

Индукцированный шумом рост регулярных колебаний системы магнитных диполей

© А.М. Шутый

Ульяновский государственный университет,
432970 Ульяновск, Россия
e-mail: shuty@mail.ru

(Поступило в Редакцию 21 июля 2010 г. В окончательной редакции 1 февраля 2011 г.)

На основе численного анализа исследована динамика системы, состоящей из двух или цепочки тел, обладающих дипольными магнитными моментами и моментами инерции. При построении параметрической бифуркационной диаграммы выявлены условия реализации колебательных режимов, имеющих сильную чувствительность к шуму, что приводит к усилению отклика системы на дополнительное гармоническое возбуждение. Рассмотрены особенности данной динамики связанных магнитных диполей, рассчитаны спектральные характеристики режимов.

Введение

В проводимых в настоящее время исследованиях хаотических эффектов [1–3] актуальным является не только выявление условий генерации или подавление хаоса в системах, но также изучение влияния хаоса и стохастических сигналов на различные динамические режимы. Это связано как со стремлением анализировать модели, приближенные к реальным системам, в динамику которых включаются различные случайные факторы, так и с возможным использованием регулируемых хаотических состояний в технологиях управления и обработки информации [3], кроме того, это связано с выявлением ряда интересных эффектов, обусловленных влиянием шума [1]. Наиболее известным из указанных эффектов является стохастический резонанс [4–7], при котором отклик системы на регулярный сигнал имеет место только при дополнительном воздействии шума, причем рост интенсивности шума вначале приводит к увеличению относительного вклада гармонической составляющей в динамике системы, а затем — к его падению. При исследовании влияния стохастических полей на динамическую систему во многих случаях важным является анализ реализуемых в ней состояний бистабильности [1,3,8] и выявление возможностей управления бистабильными состояниями, так как в них система оказывается неустойчивой по отношению к дополнительным возмущениям. При этом как для анализа процессов самоорганизации пространственных и временных структур [9,10], так и для реализации фазовых переходов или сложных динамических режимов [11–13] весьма удобными являются магнитные системы благодаря возможности эффективного управления ими с помощью внешнего поля. Наряду с этим важным объектом исследований представляют системы магнитных частиц, позволяющие создавать новые среды при внедрении их в твердотельные пористые матрицы [14,15]. Интерес к исследованию дипольных систем и кластеров связан прежде всего со свойствами, отличными от свойств отдельных составляющих их частиц и от свойств объем-

ного вещества [16]. В свою очередь, показано, что система частиц в большинстве случаев испытывает процесс агрегации с формированием за счет диполь-дипольного взаимодействия различных по объему кластеров [17,18], в пределах которых связь диполей значительно сильнее связи между кластерами. В настоящей работе на основе построения параметрической бифуркационной диаграммы и последующего численного анализа выявляются и исследуются динамические режимы системы магнитных диполей, характеризуемые большой чувствительностью к шумовому сигналу. При этом показано, что представленный эффект отличается от стохастического резонанса. Из проведенного ранее анализа [19] следует, что рассматриваемые особенности нелинейной динамики относятся как к системе двух связанных тел, так и к цепочке диполей.

Основные уравнения и бифуркационная диаграмма

Рассматривая систему диполей с механическими моментами инерции, полагаем, что они связаны посредством диполь-дипольного взаимодействия, и каждый из них способен вращаться вокруг неподвижной точки, которая совпадает с центром симметрии и является также центром инерции диполя. Диполи предполагаются однородными и шарообразными [20]. Материал объектов считается магнитоупругим. В случае двух связанных диполей принимается, что они удалены друг от друга на расстояние $\mathbf{r} = a\mathbf{e}_z$ в направлении оси z . В присутствии внешнего переменного магнитного поля $\mathbf{H} \sin(\tilde{\omega}_0 t)$ система динамических уравнений для связанных магнитных диполей имеет вид [19]

