01;03

Тепловой кризис вихреисточника

© А.Н. Кучеров

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
140180 Жуковский, Московская область, Россия
e-mail: ank@aerocentr.msk.su

(Поступило в Редакцию 4 октября 2010 г.)

Исследовано влияние циркуляции в поле массового цилиндрического вихреисточника на явление теплового кризиса — запирание течения, вызванного энергоподводом в слое по известному закону. Отмечены существенные изменения величины параметра энергоподвода и слабые изменения координаты критического сечения, в котором достигается скорость звука, а также зависимость этих характеристик от месторасположения и ширины области теплоподвода. Изучается возможность перехода через скорость звука при расположении области тепловыделения вблизи минимального сечения вихреисточника. Показаны различия в многоатомном и одноатомном газе. Рассмотрены отличительные особенности для вихрестока.

Введение

В работах [1,2] описаны различия одно-, дву- и трехмерного течения с заданным теплоподводом в сверхзвуковом потоке, в частности, по признаку наличия или отсутствия прямого скачка уплотнения, по характеру границы появления ударных волн, по режиму безударного перехода через скорость звука внутри области тепловыделения [3,4]. Установлено, что одномерное течение принципиально физически отличается от дву- и трехмерного. В связи с этим в работах [5,6] исследованы стационарные, зависящие от одной независимой переменной, течения цилиндрического и сферического массового источника в режиме запирания с помощью тепловыделения по заданному закону внутри слоя, расположенного в поле течения источника. По условию достижения скорости звука в замыкающем сечении r_{ex} зоны энергоподвода определены кризисные ситуации — запирание потока при координате $r_{\text{cr}} = r_{\text{ex}}$, *тепловой кризис*, по аналогии с одномерным случаем [7,8]. Показано, что количество возможных вариантов многократно возрастает по сравнению с одномерным случаем. Кроме того, достижение скорости, равной скорости звука, при некоторых условиях невозможно в замыкающем сечении r_{ex} вследствие наступающего равновесия между эффектом пространственного расширения, вызывающего торможение, и теплоподводом, ускоряющим поток. Запирание вследствие достижения скорости потока, равной скорости звука, происходит раньше в некотором критическом сечении $r^* < r_{\text{ex}}$. Особенности таких вариантов теплового кризиса описаны в работах [6,9]. В работе [6] отмечено также, что дополнительные различия и возможности управления потоком возникают в цилиндрическом *вихреисточнике*. Исследованию влияния циркуляции газа в массовом цилиндрическом источнике на тепловой кризис посвящена настоящая работа. Течения с распределенным теплоподводом могут быть реализованы лазерным пучком [10–13], электрическим разрядом [14–16], химическими реакциями.

Постановка задачи

Вихреисточник с теплоподводом будем описывать в безразмерных переменных давление p/p_0, плотность ρ/ρ_0, температура T/T_0, радиальная и азимутальная компоненты скорости u/u_0, v/u_0, скорость звука c/u_0, координата r/r_0, расход газа $m = m_0/2\pi\rho_0 u_0 r_0$, циркуляция $\Gamma = \Gamma_0/2\pi u_0 r_0$. Здесь характерные величины есть давление p_0 на бесконечности (в случае затопленного пространства), плотность на бесконечности ρ_0, максимальная скорость $u_0 = \sqrt{2\gamma p_0/(\gamma-1)\rho_0}$ (которая достигается при истечении в вакуум), температура $T_0 = \mu p_0/R\rho_0$ (где R — универсальная газовая постоянная, μ — молярная масса газа), физический расход газа m_0 на один радиан, физичесая размерная циркуляция Γ_0, физический минимальный радиус r_0 (который определим ниже). Система уравнений, описывающих вихреисточник с тепловыделением, включает уравнения сохранения массы, радиальной и азимутальной компонент импульса, сохранения энергии и уравнение состояния [5,6,17–19]:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{u}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r} = 0, \tag{1}$$

$$\rho u\frac{du}{dr} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{dp}{dr} - \frac{\rho v^2}{r} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{v}{r}, \tag{3}$$

$$\rho u\frac{d}{dr}(T + V^2) = \frac{g(r)}{\gamma}, \quad V^2 = u^2 + v^2,$$

$$g(r) = f(r) \times \begin{cases} E \\ Q\rho(r) \end{cases}, \tag{4}$$

$$E = \frac{(\gamma-1)g_0 r_0}{u_0 p_0}, \quad Q = \frac{(\gamma-1)\rho_0 q_0 r_0}{u_0 p_0},$$

$$T = \frac{p}{\rho}, \quad c^2 = \frac{c^2_{\text{phys}}}{u_0^2} = \frac{\gamma-1}{2}T,$$

$$M^2 = \frac{2V^2}{(\gamma-1)T}, \quad M_r^2 = \frac{2u^2}{(\gamma-1)T}. \tag{5}$$

Здесь $M, M_{\rm r}$ — полное и радиальное числа Маха; E, Q — параметры энергоподвода при погонной интенсивности тепловыделения в единицу объема g_0: J/m^2 (J/m^3 — в сферическом источнике, J/m^2 — в цилиндрическом источнике) или при интенсивности теплоподвода на единицу погонной массы q_0 (m $\cdot$ J/kg), обычно принимают $g_0 = \rho_0 q_0$, $f(r)$ — заданная функция (в настоящей работе рассмотрим постоянную $f = C$ в интервале $[r_1, r_2]$ и линейную $f(r) = C_L(r_2 - r)$). Функция $f(r)$ нормирована к единице

$$2\pi \int r\,f\,dr = 1,$$

так что

$$C = \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}, \quad C_L = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{r_2^3 - r_1^3}{3} + \frac{r_2 r_2^2 - r_1^2}{2}\right].$$

Заданы полный расход m_0 и циркуляция газа Γ_0, вокруг центра $r = 0$. Они связаны между собой, как увидим ниже. Уравнения (1), (3), (4) имеют интегралы

$$r\rho u = m \equiv \frac{m_0}{2\pi\rho_0 u_0 r_0}, \quad v = \frac{\Gamma}{r} \equiv \frac{\Gamma_0}{2\pi u_0 r_0 r}, \qquad (6)$$

$$H(r) \equiv \frac{p}{\rho} + V^2 = \Phi(r) \equiv 1 + \frac{1}{\gamma m}\begin{cases} EF(r) \\ QF_\rho(r) \end{cases},$$

$$F = \int_{r_{\rm in}}^{r} f\,r\,dr, \quad F_\rho = \int_{r_{\rm in}}^{r} \rho(r) f\,r\,dr. \qquad (7)$$

