкритичности. Данная вероятность может быть оценена по временной реализации длины  $L$  для любого временного масштаба по формуле

$$p = \frac{NT}{L}, \quad (11)$$

где  $L$  — длина временного ряда, на котором производится исследование,  $N$  — общее число участков ламинарного поведения на всей длине  $L$ .

На рис. 4 представлена зависимость вероятности  $p$  от параметра надкритичности  $(s_c - s)$ . Видно, что данная зависимость близка к линейной, что также свойственно для перемежаемости кольца и хорошо согласуется с известными результатами [13].

## Заключение

В работе рассмотрен тип поведения, наблюдающийся вблизи границы синхронных временных масштабов динамических систем, демонстрирующих режим синхронизации временных масштабов. Показано, что это поведение является перемежающимся. Для определения типа перемежаемости проанализирована зависимость средней длительности участков ламинарного поведения от параметра надкритичности. Установлено, что распределение длительности ламинарных фаз при фиксированном значении параметра связи на разных временных масштабах подчиняется экспоненциальному закону (10), а вероятность детектирования турбулентного участка на временном интервале длительностью  $T$ , в зависимости от параметра надкритичности, близка к линейной.

Суммируя все выше изложенное, можно сделать вывод, что для однонаправленно связанных систем Ресслера тип поведения, предшествующий синхронизации временных масштабов, является перемежаемостью кольца. Можно ожидать, что данный тип поведения будет характерен для широкого круга хаотических систем, демонстрирующих режим синхронизации временных масштабов.

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России, на 2009–2013 гг.“.

## Список литературы

- [1] Boccaletti S., Kurths J., Osipov G. et al. // Phys. Rep. 2002. Vol. 366. P. 1
- [2] Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
- [3] Roy R. // Nature. 2005. Vol. 438. P. 298.
- [4] Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // УФН. 2009. Т. 179. Вып. 12. С. 1281–1310.
- [5] Elson R.C. et al. // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. 25. P. 5692.
- [6] Ticos C.M., Rosa E., Pardo W. B. et al. // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. N 14. P. 2929.
- [7] Dmitriev B.S., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Starodubov A.V., Trubetskov D.I., Garkov Ju.D. // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 102. P. 074 101.
- [8] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. N 11. P. 1804.
- [9] Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S. et al. // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. N 2. P. 980.
- [10] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. N 22. P. 4193–4196.
- [11] Pecora L.M., Carroll T.L. // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. N 8. P. 821.
- [12] Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Chaos. 2004. Vol. 14. N 3. P. 603.
- [13] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S. // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. P. 114 101.
- [14] Boccaletti S., Valladares D.L. // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62. N 5. P. 7497–7500.

- [15] Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 368 с.
- [16] Manneville P., Pomeau Y. // Physika D. 1980. Vol. 1. N 2. P. 167–241.
- [17] Dubois M., Rubio M., Berge P. // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 1446–1449.
- [18] Platt N., Spiegel E.A., Tresser C. // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70. N 3. P. 279–282.
- [19] Heagy J., Platt N., Hammel S.M. // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. N 2. P. 1140–1150.
- [20] Lai Y.-C. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. № 5. P. R4267–R4270.
- [21] Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79. N 1. P. 47–50.
- [22] Porcher R., Thomas G. // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. N 1. P. 010902.
- [23] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. № 26. P. 264102.
- [24] Grossman A., Morlet J. // SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15. N 4. P. 273.
- [25] Журавлев М.О., Куровская М.К., Москаленко О.И. // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. Вып. 10. С. 31–38.
- [26] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75. P. 036205.