$$\begin{aligned}
 J_i \frac{d\omega_i}{dt} + \alpha_i \omega_i &= \mathbf{p}_i \times \left(\mathbf{H} \sin(\tilde{\omega}_0 t) + \frac{3\mathbf{r}_{3-i}(\mathbf{p}_{3-i}\mathbf{r}_{3-i})}{a^5} - \frac{\mathbf{p}_{3-i}}{a^3} \right), \\
 \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} &= \omega_i \times \mathbf{p}_i,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где \mathbf{p}_i — дипольные магнитные моменты ($i = 1, 2$), $\omega_i = d\varphi_i/dt$ — угловые скорости магнитных диполей (φ_{ij} — угол поворота i -го диполя вокруг оси $j = x, y, z$), J_i — моменты инерции, α_i — параметры диссипации. Переходя к безразмерным параметрам, запишем систему (1) в явном виде для идентичных магнитных диполей: $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = p$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $J_1 = J_2 = J$ и внешнего переменного поля, принятого линейно поляризованным и ориентированным вдоль оси z ($H = H_z$):

$$\frac{d\omega_{ix}}{d\tau} = -\beta\omega_{ix} + f\rho_{iy} \sin(\Omega_0\tau) + \rho_{iz}\rho_{3-iy} + 2\rho_{iy}\rho_{3-iz},$$

$$\frac{d\omega_{iy}}{d\tau} = -\beta\omega_{iy} - f\rho_{ix} \sin(\Omega_0\tau) + \rho_{iz}\rho_{3-iy} - 2\rho_{ix}\rho_{3-iz},$$

$$\frac{d\omega_{iz}}{d\tau} = -\beta\omega_{iz} + \rho_{iy}\rho_{3-iy} - \rho_{ix}\rho_{3-iz},$$

$$\frac{d\rho_{ix}}{d\tau} = \omega_{iy}\rho_{iz} - \omega_{iz}\rho_{iy}, \quad \frac{d\rho_{iy}}{d\tau} = \omega_{iz}\rho_{ix} - \omega_{ix}\rho_{iz},$$

$$\frac{d\rho_{iz}}{d\tau} = \omega_{ix}\rho_{iy} - \omega_{iy}\rho_{ix}. \quad (2)$$

Здесь дифференцирование проводится по безразмерному времени $\tau = vt$, где $v = \sqrt{p^2/Ja^3}$ (при этом $\omega_i = d\varphi_i/d\tau$), $\rho_{ij} = p_{ij}/p$ — нормированные компоненты векторов магнитных моментов. Остальные безразмерные параметры выражаются через исходные следующим образом:

$$\Omega_0 = \tilde{\omega}_0/v, \quad \beta = \alpha/(vJ), \quad f = pH(v^2J).$$

Расчеты показали [19], что в случае цепочки связанных идентичных диполей с периодическими граничными условиями под воздействием однородного гармонического поля реализуется динамика, при которой либо вся система колеблется синфазно с одной амплитудой (т.е. как единое целое), либо система разбивается на две подсистемы, колебательные режимы которой подобны режимам двух связанных диполей. Вышеприведенные уравнения (2) остаются верными для цепочки диполей (в которой соседние диполи в направлении оси z удалены друг от друга на расстояние a) при замене v на $\sqrt{2}v$, так как для цепочки в выражениях (2) должны быть удвоены слагаемые $\rho_{ij}\rho_{3-ij'}$ и $2\rho_{ij}\rho_{3-ij'}$. Таким образом, приведенные далее исследования колебательных режимов двух связанных диполей полностью соответствуют динамике цепочки идентичных диполей с в два раза меньшими моментами инерции $J' = J/2$, параметром диссипации $\alpha' = \alpha/2$ и при приложении к системе внешнего магнитного поля с амплитудой $\mathbf{H}' = \mathbf{H}/2$.

Устанавливающиеся под воздействием переменного магнитного поля нелинейные динамические режимы будем исследовать методами численного анализа. При этом наглядным является построение параметрических бифуркационных диаграмм [3,12]. На рис. 1 приведена диаграмма для одного из связанных диполей (или одной из подсистем цепочки диполей) на плоскости $(\psi_{1x}; \Omega_0)$, где $\psi_{1x} = \omega_{1x \max}$, $\omega_{1x \min}$, и каждому значению частоты Ω_0 соответствуют экстремальные значения угловой