Интегралы $F(r)$, $F_\rho(r)$, $\Phi(r)$ характеризуют энергию, подведенную к рассматриваемому текущему сечению r, величина $H(r)$ — полную энтальпию газа (измеряется в долях энтальпии газа в затопленном пространстве $h_0 = \gamma p_0/(\gamma - 1)\rho_0$). Начальная и замыкающая координаты равны $r_{\rm in} = r_1$, $r_{\rm ex} = r_2$ для вихреисточника и $r_{\rm in} = r_2$, $r_{\rm ex} = r_1$ — для вихрестока. Тепловой кризис (запирание потока, невозможность стационарного течения при заданном расходе m_0) наступает при достижении радиальной компоненты скорости значения скорости звука. Напомним, что, по определению, критическое сечение, совпадающее с замыкающим, есть $r_{\rm cr}$ ($r_{\rm cr} = r_2$ — вихреисточник, $r_{\rm cr} = r_1$ — вихресток); не совпадающее — по определению r^* ($r^* < r_2$) — вихреисточник, $r^* > r_1$ — вихресток, критические параметры энерговыделения обозначим $E_{\rm cr}$, $Q_{\rm cr}$ и E^*, Q^* соответственно.

Уравнение (2) с учетом (3) можно записать в виде

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dr} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma\rho}\frac{dp}{dr} = 0. \qquad (8)$$

Если энергоподвода нет ($f = 0$), то из (4), (8) получаем адиабату Пуассона $p = \rho^\gamma$. С учетом (6), (7) находим решения:

$$r^2 = \frac{m^2/\rho^2 + \Gamma^2}{1 - \rho^{\gamma-1}} = \frac{m^2/p^{2/\gamma} + \Gamma^2}{1 - p^{(\gamma-1)/\gamma}} = \frac{m^2/T^{2/(\gamma-1)} + \Gamma^2}{1 - T}$$

$$= \frac{2D(r)(\Gamma^2 + m^2 D^{2/(\gamma-1)})}{(\gamma - 1)M^2},$$

$$D(r) = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2,$$

$$\rho = p^{1/\gamma} = T^{1/(\gamma-1)} = \frac{m}{ru}, \quad v = \frac{\Gamma}{\gamma}. \qquad (9)$$

Вихреисточник (вихресток), как и источник (сток), имеет минимальное сечение $r = 1$, в котором радиальная компонента скорости равна скорости звука. Из условия минимума $dr/d\rho\big|_{r=1} = 0$ находим значение плотности в этом сечении и связь между расходом m и циркуляцией Γ (подставляя $u(1)$, $T(1)$ в уравнение сохранения энергии (7), в котором $\Phi = 1$):

$$\rho(1) = \left[\frac{2}{\gamma + 1}(1 - \Gamma^2)\right]^{1/(\gamma-1)},$$

$$1 - \Gamma^2 = \frac{\gamma + 1}{2}\left(\frac{2m^2}{\gamma - 1}\right)^{(\gamma-1)/(\gamma+1)}. \qquad (10)$$

Таким образом, лишь один параметр подобия из двух m, Γ является свободным, независимым. Максимальная циркуляция составляет $\Gamma_{\max} = 1$ (в физических переменных $\Gamma_0^{\max} = 2\pi u_0 r_0$), максимальный расход есть

$$m_{\max} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{1/(\gamma-1)} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}$$

(в физических переменных $m_0^{\max} = 2\pi\rho_0 u_0 r_0 m_{\max}$). Минимальный радиус вихреисточника r_0, на котором радиальная компонента числа Маха $M_{\rm r}$ равна единице, в физических переменных в общем случае есть:

$$r_0 = \frac{\Gamma_0}{2\pi u_0 \Gamma} \equiv \frac{m_0}{2\pi\rho_0 u_0 m}. \qquad (11)$$

Следовательно, физические величины циркуляции Γ_0 и массового расхода m_0 также связаны между собой однопараметрической связью (11), зависящей от m (либо от Γ). В источнике (стоке) при фиксации размерной величины расхода m_0 однозначно задавался размерный минимальный радиус r_0 ввиду того, что безразмерный расход зафиксирован и составляет $m = m_{\max}$. В вихреисточнике (вихрестоке) при фиксации m_0, в зависимости от величины параметра подобия — безразмерного расхода m получим различный физический минимальный радиус r_0. Слабый теплоподвод ($Q, E \ll 1$) в вихре (точнее, в слабом вихреисточнике, при $m \to 0$) описан в работе [19]. Связь (10) между m и Γ показана в работе [6] на рис. 7 для $\gamma = 1.1$ (многоатомный газ), 1.4 (воздух, двухатомный газ), 1.667 (одноатомный газ).

В общем случае при энергоподводе можно привести систему (1)–(5) к одному уравнению для каждой из искомых величин плотности ρ, скорости u, давления p или числа M:

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dr} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}{M_r^2 - 1}$$

$$\times\left\{\frac{1}{r} + \frac{rg(r)}{2\gamma m\Phi(r)}\left[1 - M_r^2\left(\gamma + \frac{2}{M^2}\right)\right]\right\}, \qquad (12)$$

$$M_{\rm r}^2 = M^2 - \frac{\Gamma^2}{r^2\Phi(r)}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right).$$

