

01;05;06

## Спонтанное поперечное поле в примесном графене

© М.Б. Белоненко, Н.Г. Лебедев, А.В. Пак, Н.Н. Янюшкина

Волгоградский государственный университет,  
400062 Волгоград, Россия  
e-mail: pak.anastasia@gmail.com, yana@inbox.ru

(Поступило в Редакцию 24 июня 2010 г. В окончательной редакции 9 ноября 2010 г.)

В рамках периодической модели Андерсона и метода „среднего электрона“ показано, что в примесном графене при приложении внешнего постоянного электрического поля возможно спонтанное появление электрического поля, перпендикулярного приложенному. Данный эффект можно связать с неравновесностью электронной подсистемы графена. Выявлены характеристики спонтанного поля в зависимости от параметров задачи.

### Введение

Возросший в последнее время интерес к нелинейным явлениям значительно стимулировал создание материалов, способных проявлять нелинейные свойства в легко достижимых экспериментально условиях. Одним из таких материалов является графен, представляющий собой структуру, состоящую из одного слоя атомов углерода, и имеющий плоскую гексагональную решетку [1–4]. Большая подвижность электронов в графене и его уникальные электрофизические характеристики привлекают к нему внимание, как к одной из альтернатив кремниевой базы современной микроэлектроники [1–4].

Экспериментальные исследования [5] показали, что электромагнитные волны, распространяющиеся в углеродных структурах, становятся сильно нелинейными уже при относительно слабых полях, что влечет за собой возможность распространения в углеродных нанотрубках и графене электромагнитных уединенных волн, которые являются аналогами солитонов или даже солитонами. Обсуждаемые свойства углеродных структур вызвали как повышенный теоретический интерес, так и попытки применения в устройствах нелинейной оптики [5]. Нелинейность, согласно выводам, сделанным в этих работах, возникает вследствие изменения классической функции распределения электронов и непараболического закона дисперсии электронов.

Изучение фазовых переходов представляет собой одну из парадигм современной фундаментальной физики. В частности, одно из важнейших мест во всем многообразии фазовых переходов занимает неравновесный фазовый переход, обязанный своему появлению приложению внешних полей той или иной природы.

В работах [6,7] теоретически было показано, что в присутствии сильного электрического поля наблюдаются неравновесные фазовые переходы в электронном газе в полупроводниках с объемно-центрированной кубической решеткой. Эффект проявляется в спонтанном возникновении поперечного электрического поля  $E_x$ , играющего роль параметра порядка. При этом приложенное электрическое поле  $E_y$ , направленное

вдоль оси симметрии кристалла, является управляющим параметром. Необходимым условием существования поперечного поля, как показано в данных работах, является неаддитивность электронного спектра  $\varepsilon(\mathbf{p}) \neq \varepsilon(p_x) + \varepsilon(p_y) + \varepsilon(p_z)$ , где  $\mathbf{p}$  — квазиимпульс электронов. Электронный спектр в объемно-центрированной кубической решетке становится неаддитивным

$$\varepsilon(\mathbf{p}) \propto \cos(p_x a / 2\hbar) \cos(p_y a / 2\hbar) \cos(p_z a / 2\hbar),$$

где  $a$  — постоянная решетки.

Отметим, что условие неаддитивности выполняется в чистом графене, зонная структура которого предсказана еще в середине XX в. [8]. Но физически более интересен графен с примесями, как в силу того, что графен легко адсорбирует различные атомы [9], так и силу того, что в примесном графене будет повышенная концентрация электронов в зоне проводимости, что важно для практических приложений. Кроме того, спектр должен быть ограничен, т.е. энергия электрона не может превышать определенной величины.

Все вышеперечисленные условия выполняются и для графена с примесями, поэтому можно исследовать возможность существования фазовых переходов в примесном графене, что должно проявляться в появлении поперечной компоненты  $E_x$  в присутствии поля  $E_y$ , которое и будет играть роль управляющего параметра.

Появление спонтанного поперечного поля важно и в свете современных тенденций использования графена как базы для транзисторов [10], а именно возникшее спонтанное поперечное поле будет отклонять электроны, что может существенно сказаться на вольт-амперных характеристиках графенового транзистора. Поэтому задача исследования отклика двумерной электронной системы с учетом взаимодействия электронов примеси и электронов графена представляется достаточно актуальной.