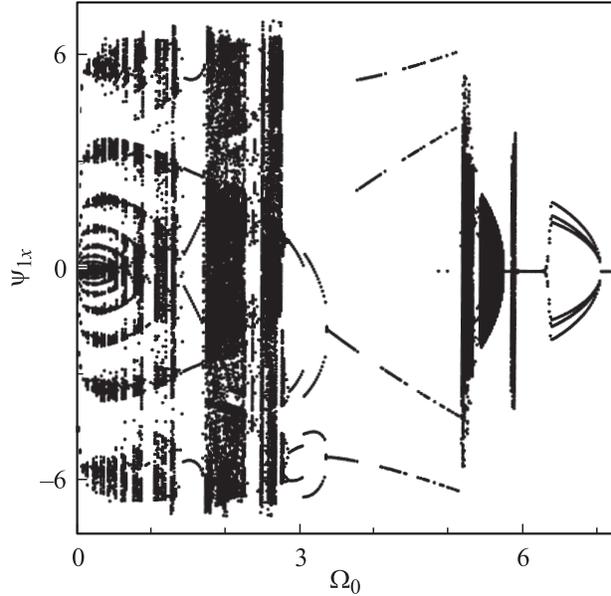


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма для одного из диполей (или одной из подсистем цепочки диполей): частотная зависимость экстремумов угловой скорости вращения диполей вокруг оси x ; $f = 20$, $\beta = 1.5$.

скорости вращения вокруг оси x при параметрах поля и диссипации соответственно $f = 20$, $\beta = 1.5$; начальные условия принимались следующими: $\omega_{ij}(0) = 0$, $\rho_{iz}(0) \approx 1$. При этом если на бифуркационной диаграмме одному значению частоты отвечает лишь одна точка, т.е. единственное значение ψ_{1x} , то имеет место либо отсутствие колебаний вокруг выбранной оси (когда $\psi_{1x} = 0$), либо равномерное вращение (когда $\psi_{1x} \neq 0$). В случае двух или большего конечного числа точек реализуются регулярные колебательные режимы: при $\omega_{1x \min} = -\omega_{1x \max}$ устанавливаются колебания относительно некоторого равновесного положения, при $|\omega_{1x \min}| \neq |\omega_{1x \max}|$ — режимы, при которых объекты совершают неограниченное число витков вокруг оси вращения, — далее подобные режимы будем называть вращательными. Множеству близко расположенных точек отвечает хаотическая динамика магнитных диполей (за исключением случаев, когда на достаточно больших частотах имеют место квазипериодические режимы).

На диаграмме можно выделить следующие частотные интервалы. При больших частотах переменного поля имеет место динамическая невосприимчивость. Уменьшение частоты приводит к возникновению регулярных колебаний с малыми амплитудами угловой скорости; угол отклонения магнитного диполя от начального положения при этом оказывается меньше π . Частотный интервал, отвечающий данным режимам, со стороны больших частот ограничен бифуркацией Хопфа, а со стороны меньших — частотным интервалом, отвечающим преимущественно хаотическим и квазипериодическим колебаниям [19]. Заметим, на частоте $\Omega_0 = 6$ и вблизи нее имеет место не отсутствие колебаний, а

устанавливаются колебания относительно оси u . Дальнейшее уменьшение частоты приводит к реализации вращательных регулярных режимов магнитных диполей. При этом выбор оси вращения, лежащей в общем случае в плоскости xu , зависит от флуктуации начальной ориентации диполей. Данным режимам соответствует продолжительный интервал частот, ограниченный слева интервалом, который отвечает хаотической динамике. Кроме того, существенным является то, что в этом случае реализуется динамическая бистабильность, при одинаковом внешнем поле и прочих равных параметрах системы (под воздействием флуктуаций) может устанавливаться вращение диполей как в одну, так и в другую стороны, т.е. устанавливаются режимы, отличающиеся знаком угловой скорости (на диаграмме выявляется только одна из возможностей, поэтому соответствующие ветви на ней имеют „пунктирный“ вид). Эта особенность далее будет использована для реализации состояний системы, чувствительных к слабому хаотическому сигналу, при которых стохастический сигнал увеличивает отклик системы на дополнительное регулярное воздействие. Строго говоря, состояние системы в данном частотном диапазоне является мультистабильным, и помимо представленных на диаграмме ветвей реализуются также ветви, отвечающие вращательным режимам с меньшей угловой скоростью, однако для выбранного (при построении диаграммы) равновесного положения системы диполей вероятность установления этих режимов достаточно низка. Последний из частотных интервалов характеризуется частой сменой регулярных и хаотических режимов с экстремальными значениями угловой скорости, расположенных вблизи выделенных значений.