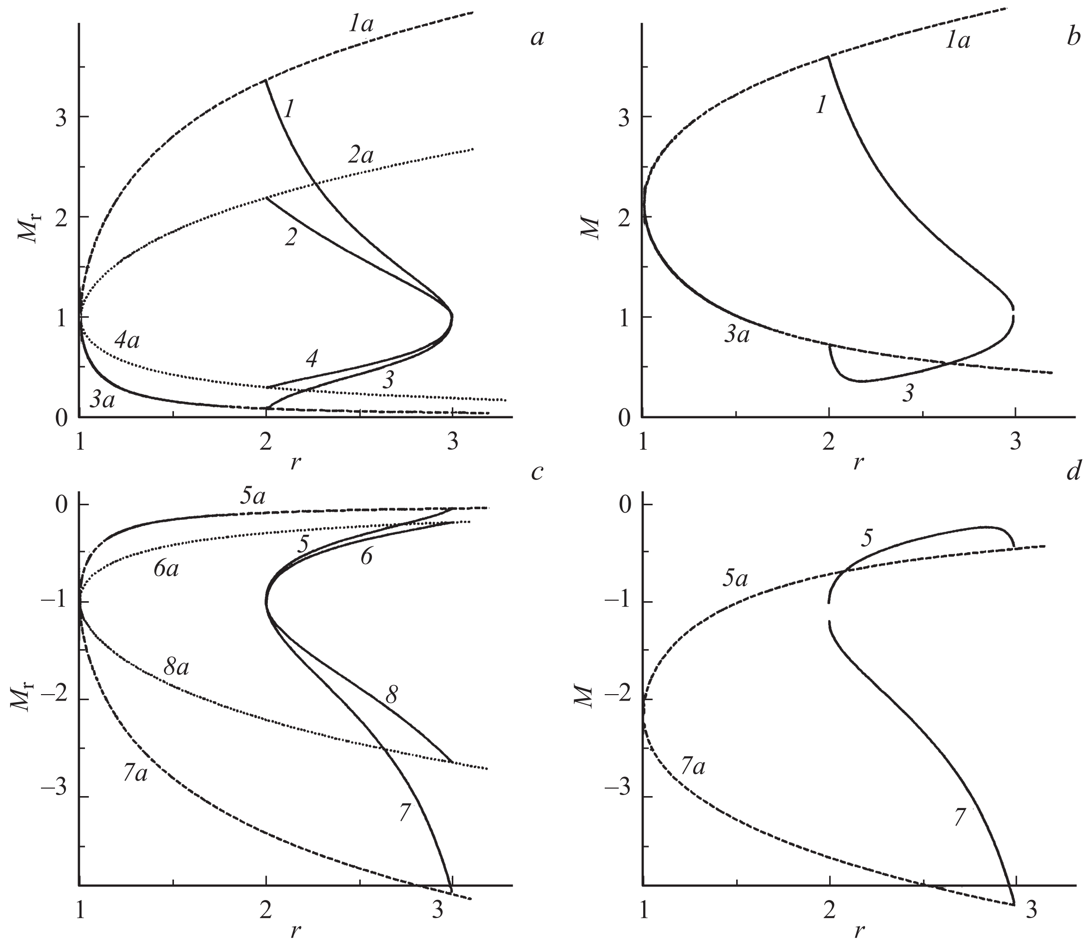

Рис. 1. Зависимости радиального значения M_r (рис. 1, a, c) и полного числа Маха M (рис. 1, b, d) от координаты r (при $\gamma = 1.4$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $f(r) = C$). Кривые на рис. 1, a: *1* — вихреисточник в вакуум, $\Gamma = 0.608$ ($m = m_{\max}/4 = 0.0647$), $E_{\text{cr}} = 0.490$, $\Phi_{\text{cr}} = \Phi_2 = 1.85$; *1, a* — без теплоподвода, $E = 0$; *2* — источник в вакуум $\Gamma = 0$ ($m = m_{\max} = 0.2588$), $E_{\text{cr}} = 1.33$, $\Phi_{\text{cr}} = \Phi_2 = 1.582$; *2, a* — $E = 0$; *3* — вихреисточник в затопленное пространство, $\Gamma = 0.608$, $E_{\text{cr}} = 22.75$, $\Phi_{\text{cr}} = \Phi_2 = 40.67$; *3, a* — $E = 0$; *4* — источник в затопленное пространство, $\Gamma = 0$, $E_{\text{cr}} = 9.30$, $\Phi_{\text{cr}} = \Phi_2 = 4.793$; *4, a* — $E = 0$. Рис. 1, b — то же, что и на рис. 1, a, но для $M(r)$. Кривые на рис. 1, c: *5* — вихресток из затопленного пространства, $\Gamma = 0.608$ ($m = 0.0647$), $E_{\text{cr}} = 18.73$, $\Phi_{\text{cr}} = \Phi_1 = 33.889$; *5, a* — $E = 0$; *6* — сток из затопленного пространства, $\Gamma = 0$ ($m = 0.2588$), $E_{\text{cr}} = 4.90$, $\Phi_{\text{cr}} = \Phi_1 = 3.144$; *6, a* — $E = 0$; *7* — вихресток из вакуума, $\Gamma = 0.608$, $E_{\text{cr}} = 0.231$, $\Phi_{\text{cr}} = \Phi_1 = 1.405$; *7, a* — $E = 0$; *8* — сток из вакуума, $\Gamma = 0$, $E_{\text{cr}} = 0.536$, $\Phi_{\text{cr}} = \Phi_1 = 1.235$; *8, a* — $E = 0$. Рис. 1 d: То же самое, что и на рис. 1, c, но для $M(r)$.

Уравнения для ρ, u, p также имеют особенности при $M_r = 1$. Разрешив уравнение (12) с начальным условием из (9) $M(r_{\text{in}}) = M_{\text{in}}$, найдем остальные величины, используя интегральные связи (6), (7), по следующим соотношениям:

$$T = \frac{\Phi(r)}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}, \quad V^2 = \frac{\Phi(r)\frac{\gamma-1}{2}M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2},$$

$$u^2 = V^2 - \frac{\Gamma^2}{r^2}, \quad \rho = \frac{m}{ru}. \qquad (13)$$

Рассмотрим конкретные примеры.

Решения в режиме теплового кризиса

Как и в случае источника (стока) при $\Gamma = 0$, для вихреисточника (вихрестока) с тепловыделением в слое $[r_{\text{in}}, r_{\text{ex}}]$ по заданному закону $f(r)$ существует 8 вариантов. В настоящей работе рассмотрим четыре E-варианта:

I — тепловыделение в вакуум, $\rho, p, T, v \to 0$; $u, V \to 1$ при $r \to \infty$;

II — в затопленное пространство, $\rho \to 1$, $p \to 1$, $T \to 1$, $v, u, V \to 0$ при $r \to \infty$;

III — из затопленного пространства;

IV — из области разреженного газа (из вакуума).