## Модель и основные уравнения

Электронную подсистему графена с примесями удобно описывать в рамках периодической модели Андерсона [11] в приближении Хюккеля [12], принимающего во внимание динамику только  $\pi$ -электронов. В этой модели учитываются кинетическая энергия электронов и энергия электронов примеси и пренебрегается энергией электронов внутренних оболочек атомов и электронов, участвующих в образовании химических связей  $\sigma$ -типа, а также энергией колебаний атомов кристаллической решетки. Взаимодействие электронов кристаллита и примеси в модели учитывается путем потенциала гибридизации. Данная модель успешно применялась для изучения атомарной адсорбции на поверхности металлов и полупроводников [13].

Для графена любой взаимодействующий с ним атом является адсорбированным атомом (адатомом), который можно рассматривать в качестве примеси. Большое число публикаций по графену свидетельствует, что наибольший интерес вызывает адсорбция водорода. Одна из причин повышенного интереса заключается в том, что при определенной концентрации адатомов водорода в графене происходит переход полуметалл–диэлектрик [14]. Поэтому в качестве примеси целесообразно рассмотреть адсорбированный атомарный водород.

Гамильтониан периодической модели Андерсона можно записать в виде, удобном для рассмотрения электронного спектра в графене [11],

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} + \sum_a \varepsilon_a \sum_{\sigma} a_{\sigma}^+ a_{\sigma} + U n_{a\sigma} n_{a-\sigma} + \sum_{ak\sigma} V_{ka} c_{k\sigma}^+ a_{\sigma} + \sum_{ak\sigma} V_{ka}^* a_{\sigma}^+ c_{k\sigma}, \quad (1)$$

где  $c_{k\sigma}(c_{k\sigma}^+)$  — ферми-операторы рождения и уничтожения электронов в кристалле с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и спином  $\sigma$ ,  $a_{\sigma}(a_{\sigma}^+)$  — ферми-операторы рождения и уничтожения электронов со спином  $\sigma$  на атоме примеси,  $n_{a\sigma} = a_{\sigma}^+ a_{\sigma}$  — оператор числа электронов примеси,  $\varepsilon_a$  — энергия электрона на атоме примеси,  $\varepsilon_k$  — электронный спектр (зонная структура) идеального кристалла,  $V_{ka}$  — матричный элемент гибридизации состояний примеси и атома углерода,  $U$  — кулоновская энергия взаимодействия электронов на атоме примеси.

Закон дисперсии  $\varepsilon_k$ , который описывает свойства идеального графена, имеет хорошо известный вид [8]

$$\varepsilon_k = \pm \gamma \sqrt{1 \pm 4 \cos(ap_x) \cos\left(\frac{ap_y}{\sqrt{3}}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{ap_y}{\sqrt{3}}\right)}, \quad (2)$$

где  $\gamma \approx 2.7 \text{ eV}$ ,  $a = 3b/2\hbar$ ,  $b = 0.142 \text{ nm}$  — расстояние между соседними атомами углерода в графене,  $k = (p_x, p_y)$  — квазиимпульс электронов в зоне Бриллюэна, знаки перед корнем относятся к зоне проводимости

и валентной зоне соответственно. Наличие вырождения в некоторых особых точках зоны Бриллюэна графена на уровне Ферми ( $0 \text{ eV}$ ) свидетельствует о проявлении графеном проводящих свойств [4,8].

Рассмотрим вычисление параметров эффективного гамильтониана (1) на примере атомарного водорода, адсорбированного на поверхности графена. При выборе данного типа примеси параметр модели  $U = 0$ , так как в атомарном водороде содержится только один электрон в валентной оболочке.

Потенциал гибридизации в гамильтониане Андерсона (1) представляет собой энергию электрона, переходящего с примеси на кристалл. Обычно считают, что матричный элемент  $V_{ka} = V$ , т.е. не зависит от волнового вектора  $\mathbf{k}$  [13]. Поэтому в работе предлагается оценить его из квантово-химического подхода, а именно как резонансный матричный элемент в полуэмпирических методах на базе MNDO [12]. В этом случае потенциал  $V$  определяется интегралом перекрывания волновых функций  $s$ -орбитали (атома водорода) и  $p_z$ -орбитали (атома углерода)

$$V = \frac{1}{2} (\beta_H + \beta_C) S_{HC}, \quad S_{HC} = \int \Psi_{1s}(\mathbf{r}) \Psi_{2p_z}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3)$$

$$\Psi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-\rho}, \quad \rho = \frac{zr}{a_0}, \quad z(H) = 1,$$

$$\Psi_{2p_z} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2} \rho e^{-\rho/2} \cos\theta, \quad \rho = \frac{zr}{a_0}, \quad z(C) = 6,$$