Динамика системы под воздействием дополнительного гармонического и шумового сигналов

Исследуем систему диполей в случае параметров, отвечающих краю области вращательной динамики и реализации динамической бистабильности. Внешнее магнитное поле возьмем модулированным дополнительным гармоническим сигналом и включим также шумовую составляющую. При этом соответствующий параметр в системе (2) имеет следующий вид:

$$f(\tau) = f_0 + f_h \sin(\Omega_h \tau) + \xi(\tau),$$

где f_0 характеризует постоянную составляющую амплитуды внешнего поля, изменяющегося на основной частоте $\tilde{\omega}_0 = \nu \Omega_0$, f_h — нормированная амплитуда дополнительного сигнала на безразмерной частоте Ω_h ; шумовой сигнал, является белым гауссовым шумом с нулевым средним значением и функцией корреляции $\langle \xi(\tau) \xi(\tau + \xi) \rangle = 2D \delta(\xi)$ с интенсивностью $2D$.

На рис. 2 для одной из подсистем связанных диполей приведена временная зависимость угловой скорости ω_{1x}

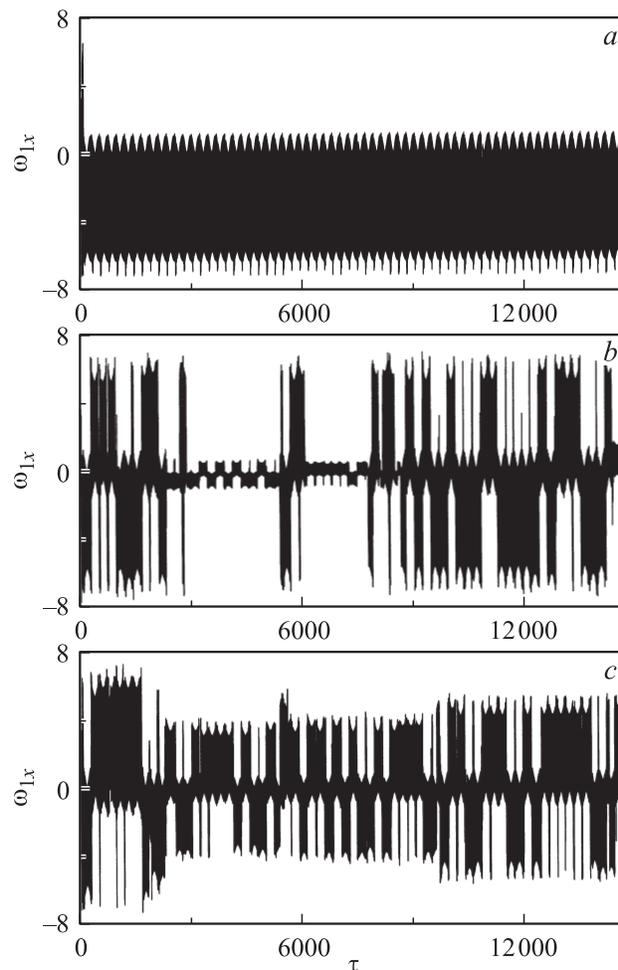


Рис. 2. Временная зависимость компоненты угловой скорости ω_{1x} для одной из подсистем связанных диполей при $f_0 = 20$, $f_h = 1.9$, $\Omega_0 = 2.8$, $\Omega_h = \Omega_0/100$, $\beta = 1.5$; интенсивность шума $2D = 0, 0.2, 3$ (a–c).

при параметрах системы: $f_0 = 20$, $f_h = 1.9$, $\Omega_0 = 2.8$, $\Omega_h = \Omega_0/100$, $\beta = 1.5$ (здесь и далее) и различной интенсивности шума $2D = 0, 0.2, 3$ (a, b, c). В отсутствие шумового сигнала, как видно из рисунка, 1-я подсистема совершает вращения преимущественно в одном направлении, с незначительной „возвратной“ динамикой; 2-я подсистема при этом (здесь и в рассмотренных далее режимах) движется в противоположном направлении ($\omega_{1j} = -\omega_{2j}$). Уже слабый шумовой сигнал вызывает сильное изменение динамики системы: вращение каждой из подсистем диполей начинает совершаться в равной степени как в одну, так и в другую стороны, а изменение направления вращения происходит хоть и случайным образом, но через промежутки времени, кратный периоду дополнительного гармонического сигнала. Усиление шума вызывает увеличение упорядоченности данной динамики — практически через каждый период гармонического сигнала имеет место резкое изменение угловой скорости до амплитудных противоположных по знаку значений. Таким образом, белый шум приводит к