В III, IV радиальная компонента скорости направлена против координаты r, величины u, m, M_r — отрицательные. Рассмотрим также некоторые примеры для Q-вариантов.

На рис. 1 приведены радиальные M_r (рис. 1, a, c) и полные числа Маха M (рис. 1, b, d) в зависимости от координаты r для перечисленных E-вариантов: I — кривые *1*, II — кривые *3*, III — кривые *5*, IV — кривые *7* при расходе $m = m_{\max}/4 \approx 0.0647$ ($\gamma = 1.4$) и циркуляции $\Gamma \approx 0.608$, однородном тепловыделении $f = 0.06366$ в слое единичной ширины от $r_1 = 2$ до $r_2 = 3$ (воздух, $\gamma = 1.4$). Для сравнения приведены также M_r, $M(r)$ в отсутствие теплоподвода $E = 0$ (кривые *1a–8a*) и в отсутствие циркуляции $\Gamma = 0$ (кривые *2, 4, 6, 8*). Величина $M(r)$ на рис. 1, *b, d* взята со знаком минус, чтобы удобнее было сравнивать с M_r. Критические значения энергетического параметра E_{cr} (по признаку достижения радиальной компоненты числа Маха значения 1 в замыкающем сечении $M_r(r_{ex}) = 1$) составили: I — 0.490, II — 22.75, III — 18.73, IV — 0.231. Соответствующие значения интеграла полной энергии $\Phi_{cr} = \Phi(r_{ex})$ равны: I — $\Phi_{cr} = \Phi_2 \approx 1.85$, II — 40.67, III — $\Phi_{cr} = \Phi_1 \approx 33.889$, IV — 1.405. Сопоставление Φ_{cr} для вихреисточника (вихрестока) и источника (стока) при выбранном расположении ($r_1 = 2$), ширине области ($d = r_2 - r_1 = 1$), законе теплоподвода ($f = C$) и циркуляции ($\Gamma \approx 0.608$) свидетельствует о том, что энергия, необходимая для реализации теплового кризиса, больше в вихреисточнике. Причем в случае затопленного пространства величина Φ_{cr} на порядок больше, чем при $\Gamma = 0$. В случае разреженного пространства (вакуума) отличия Φ_{cr} менее существенные, не превышают 17%. Другой важный вывод: величина параметра энергоподвода не определяет полностью величину энергозатрат в том или ином варианте при достижении теплового запирания. На это указывает выражение, связывающее Φ_{cr} и E_{cr}: $\Phi_{cr} = 1 + E_{cr}/2\pi\gamma m$ (учли, что $F(r_{ex}) = 1/2\pi$). Полный интеграл энергии зависит от параметра энергоподвода E, от расхода $m(\Gamma)$, от разновидности газа (постоянной адиабаты γ). Таким образом, циркуляция Γ — предмет исследования в настоящей работе — существенно влияет на Φ_{cr}. Кроме того, в Q-варианте в интеграл $F_\rho(r)$ входит переменная плотность газа $\rho(r)$.

Отметим, что в Q-варианте II в затопленное пространство, величины Q_{cr}, Φ_{cr} составляли 35.98; 4.655 и 768.25; 35.24 при $\Gamma = 0$ и 0.608 соответственно. В случае линейного закона тепловыделения $f = C(r_2 - r)$, в E-варианте II, в затопленное пространство, величины $E^* = E(r^*)$ и $\Phi_{cr} = \Phi_2$ составили 8.0532, 4.4377 и 19.8602, 35.268 при $\Gamma = 0$ и 0.608 соответственно. Данные демонстрируют различия Q- и E-вариантов, а также зависимость (слабую, в данном примере) от закона теплоподвода $g(r)$ в целом и от функции распределения $f(r)$.

На рис. 2 приведены зависимости энергетических параметров $E^*(\Gamma; r_1)$, $E_{cr}(\Gamma; r_1)$ и полной энергии $\Phi^*(r_1, \Gamma)$ от циркуляции Γ и расстояния r_1 зоны тепловыделения от минимального сечения $r = 1$ для вихреисточника, истекающего в затопленное пространство, E-вариант II. Случай однородного теплоподвода (кривые *6, 7* на рис. 2, *a*) незначительно отличается от линейного. В последнем критическое сечение r^* предшествует замыкающему r_2, максимальное отличие r^* от r_2 составляет 0.386 при $r_1 = 1.1$ и $\Gamma = 0$ ($m = m_{max} = 0.2588$, $\gamma = 1.4$). Отметим значительное увеличение температуры при больших энерговложениях Φ^* (см. рис. 2, *b*), например, отношение $T_{phys}(r^*)/T_0$ составило 7.04 (при $\Gamma = 0$, $r_1 = 3$, $\Phi^*_{phys}/h_0 = 8.43$), 16.2 (при 0.454; 2.5, 19.5), 29.3 (при 0.608, 2.0; 35.2), 25.9 (при 0.7766; 1.3 31.3), 21.5 (при 0.895; 1.1; 26.0). Необходим учет реальных свойств газа.