где  $S_{HC}$  — интеграл перекрывания волновых функций,  $\beta_H = -6.99 \text{ eV}$  и  $\beta_C = -7.93 \text{ eV}$  — резонансные параметры квантово-химического полуэмпирического метода MNDO [12],  $a_0$  — боровский радиус,  $z$  — величина заряда ядра атома. Оценки потенциала гибридизации дают величину  $V = -1.43 \text{ eV}$ .

Для оценки энергии электрона примеси  $\varepsilon_a$  используется метод, описанный в работах [13,14] и основанный на том, что электрон адатома испытывает отталкивание со стороны электронов подложки. В результате получается следующая формула [14]:

$$\tilde{\varepsilon}_a = A + I + \frac{e^2}{4l},$$

где  $I$  — потенциал ионизации атома водорода, равный  $-13.6 \text{ eV}$ ,  $e$  — элементарный заряд,  $l = 1.2 \text{ \AA}$  — расстояние от центра адатома до плоскости его изображения в подложке, составляющее величину порядка атомного радиуса адатома (длина адсорбированной связи), которая была оценена из квантово-химических полуэмпирических расчетов,  $A$  — работа выхода графена, равная  $5.11 \text{ eV}$  [14]. Из вычислений по приведенной формуле следует  $\varepsilon_a = -5.72 \text{ eV}$ .

Для нахождения спектра элементарных возбуждений, описываемых эффективным гамильтонианом (1), воспользуемся математическим аппаратом функций Гри-

на [15]. Так, уравнения на образы Фурье одночастичных функций Грина (далее просто функции Грина) имеют вид

$$\begin{aligned}\omega \langle \langle a_\lambda | a_\lambda^+ \rangle \rangle &= \frac{i}{2\pi} + \varepsilon_a \langle \langle a_\lambda | a_\lambda^+ \rangle \rangle + \sum_k V_{ka}^* \langle \langle c_{k\lambda} | a_\lambda^+ \rangle \rangle, \\ \omega \langle \langle a_\sigma | c_{k\sigma}^+ \rangle \rangle_\omega &= \varepsilon_a \langle \langle a_\sigma | c_{k\sigma}^+ \rangle \rangle_\omega + V_{ka}^* \langle \langle c_{k\sigma} | c_{k\sigma}^+ \rangle \rangle_\omega, \\ \omega \langle \langle a_\sigma | c_{lv}^+ \rangle \rangle_\omega &= \varepsilon_a \langle \langle a_\sigma | c_{lv}^+ \rangle \rangle_\omega + \sum_q V_{qa}^* \langle \langle c_{qv} | c_{lv}^+ \rangle \rangle_\omega, \\ \omega \langle \langle a_\sigma | c_{k\sigma}^+ \rangle \rangle_\omega &= \varepsilon_a \langle \langle a_\sigma | c_{k\sigma}^+ \rangle \rangle_\omega + V_{ka}^* \langle \langle c_{k\sigma} | c_{k\sigma}^+ \rangle \rangle_\omega, \quad (4)\end{aligned}$$

где  $\omega$  — энергетическая переменная, двойными угловыми скобками обозначены соответствующие функции Грина.

Система уравнений (4) решается аналитически, в силу приближений используемой модели, пренебрегающей кулоновскими корреляциями. В итоге выражение для функции Грина кристаллической решетки (в пренебрежении зависимости от спиновой переменной) с учетом адсорбированного атома дефекта будет иметь следующий вид:

$$\langle \langle c_{k\sigma} | c_{k\sigma}^+ \rangle \rangle = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \varepsilon_k) - \sum_a \frac{|V_{ka}|^2}{\omega - \varepsilon_a}}. \quad (5)$$

Аналитическое выражение для функции Грина кристаллической решетки графена (5) позволяет определить спектр электронов в кристалле с адсорбированными атомами водорода. В силу однотипности адсорбированных атомов сумма в знаменателе (5) легко вычисляется. Собственные значения энергий электронов кристаллической решетки с присоединенными атомами дают полюса функций Грина [15]

$$E(k) = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_a + \varepsilon_k \pm \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_k)^2 + 4 \frac{N_H}{N} |V|^2} \right], \quad (6)$$

где  $N$  — число элементарных ячеек в кристалле,  $N_H$  — число атомов водорода, адсорбированных на графене.