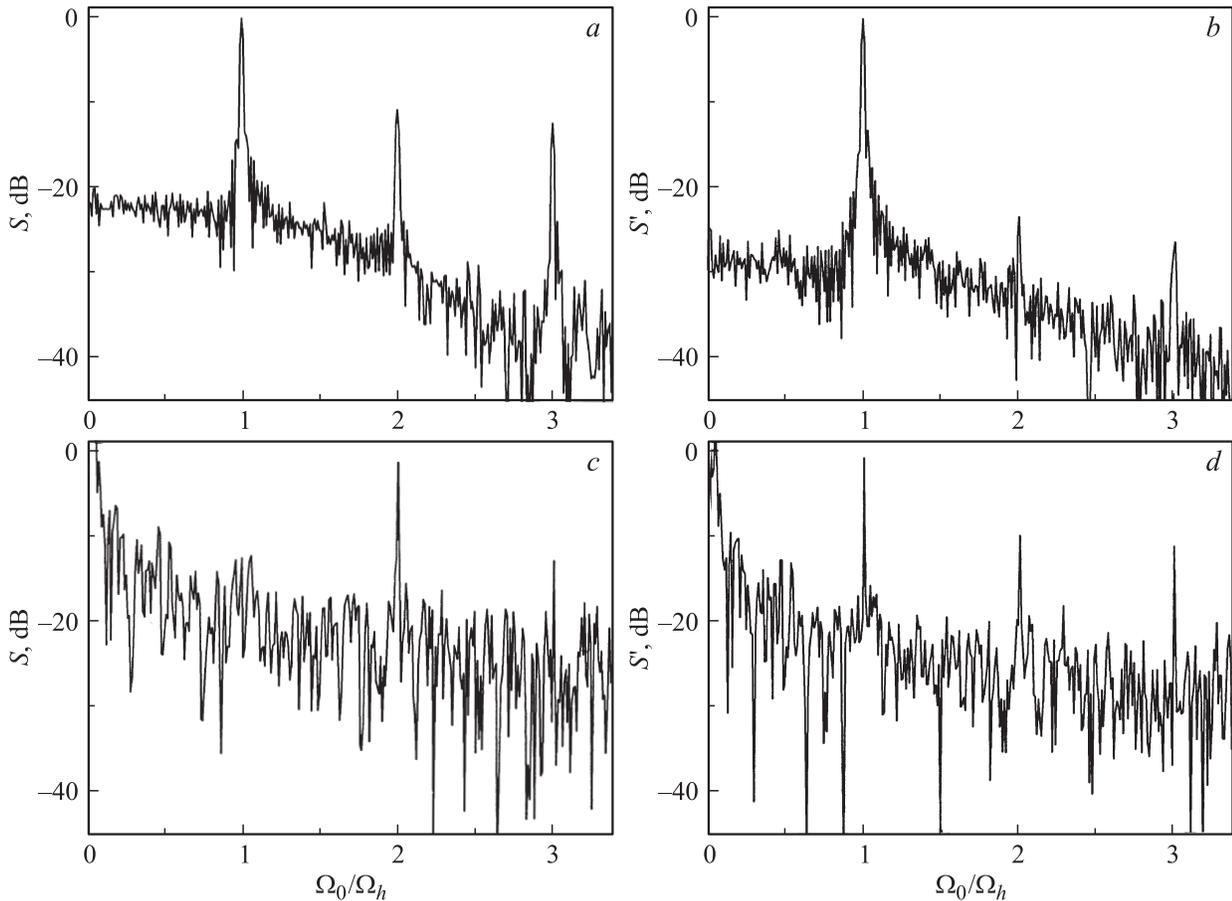


Рис. 3. Спектр нормированной мощности колебаний модуля x -компоненты угловой скорости (a, c) и модуля углового ускорения (b, d) для одной из подсистем диполей; для (a, c): $S = 10 \lg(S_\Omega/S_h)$, где S_Ω — мощность колебаний на частоте Ω , S_h — на частоте Ω_h в отсутствие шума; для (b, d): $S' = 10 \times \lg(S'_\Omega/S'_h)$ — аналогично; $f_0 = 20$, $f_h = 1.9$, $\Omega_0 = 2.8$, $\Omega_h = \Omega_0/100$, $\beta = 1.5$; $2D = 3$.