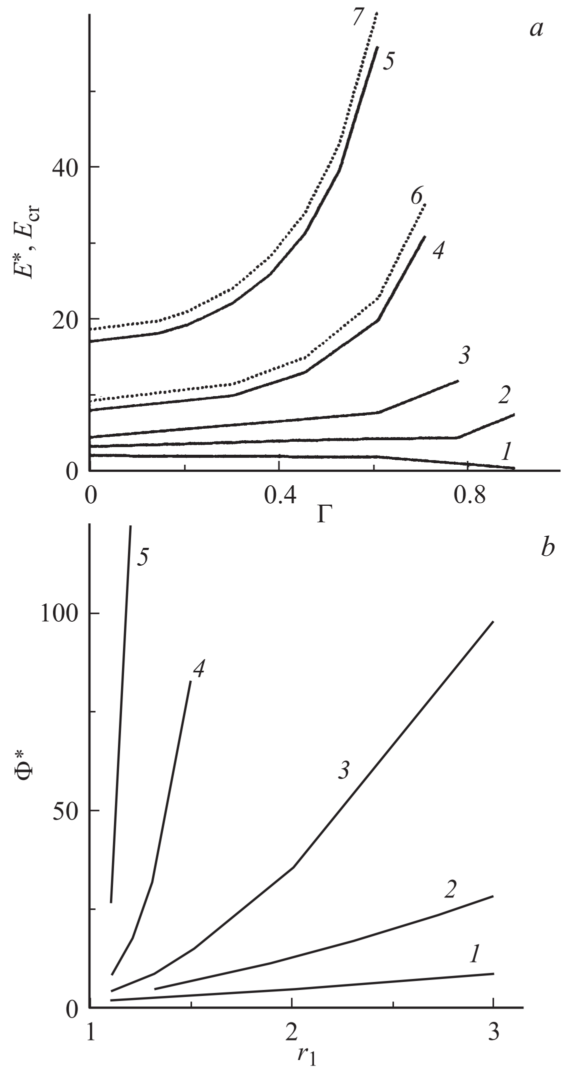

Рис. 2. Зависимости *a* — энергетических параметров E^*, E_{cr} и *b* — подведенной энергии Φ^* в критическом сечении r^* от циркуляции Γ для вихрестока в затопленное пространство при различном удалении r_1 зоны теплоподвода от сечения минимального радиуса (при ширине зоны $d = 1$, $\gamma = 1.4$, $f = C_L(r_2 - r)$). *a* — значения r_1: *1* — 1.1 ($r_2 = r_1 + d = 2.1$), *2* — 1.3 ($r_2 = 2.3$), *3* — 1.5 ($r_2 = 2.5$), *4* — 2.0 ($r_2 = 3$), *5* — 3.0 ($r_2 = 4$); кривые *6* и *7* — $r_1 = 2$ и 3, однородное тепловыделение $f = C$; *b* — значения Γ: *1* — 0, *2* — 0.454, *3* — 0.608, *4* — 0.7766, *5* — 0.8953; $f = C_L(r_2 - r)$.

Переход через скорость звука

Среди прочих дополнительных возможностей, которые дает наличие циркуляции потока, — переход через скорость звука, причем и в сечениях, близких к критическим. Вихреисточник может дать, в конечном итоге, на выходе сверхзвуковой поток или дозвуковой поток,

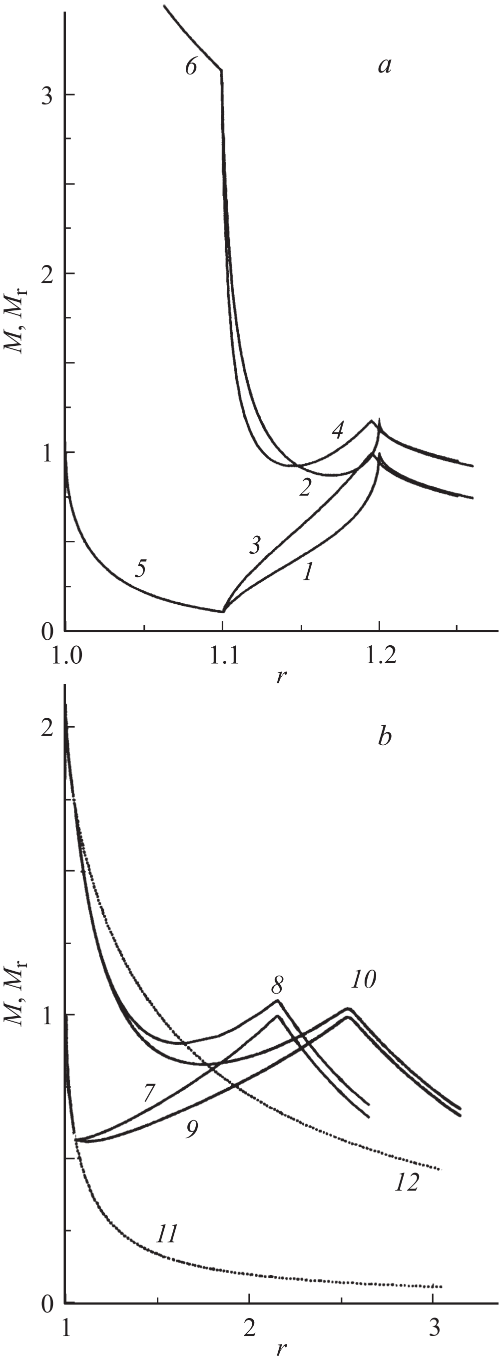

Рис. 3. Вихреисточник в затопленное пространство: зависимости полного числа Маха M и радиальной составляющей M_r от координаты r: a — $r_1 = 1.1$, $r_2 = 1.2$ ($d = 0.1$, $\gamma = 1.4$, $m = m_{\max}/128 = 2.02 \cdot 10^{-3}$, $\Gamma = 0.8953$); *1, 3, 5* — M_r; *2, 4, 6* — M; *1, 2* — $f = C = 0.091\,27$, $E_{cr} \approx 0.159$; *3, 4* — $f = C_L(r_2 - r)$, $E^* \approx 0.143$, $r^* \approx 1.195$; *5, 6* — $E = 0$; b — $r_1 = 1.05$ ($m = m_{\max}/4 = 0.0647$, $\Gamma = 0.608$); *7, 9, 11* — M_r; *8, 10, 12* — M; *7, 8* — $r_2 = 2.55$ ($d = 1.5$), $f = C_L(r_2 - r)$, $E^* \approx 2.218$, $r^* \approx 2.1549$; *9, 10* — $r_2 = 3.05$ ($d = 2$), $E^* \approx 3.0538$, $r^* \approx 2.5340$; *11, 12* — $E = 0$.

переходящий в сверхзвуковой (на входе в прямолинейный участок или искривленный, ограниченный стенками трубы или канала, созданными вдоль линий тока).

На рис. 3 построены зависимости от координаты r для радиальной компоненты M_r и полного числа Маха M. Область энергоподвода расположена в слое от координаты $r_1 = 1.1$ (a) или 1.05 (b) до $r_2 = r_1 + d$. Ширина области тепловыделения d есть 0.1 (a), 1.5, 2 (b), расход равен $m = 2.02 \cdot 10^{-3}$ (a), 0.0647 (b), циркуляция $\Gamma = 0.895$ (a), 0.608 (b). В приведенных вариантах параметры энергоподвода E незначительно меньше критических значений, течение не запирается.