Отношение чисел  $N_H/N$  фактически определяет концентрацию атомов примеси. Модель Андерсона применима для случая малых концентраций дефектов, т.е. когда выполняется условие  $N_H/N \ll 1$ . Согласно общим свойствам модели Андерсона [11], в квазичастичном спектре возникает щель вблизи уровня дефекта. Примесный уровень  $\varepsilon_a$ , как было рассчитано выше, лежит глубоко в валентной зоне, поэтому малые концентрации примесей не могут существенно изменить зонную структуру вблизи уровня Ферми и свойства графена в целом. Однако наличие примесей и, как следствие, щель в валентной зоне приводят к появлению электронов в зоне проводимости [19].

## Фазовый переход в графене с адсорбированными атомами водорода

Рассмотрим отклик системы примесных графеновых слоев на внешнее электрическое поле  $E_y$ , приложенное вдоль оси  $y$  (рис. 1). Для этого применим методику [16], апробированную для изучения фазовых переходов в графене с дефектами замещения, и воспользуемся методом „среднего электрона“ [17], согласно которому уравнение движения электрона может быть записано в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E}, \quad (7)$$

где  $q$  — заряд электрона.

Решения уравнения (7) легко получить аналитически интегрированием с заданными начальными условиями

$$p_x = p_{0x} + qE_x t$$

$$p_y = p_{0y} + qE_y t,$$

где  $p_{0x}, p_{0y}$  — начальные значения компонент импульса  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ .

Скорости электронов  $v_x$  и  $v_y$  в соответствующих зонах можно определить по стандартному правилу

$$v(p_x) = \frac{\partial E(p_x, p_y)}{\partial p_x}, \quad v(p_y) = \frac{\partial E(p_x, p_y)}{\partial p_y}.$$

Согласно методу „среднего электрона“, используем определение плотности тока [18], записанное в единицах времени релаксации

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty qv(p(t)) \exp(-t) dt, \quad (8)$$

где  $\mathbf{p}(t)$  — решение уравнения (7), время релаксации принято за единицу.

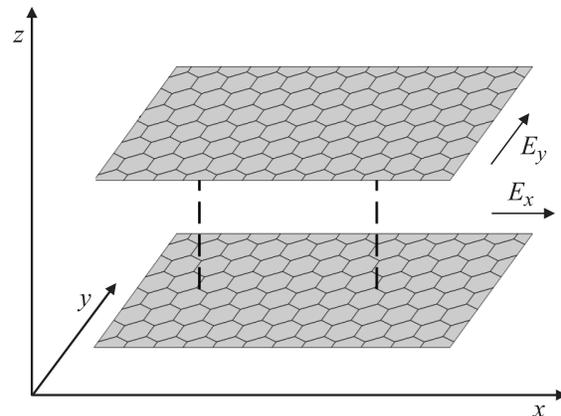


Рис. 1. Геометрия задачи.

Закон дисперсии (6) электронов графена с примесями удобно представить в виде ряда Фурье

$$E(p_x, p_y) = \sum_{m,n} A_{mn} \cos(mp_x) \cos(np_y),$$

$$A_{mn} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon(p_x, p_y) \cos(mp_x) \cos(np_y) dp_x dp_y.$$

В этом случае окончательное выражение для  $x$ -компоненты плотности тока после несложных вычислений будет иметь вид

$$j_x = \sum_{m,n} A_{mn} \left[ \cos\left(2\pi \frac{m}{3}\right) + (-1)^i \cos\left(\pi \frac{k}{3}\right) \right] \times \frac{m^2 E_x (n^2 E_y^2 - 1 - m^2 E_x^2)}{(1 + (nE_y + mE_x)^2)(1 + (nE_y - mE_x)^2)}. \quad (9)$$

Для заданного приложенного электрического поля  $E_y$  поперечное поле  $E_x$  определяется, исходя из граничных условий. Полагаем, что цель в направлении оси  $x$  разомкнута, т. е.