переходу от одного вращательного режима к другому. Данная особенность объясняется тем, что значения параметров выбраны вблизи границы области бистабильного состояния и области хаотической динамики. Модулирующее поле способно в рассматриваемом случае вывести систему в область хаотических колебаний только при дополнительном включении шумового сигнала, когда же система (на определенной фазе гармонического поля) снова выходит на вращательный режим, может установиться один из двух составляющих динамическую бистабильность режимов.

Для исследования спектра полученной динамики рассмотрим абсолютную величину x -компоненты угловой скорости одной из подсистем и производную по времени от данной компоненты. На рис. 3, a, c приведен спектр мощности колебаний $|\omega_{1x}(D)|$, отнесенный к соответствующей мощности колебаний на частоте Ω_h в отсутствие шума, на рис. 3, b, d — аналогичный спектр мощности колебаний величины $|\partial\omega_{1x}(D)/\partial\tau|$; a, b — отвечают отсутствию шумового сигнала, а c, d — шуму интенсивностью $2D = 3$. Видно, что воздействие шума приводит к появлению низкочастотных гармоник, а также к увеличению мощности на удвоенной частоте

гармонического сигнала $2\Omega_h$. При этом гармоника на частоте Ω_h исчезает в динамике величины $|\omega_{1x}|$, а в колебаниях углового ускорения она лишь несколько уменьшается; наблюдается также сужение соответствующих спектральных максимумов.

На рис. 4 приведена временная зависимость $\omega_{1x}(\tau)$ при параметрах, отвечающих другой границе области вращательной динамики диполей: $f_0 = 19$, $\Omega_0 = 5$ при $f_h = 4$, $\Omega_h = \Omega_0/200$ (a, b) и при $f_h = 3.88$, $\Omega_h = \Omega_0/300$ (c, d); интенсивность шума $2D = 0$ (a, c), $2D = 5$ (b, d). Видно, что в первом случае (a, b) изменение направления вращения имеет место и при отсутствии шума. Однако, так как состояние системы на данной частоте является мультистабильным, при этом случайным образом реализуются различные по величине всплески угловой скорости, и последующие переходы системы на вращательные режимы, характеризуемые различной величиной угловой скорости. Включение шумового сигнала приводит к заметному упорядочению динамики — регулярной (с частотой Ω_h) становится фаза колебаний, характеризующаяся изменением угловой скорости до значений, близких к амплитудным. После данной фазы на короткое время устанавлива-