В источнике без циркуляции ($\Gamma = 0$) возможно сколько угодно близкое приближение к значению числа M, равному единице, и невозможен переход через сечение, в котором скорость потока равна скорости звука. Наступает тепловой кризис, запирание потока, невозможность обеспечить стационарный зафиксированный расход m. В вихреисточнике полное значение числа Маха за счет тепловыделения может перейти значение $M = 1$. Дозвуковой поток переходит в сверхзвуковой в некоторых сечениях и остается сверхзвуковым в окрестности критического сечения при значении радиальной составляющей числа Маха, достаточно близкой к единице. Теплоподвод в вихреисточнике (стоке) позволяет управлять переходом M через единицу.

Отметим острый пик зависимостей $M(r)$, $M_r(r)$ в сверхзвуковой области вблизи критической точки $r_{cr} = r_2$ при однородном (постоянном) тепловыделении $f = C$. При линейном законе теплоподвода $f = C_L(r_2 - r)$ пик сглажен, значение радиальной компоненты числа Маха близко к 1 в более широкой окрестности критического сечения r^* область локальных значений $M > 1$ шире.

В табл. 1 для вихрестока представлены критические значения параметра тепловыделения (E_{cr} либо E^*, слегка заниженное, чтобы поток не запирался), локально максимальные значения числа Маха $M_{\max}$ (вблизи критического сечения r_2 либо r^*), полная энтальпия $H(r_{\max})$ или подведенная в поток энергия $\Phi(r_{\max})$, учитывающая начальное значение энтальпии $H(r_1) = 1$.

С уменьшением ширины области тепловыделения d (напомним, что $\int 2\pi r f(r) dr = 1$ в силу нормировки постоянной C) значение $M_{\max}$ растет, значение параметра энерговыделения E_{cr} убывает (см. табл. 1), подведенная энергия $\Phi(r_{\max})$ уменьшается. При переходе от однородного тепловыделения $f = C$ к линейному закону $f = C_L(r_2 - r)$ изменения параметров незначительное, наблюдается слабое уменьшение E^*, Φ^* (по сравнению с E_{cr}, Φ_2) и слабое увеличение $M_{\max}$. Изменения постоянной адиабаты γ от 1.4 (воздух, азот, двухатомный газ) в сторону многоатомного газа (уменьшение) приводит к значительному снижению E^* и менее существенному уменьшению величины Φ^* при заметном росте $M_{\max}$. При переходе к одноатомному газу ($\gamma = 5/3$) величины E^*, Φ^* существенно возрастают, а $M_{\max}$ слабо уменьшается. Время пролета контрольной частицы через область тепловыделения растет с увеличением ширины d, растет с уменьшением γ и уменьшается с увеличением γ.

В табл. 2 приведены те же параметры, что и в табл. 1 при $\gamma = 1.4$ (азот, воздух), линейном

Таблица 1. Параметры энергоподвода $E_{\rm cr}, E^*$, максимальные значения числа Маха $M_{\max}$ в сечениях $r_{\max}$, полная энтальпия $H(r_{\max}) = \Phi(r_{\max})$, температура газа $T(r_{\max})$, время $\Delta t = \int dr/u(r)$ пролета жидкой частицы через область тепловыделения от r_1 до $r_{\max}$. Координата $r_1 = 1.1$, ширина области теплоподвода $d = 0.1-1$, постоянная адиабаты $\gamma = 1.1$, 1.4, 5/3 (многоатомный газ, двухатомный (воздух), одноатомный), закон тепловыделения $f = C$ и $f = C_L(r_2 - r)$. Расход $m = m_{\max}/128 = 2.02 \cdot 10^{-3}$ ($\gamma = 1.4$), $1.0466 \cdot 10^{-3}$ ($\gamma = 1.1$), $2.537 \cdot 10^{-3}$ ($\gamma = 1.6667$); циркуляция вихреисточника $\Gamma = 0.8953$ ($\gamma = 1.4$), 0.6083 ($\gamma = 1.1$), 0.9548 ($\gamma = 1.6667$)

d, $r_2 = r_1 + d$	0.5 1.60	0.3 1.40	0.1 1.20	0.1 1.20	1 2.10	0.1 1.20	0.1 1.20	0.5 1.60
$f = C$	0.2358	0.4244	1.384	$f = C_L(r_2 - r)$ $C_L = 28.09$	$f = C_L(r_2 - r)$ $C_L = 0.222$	$f = C_L(r_2 - r)$ $C_L = 28.09$	$f = C_L(r_2 - r)$ $C_L = 28.09$	$f = 0.2358$
γ	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.1	1.6667	1.4
m	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.00104	0.00253	$m_{mx}/4 = 0.0647$
Γ	0.895	0.895	0.895	0.895	0.895	0.6083	0.954	0.608
$E_{\rm cr}$	0.3761	0.2649	0.1589	$E_* = 0.1427$	0.4630	0.4171	0.35102	1.5126
$M_{\max}$	1.0365	1.0716	1.1604	1.1757	1.0220	1.3572	1.0873	1.114
$r_{\max}$	$r_2 = 1.60$	$r_2 = 1.40$	$r_2 = 1.20$	$r^* \approx 1.195$	$r^* \approx 1.933$	$r^* \approx 1.192$	$r^* \approx 1.196$	$r_2 = 1.60$
$\Phi(r_{\max})$	$\Phi_2 = 22.1$	$\Phi_2 = 15.8$	$\Phi_2 = 9.93$	$\Phi^* = 9.006$	$\Phi^* = 26.0$	$\Phi^* = 6.729$	$\Phi^* = 14.1$	$\Phi_2 = 3.65$
$T(r_{mx})$	$T_2 = 18.2$	$T_2 = 12.9$	$T_2 = 7.83$	$T^* = 7.056$	$T^* = 21.5$	$T^* = 6.16$	$T^* = 10.1$	$T_2 = 2.92$
Δt	1.5605	1.0860	0.4525	0.3034	1.6580	0.47398	0.23966	1.5778