$$j_x = 0. \quad (10)$$

Это условие соответствует некоторому решению для поперечного поля  $E_x = E_x(E_y)$ . Уравнение (10) имеет два решения

$$\begin{cases} E_x = 0, \\ \sum_{m,n} A_{mn} \left[ \cos\left(2\pi \frac{m}{3}\right) + (-1)^i \cos\left(\pi \frac{k}{3}\right) \right] \times \\ \times \frac{m^2 (n^2 E_y^2 - 1 - m^2 E_x^2)}{(1 + (nE_y + mE_x)^2)(1 + (nE_y - mE_x)^2)} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

При некоторых значениях параметров, входящих во второе уравнение (11), в одном из двух взаимно противоположных направлениях спонтанно возникает поперечное поле. В этом случае имеем дело с неравновесным фазовым переходом первого рода. Появление поперечной компоненты поля является, возможно, простым примером самоорганизации в примесном графене.

## Результаты численного анализа

Второе уравнение (11) решалось численно для получения зависимости поперечной компоненты от заданного внешнего поля  $E_x = E_x(E_y)$ .

Типичная зависимость плотности тока  $j_x$  от величины  $E_x$ , которая описывается уравнением (11), представлена на рис. 2. Из приведенной зависимости видно, что помимо обычного участка с отрицательной дифференциальной проводимостью, который свойствен всем веществам с периодическим законом дисперсии, на вольтамперной характеристике присутствует участок с абсолютно отрицательной проводимостью, что можно связать с неравновесностью системы электронов в

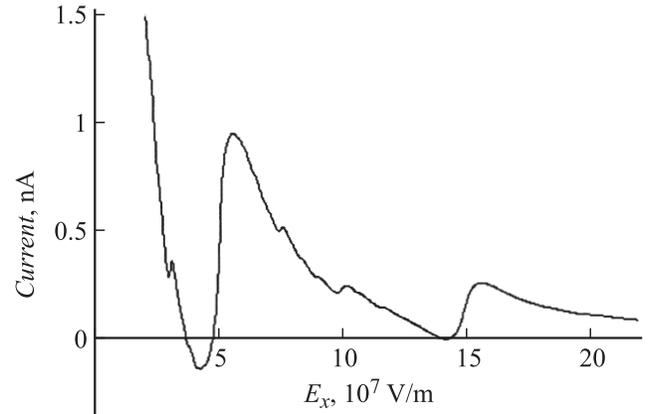


Рис. 2. Зависимость тока от поля  $E_x$ , когда поле  $E_y$  фиксировано ( $E_y = 6 \cdot 10^7$  V/m).

графене с примесями, обусловленной в первую очередь сильной непараболичностью закона дисперсии. Отметим также, что подобное состояние может привести к разбиению углеродной нанотрубки на домены, подробное рассмотрение которых выходит за рамки данной работы.

Зависимость поперечной компоненты поля  $E_x$  от  $E_y$ , которая определяется как ненулевое решение уравнения (11), показана на рис. 3 и 4. Как видно из рисунков существуют два ненулевых решения. Заметим, что аналогичная зависимость от параметра  $\varepsilon_a$  проявляется слабо, и, что более важно, существуют два ненулевых решения. Одно из этих решений (меньшее по модулю), как будет показано ниже, является термодинамически неустойчивым.

Отметим, что постоянное поле возникает не от нулевых значений, а значит, возникающий эффект в терминах