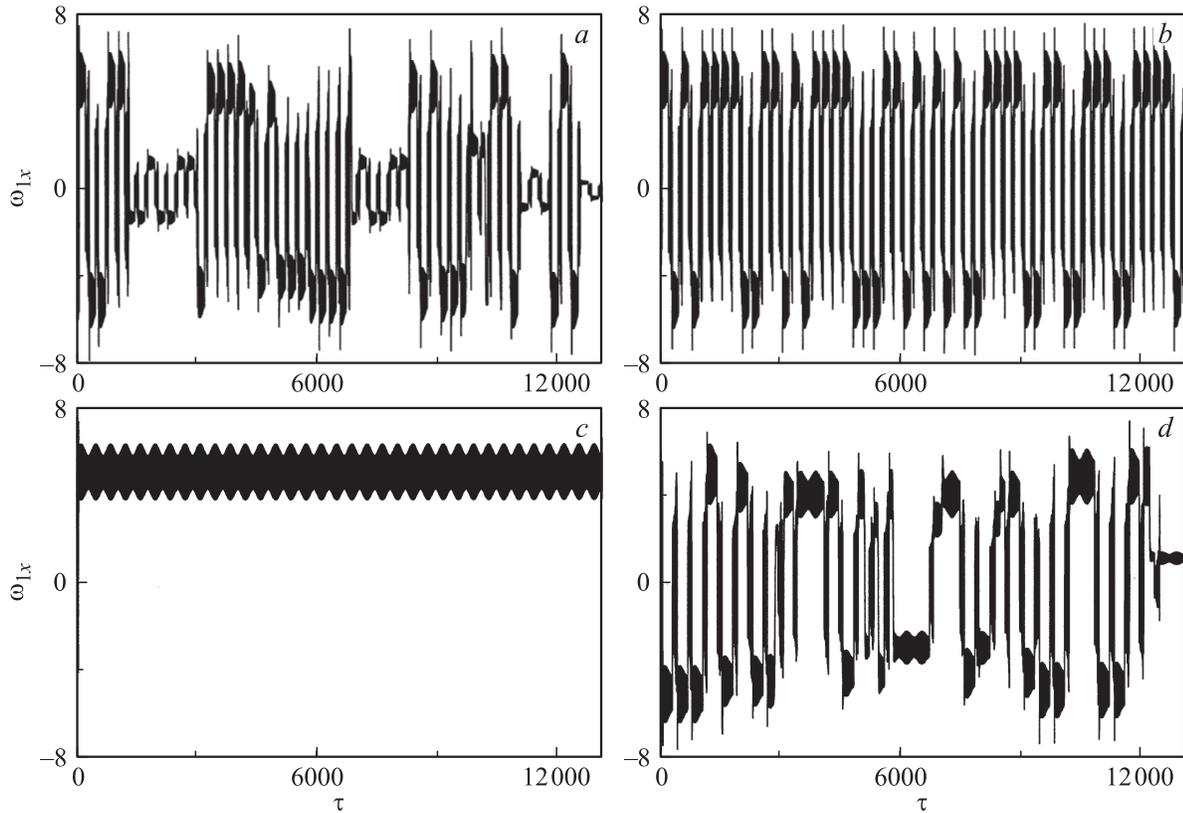


Рис. 4. Временная зависимость x -компоненты угловой скорости для одной из подсистем диполей; $f_0 = 19$, $\Omega_0 = 5$, $\beta = 1.5$ при $f_h = 4$, $\Omega_h = \Omega_0/200$ (a, b) и при $f_h = 3.88$, $\Omega_h = \Omega_0/300$ (c, d); $2D = 0$ (a, c), $2D = 5$ (b, d).

ется вращательный режим с наибольшими угловыми скоростями. Во втором случае (c, d) при отсутствии шума устанавливается регулярный вращательный режим только в одном из направлений (для данной подсистемы диполей), т.е. без возвратного движения. Включение шумового сигнала (как и в случае, представленном на рис. 2) приводит к резкому изменению ω_x , сопровождаемому изменением направления вращения диполей, почти через каждый период (за редкими исключениями) дополнительного гармонического сигнала. То есть белый шум существенно увеличивает отклик системы на частоте Ω_h .

Рассмотрим еще случай, отвечающий узкой области невосприимчивости системы диполей (при варьировании параметра f_0 и отсутствии дополнительных возмущений), которая ограничена областями, отвечающими хаотической динамике. На рис. 5 приведена временная зависимость $\omega_{1x}(\tau)$ при параметрах $f_0 = 16$, $\Omega_0 = 5$, дополнительном гармоническом сигнале с параметрами $f_h = 3.1$, $\Omega_h = \Omega_0/100$ при отсутствии шума (кривая 1) и при шуме интенсивностью $2D = 5$ (кривая 2). Видно, что без шумового сигнала наблюдаются затухающие по амплитуде импульсные изменения угловой скорости. Включение шумового сигнала приводит к тому, что указанные импульсы (один из них приведен на вставке) не затухают с течением времени, при этом они возникают со случайной амплитудой (в пределах определенного интервала значений) и частотой, равной

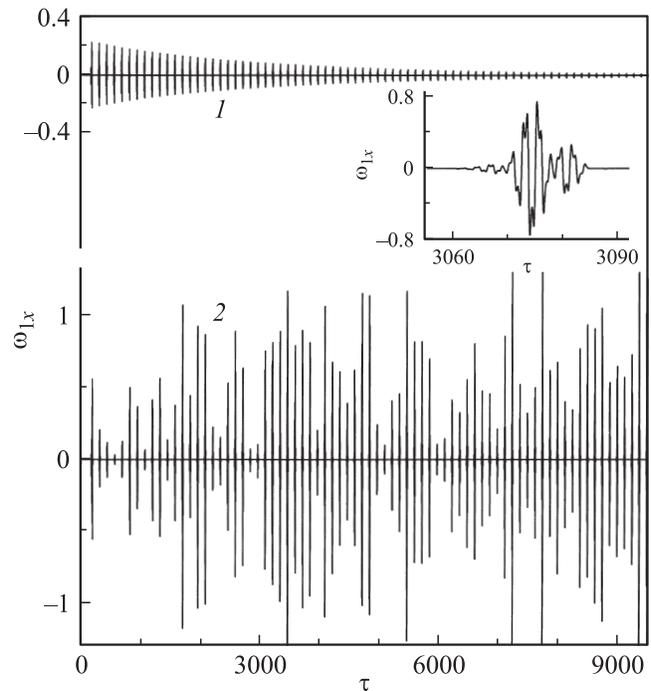


Рис. 5. Временная зависимость компоненты угловой скорости ω_{1x} ; $f_0 = 16$, $\Omega_0 = 5$, $f_h = 3.1$, $\Omega_h = \Omega_0/100$, $\beta = 1.5$ при отсутствии шума (кривая 1) и при $2D = 5$ (кривая 2 и вставка).