законе $f = C_L(r_2 - r)$ и начальной координате зоны энергоподвода $r_1 = 1.05$. Расход газа составлял $m = m_{\max}/4 = 0.0647$, циркуляция вихреисточника равна $\Gamma = 0.608$. Варьировалась протяженность d области тепловыделения. Отметим рост $M_{\max}$ с уменьшением d. Если сопоставить параметры E^*, Φ^* и число Маха $M_{\max}$ при $d = 0.5$ (приняв, что условия отличаются незначительно в аналогичных вариантах табл. 1 и 2, кроме расхода и циркуляции) отметим, что энергозатраты (по значениям $\Phi(r_{\max})$, равным 22.1 и 2.23 соответственно в табл 1 и 2) существенно выше в случае более сильной циркуляции $\Gamma = 0.895$ (в табл. 1 против 0.608 в табл. 2). Рассмотрен случай II, вихреисточник в затопленное пространство. Для вихреисточника в вакуум теплоподвод вызовет торможение сверхзвукового потока, произойдет запирание в некотором сечении $r_{\rm cr}, r^*$. Если параметр энергоподвода взять несколько меньше $E_{\rm cr}, E^*$, запирания не будет, но за сечением минимального значения радиальной компоненты (до значения $M_{\rm r}$, близкого к единице) поток продолжит разгон до сверхзвуковой скорости и выйдет на некоторое максимальное значение скорости, в соответствии с количеством запасенной в зоне тепловыделения энергии. Переход через скорость звука не происходит.

Таблица 2. Параметры энергоподвода E^*, максимальные значения числа Маха $M_{\max}$, координата соответствующего сечения $r_{\max}$, полная энтальпия $H(r_{\max}) = \Phi(r_{\max})$, температура газа $T(r_{\max})$, время $\Delta t = \int dr/u(r)$ пролета жидкой частицы через область тепловыделения от r_1 до $r_{\max}$. Координата $r_1 = 1.05$, ширина области теплоподвода $d = 0.5-2$, постоянная адиабаты $\gamma = 1.4$ (воздух), закон тепловыделения $f = C_L(r_2 - r)$. Расход $m = m_{\max}/4 = 0.0647$, $m_{\max}/16 = 0.01\,617$ и $m_{\max}/128 = 0.00\,202$, циркуляция вихреисточника $\Gamma = 0.608$, 0.776 и 0.895

Γ	0.608	0.608	0.608	0.608	0.7766	0.89531
d $r_2 = r_1 - d$	0.5 1.55	1.0 2.05	1.5 2.55	2.0 3.05	0.5 1.55	0.5 1.55
E^*	0.7824	1.4640	2.2182	3.05381	0.3687	0.1036
$M_{\max}$	1.242	1.103	1.048	1.021	1.244	1.163
$r_{\max} \approx r$	1.399	1.771	2.154	2.534	1.321	1.463
$\Phi(r_{\max}) \approx \Phi^*$	2.227	3.303	4.498	5.815	3.418	6.612
$T(r_{\max}) \approx T^*$	1.701	2.656	3.687	4.813	2.610	5.204
Δt	0.968	1.755	2.462	3.101	1.097	1.192

Для вихрестока ситуация иная, при любом теплоподводе вследствие сужения пространства радиальная компонента скорости потока приблизится к скорости звука, за зоной тепловыделения или внутри нее. Таким образом изменится минимальный радиус вихрестока. Для вихрестока из вакуума переход через скорость звука невозможен. В случае вихрестока из затопленного пространства радиальная компонента скорости всюду меньше скорости звука. С помощью тепловыделения в некотором слое $[r_1, r_2]$ ее можно приблизить к скорости звука, см. пример на рис. 4, $\Gamma = 0.7766$, однородное тепловыделение, $r_1 = 1.1$, $d = 0.3$, $r_2 = 1.4$. Хотя скорость увеличивается, из-за нагрева повышается скорость звука. Число Маха M сначала снижается ниже единицы, затем переходит значение $M = 1$. Критическое значение параметра энергоподвода составило $E_{\rm cr} = 1.750$, при этом запирание потока происходит в замыкающем сечении

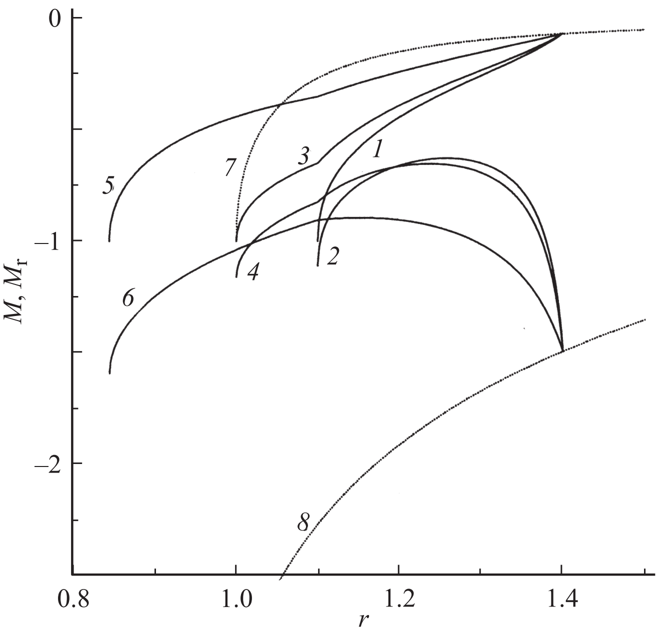

Рис. 4. Зависимости радиального M_r и полного числа Маха M (кривые *1, 3, 5, 7* и *2, 4, 6, 8*) от координаты r в вихрестоке из затопленного пространства ($\gamma = 1.4$, $f = C = 0.4244$, $r_1 = 1.1$, $d = 0.3$, $r_2 = 1.4$, $\Gamma = 0.7766$, $m = m_{max}/16 = 0.016\,175$): *1, 2* — $E_{cr} = 1.750$, $r_{cr} = r_1 = 1.1$; *3, 4* — $E = 1.4187$, $r_{min} = 1$; *5, 6* — $E = E_{min} = 0.450$, $r_{min} = r_{mm} = 0.8445$; *7, 8* — $E = 0$, $r_{min} = 1.0$.