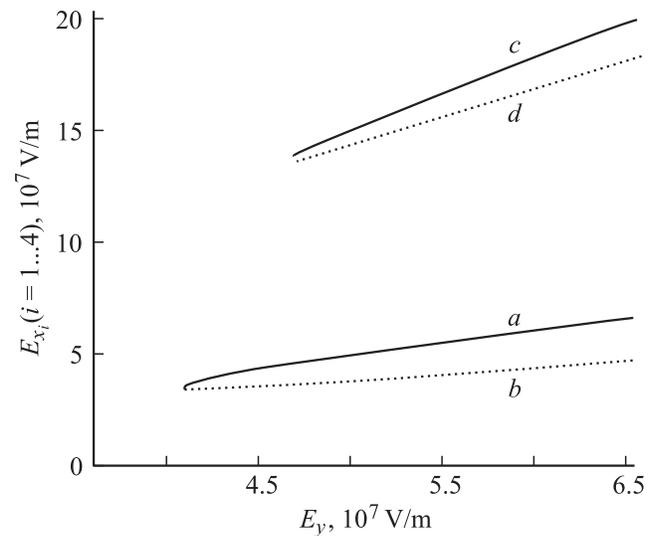
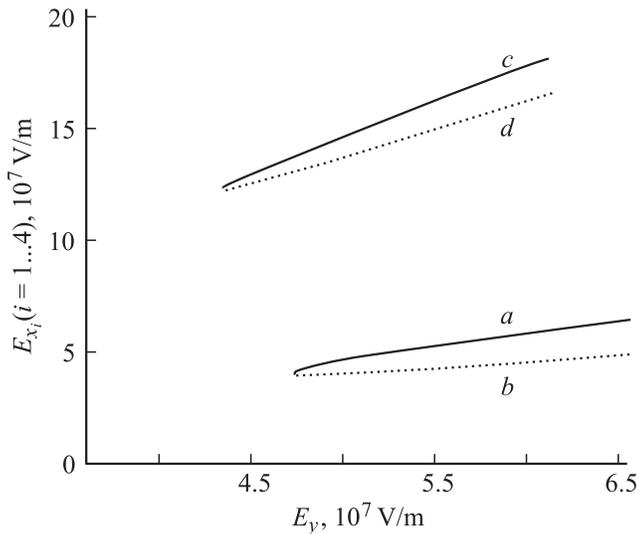
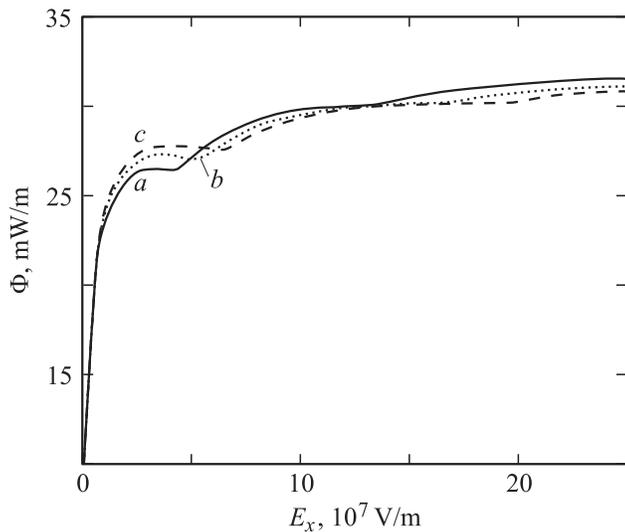


Рис. 3. Зависимость поля  $E_x$  от поля  $E_y$ :  $\varepsilon_a = -5.22$  eV,  $V = -1.43$  eV;  $a$  и  $c$  соответствуют устойчивому решению,  $b$  и  $d$  неустойчивому.



**Рис. 4.** Зависимости поля  $E_x$  от поля  $E_y$ :  $\varepsilon_a = -2.61$  eV,  $V = -1.43$  eV;  $a$  и  $c$  соответствуют устойчивому решению,  $b$  и  $d$  неустойчивому.



**Рис. 5.** Зависимость функции  $\Phi$  от  $E_x$  при фиксированном значении  $E_y$ , V/m:  $a - 6.0 \cdot 10^7$ ,  $b - 6.2 \cdot 10^7$ ,  $c - 6.4 \cdot 10^7$ .

теории фазовых переходов должен быть проинтерпретирован как фазовый переход первого рода. Возникновение постоянного поля можно связать с участком на вольт-амперной характеристике с абсолютной отрицательной проводимостью. А именно вследствие того, что система электронов неравновесная, происходит перераспределение электронов в импульсном пространстве таким образом, что возникающее поле стремится компенсировать действие поперечного поля.

Возникающее спонтанно поперечное электрическое поле  $E_x$  может оказаться термодинамически неустойчивым в отличие от всегда устойчивого решения для разомкнутой в направлении  $x$  цепи  $E_x = 0$ . Для исследова-

вания на устойчивость используем метод, описанный в работе [6], и введем функцию

$$\Phi(E_x) = \int_0^{E_x} j_x(E'_x) dE'_x + \text{const}, \quad E_y = \text{fixed}. \quad (12)$$

Данная функция обычно называется синергетическим потенциалом и выступает в роли аналога термодинамического потенциала для неравновесных задач. Согласно [6], условия устойчивости решения есть

$$\frac{d\Phi}{dE_x} = 0, \quad \frac{d^2\Phi}{dE_x^2} > 0. \quad (13)$$

Это фактически означает, что в данной неравновесной ситуации функция (12) достигает своего минимума в стационарном состоянии, и, таким образом, функция  $\Phi$  может выступать аналогом термодинамического потенциала для равновесных систем. Так, зависимость „потенциала“  $\Phi$  от поля  $E_x$  для ряда значений  $E_y$  отображена на рис. 5.