$r_{cr} = r_1 = 1.1$ (кривые *1, 2* на рис. 4). При $E < E_{cr}$ в области за зоной тепловыделения, используя известные в сечении r_1 величины ρ_1, p_1, T_1, u_1, M_1, из интегралов (6), (7) и связей (5), (9), в которых введена поправка на увеличенную в результате энергоподвода полную энтальпию $h_{01} = h_0\Phi_1$, получим обратное аналитическое решение $r(M)$:

$$r^2 = \frac{(m^2/\rho_1^2)(T_1 D(r)/\Phi_1)^{2/(\gamma-1)} + \Gamma^2}{\Phi_1[1 - 1/D(r)]},$$

$$D(r) = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(r), \quad \Phi_1 = 1 + \frac{E}{2\pi\gamma m}. \tag{14}$$

Минимальный радиус вихреисточника r_{min}, с учетом

$$M_r^2(r_{min}) = 2u_{min}^2/(\gamma - 1)T_{min} = 1,$$

где $u_{min} = u(r_{min})$, $T_{min} = T(r_{min})$, находится из уравнения:

$$\left(\frac{m}{r_{min}\rho_1}\right)^{2(\gamma-1)/(\gamma+1)} \left(\frac{\gamma-1}{2} T_1\right)^{2/(\gamma+1)} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left(\Phi_1 - \frac{\Gamma^2}{r_{min}^2}\right). \tag{15}$$

При $E = 1.4187$ запирание происходит за зоной тепловыделения в сечении первоначального минимального радиуса $r_{min} = 1$ (кривые *3, 4* на рис. 4). При $E = 0.450 = E_{mm}$ запирание наступит в сечении $r_{mm} = 0.8445$ (кривые *5, 6* на рис. 4). Это сечение абсолютно минимального радиуса в рассматриваемом примере. Дальнейшее уменьшение параметра энерговыделения E приводит к увеличению координаты, при которой радиальная составляющая числа Маха равна по модулю единице. При $E = 0$ запирание происходит в сечении $r_{min} = 1$ (кривые *7, 8*).

Решение (14) и условие (15) справедливы также для случая вихрестока из разреженного пространства (из „вакуума“).

Заключение

В задаче о вихреисточнике (вихрестоке) с тепловыделением существуют следующие параметры подобия: расход m (циркуляция Γ), параметр энергоподвода E (или Q), постоянная адиабаты γ и параметры, связанные с областью и законом теплоподвода.

Интеграл полной подведенной к критическому сечению энергии $\Phi_{cr} = \Phi(r_{cr})$ увеличивается с ростом циркуляции Γ, особенно в вариантах с затопленным пространством.

Величина Φ_{cr} существенно зависит от параметра энергоподвода E (или Q), от закона $f(r)$, постоянной адиабаты γ. С увеличением γ (от многоатомного газа к одноатомному) величина Φ_{cr} возрастает.

В вихреисточнике и вихрестоке возможно управление локальным переходом через $M = 1$ за счет теплоподвода, в первую очередь вблизи критических сечений при достаточно близком расположении области энерговыделения от минимального радиуса.

Максимальное значение M_{max} сверхзвукового числа Маха растет с уменьшением ширины области тепловыделения, с уменьшением расстояния r_1 от минимального сечения, с увеличением циркуляции Γ вихреисточника, а также уменьшением постоянной адиабаты γ (от одноатомного к многоатомному газу).

В вихрестоке с уменьшением параметра энергоподвода меньше критического $E < E_{cr}$ возможно уменьшение минимального радиуса r_{min} до значений меньше 1 (минимальный радиус без теплоподвода). Существует значение E_{mm}, при котором радиус r_{min} равен абсолютно минимальному r_{mm}.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы № П-09 Президиума РАН.

Список литературы

[1] *Kogan M.N., Kucherov A.N.* // The 8th Int. Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow: 2009. Proceedings. P. 168–179.

[2] *Коган М.Н., Кучеров А.Н.* // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 1 (дополнительный). С. 85–92.

[3] *Георгиевский П.Ю., Левин В.А.* // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 154–167.

[4] *Кучеров А.Н.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 12. С. 32–39.
[5] *Кучеров А.Н.* // ИФЖ. 2010. Т. 80. № 5. С. 873–877.
[6] *Kogan M.N., Kucherov A.N.* // The 9th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow: 2010. Proceedings. P. 59–69.
[7] *Абрамович Г.Н.* // ДАН СССР. 1946. Т. 54. № 7. С. 579–581.
[8] *Вулис Л.А.* // ДАН СССР. 1946. Т. 54. № 8. С. 669–672.
[9] *Кучеров А.Н.* Препринт ЦАГИ № 157. М.: Изд-во ЦАГИ, 2009. 36 с.
[10] *Третьяков П.К., Грачев Г.Н., Иванченко А.И., Крайнев В.Л., Пономаренко А.Г., Тищенко В.Н.* // Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 4. С. 466–467.
[11] *Третьяков П.К., Гаранин Г.Ф., Грачев Г.Н., Крайнев В.Л., Пономаренко А.Г., Тищенко В.Н., Яковлев В.И.* // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 3. С. 339–340.
[12] *Зудов В.Н., Третьяков П.К., Тупикин А.В., Яковлев В.И.* // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 140–153.
[13] *Кучеров А.Н.* // ЖТФ, 2004. Т. 74. Вып. 7. С. 74–77.
[14] *Громов В.Г., Ершов А.П., Левин В.А., Шибков В.М.* // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44. № 2. С. 185–194.
[15] *Коган М.Н., Кучеров А.Н., Ефимов Б.Г., Скворцов В.В.* // 3-я школа-семинар по магнитноплазменной аэродинамике. М., 2008. С. 146–149.
[16] *Ершов А.П., Сурконт О.С., Тимофеев И.Б., Шибков В.М., Черников В.А.* // Теплофизика высоких температур 2004. Т. 42. № 4. С. 516–522.
[17] *Фабрикант Н.Я.* Аэродинамика. Ч. I. М., 1949.
[18] *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: ИЛ, 1961. 588 с. (*Mises R.* Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow. NY: Academic Press INC Publishers, 1958).
[19] *Кучеров А.Н.* // Ученые записки ЦАГИ. 1983. Т. 14. № 4. С. 47–57.