Из проведенных расчетов видно, что функция  $\Phi$  имеет две точки минимума и две точки максимума. Отметим, что точки максимума соответствуют меньшему по модулю ненулевому решению (11), а точки минимума — большему по модулю решению. Это, в свою очередь, означает, что большее по модулю решение устойчиво. Отметим, что пунктирные ветви на рис. 3 и 4 соответствуют максимуму функции  $\Phi$  (неустойчивому решению), а сплошные — минимуму (устойчивому решению).

Данный переход, в котором спонтанно возникает электрическое поле, следует отнести к сегнетоэлектрическому типу, причем роль параметра порядка будет играть поперечное поле  $E_x$ , а аналогом температуры (управляющим параметром) будет выступать поле  $E_y$ .

## Заключение

В заключение сформулируем основные выводы из данной работы:

1. Выявлено возникновение электрического поля, перпендикулярного приложенному внешнему электрическому полю в графене с адсорбированными атомами водорода, описываемому в рамках модели Андерсона.
2. Наиболее сильно спонтанно возникающее электрическое поле зависит от величины матричного элемента перехода электрона из адсорбированного атома в графен — потенциала гибридизации.
3. Анализ синергетического потенциала показал, что возникающее состояние со спонтанным поперечным электрическим полем является устойчивым.

Работа проведена в рамках реализации ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009–2013 гг. (проект № НК-16(3)).

## Список литературы

- [1] *Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A.* // *Science*. 2004. Vol. 306. P. 666–669.
- [2] *Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Katsnelson M.I., Grigorieva I.V., Firsov A.A.* // *Nature*. 2005. Vol. 438. P. 197–200.
- [3] *Zhang Y., Tan J.W., Stormer J.L., Kim P.* // *Nature*. 2005. Vol. 438. P. 202–204.
- [4] *Abergel D.S.L., Apalkov V., Berashevich J., Ziegler K., Chakraborty T.* // *Advances in Physics*. 2010. Vol. 59. № 4. P. 261–482.
- [5] *Желтиков А.М.* Сверхкороткие импульсы и методы нелинейной оптики. М.: Физматлит, 2006. 296 с.
- [6] *Шмелев Г.М., Эпштейн Е.М.* // *ФТТ*. 1992. Т. 34. С. 2565.
- [7] *Эпштейн Е.М., Шмелев Г.М., Маглеванный И.И.* // *ФТТ*. 1996. Т. 38. С. 3478.
- [8] *Wallace R.R.* // *Phys. Rev.* 1947. Vol. 71. P. 622–634.
- [9] *Schedin F., Geim A.K., Morozov S.V., Hill E.W., Blake P., Katsnelson M.I., Novoselov K.S.* // *Nature Materials*. 2007. Vol. 6. P. 652–655.
- [10] *Geim A.K.* // *Science*. 2009. Vol. 324. P. 1530–1534.
- [11] *Изюмов Ю.А., Чащин Н.И., Алексеев Д.С.* Теория сильно коррелированных систем. Метод производящего функционала. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2006. 384 с.
- [12] *Степанов Н.Ф.* Квантовая механика и квантовая химия. М.: Мир, 2001. 519 с.
- [13] *Давыдов С.Ю., Трошин С.В.* // *ФТТ*. 2007. Т. 49. Вып. 8. С. 1508–1513.
- [14] *Давыдов С.Ю., Сабирова Г.И.* // *Письма в ЖТФ*. 2010. Т. 36. Вып. 24. С. 77–84.
- [15] *Тябликов С.В.* Методы квантовой теории магнетизма. М.: Наука, 1975. 528 с.
- [16] *Yanyushkina N.N., Belonenko M.B., Lebedev N.G.* // *Materials Sciences and Applications*. 2010. Vol. 1. P. 72–76.
- [17] *Epshtein E.M., Maglevanny I.I., Shmelev G.M.* // *J. Phys. Condens. Matter*. 1996. Vol. 8. P. 4 509–4 514.
- [18] *Bass F.G., Teterov A.P.* // *Phys. Rep.* 1985. Vol. 140. P. 237–322.
- [19] *Bruno Uchoa, Castro Neto A.H.* // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 98. P. 146 801.