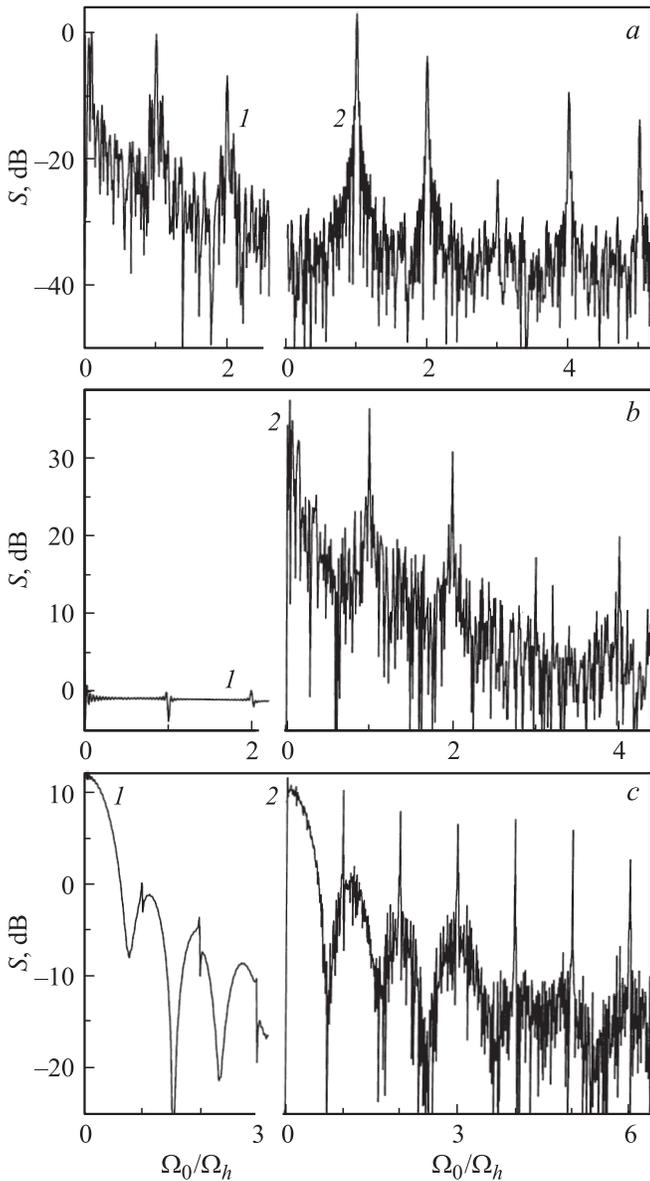


Рис. 6. Спектр нормированной мощности колебаний величины $|\omega_{1x}|$: $S = 10 \lg(S_\Omega/S_h)$, при отсутствии шума (кривые 1) и при $2D = 5$ (кривые 2); $f_0 = 19$, $\Omega_0 = 5$ при $f_h = 4$, $\Omega_h = \Omega_0/200$ (a) и при $f_h = 3.88$, $\Omega_h = \Omega_0/300$ (b); $f_0 = 16$, $\Omega_0 = 5$, $f_h = 3.1$, $\Omega_h = \Omega_0/100$ (c); $\beta = 1.5$.

частоте дополнительного гармонического сигнала. Динамика связанных диполей при этом состоит из отдельных всплесков колебаний, происходящих с частотой Ω_h и разделенных более продолжительными (в несколько раз) фазами покоя.

Для рассмотренных режимов на рис. 6 приведен спектр мощности колебаний $|\omega_{1x}(D)|$, отнесенных к соответствующей мощности колебаний на частоте Ω_h в отсутствие шума. При этом спектры, обозначенные цифрой „1“ на рис. 6, a, b, c, построены при отсутствии шума и отвечают соответственно случаям на рис. 4, a, c и рис. 5 (кривая 1), а спектры „2“ отвечают динамике

под воздействием дополнительного шумового сигнала и, следовательно, отвечают рис. 4, b, d и рис. 5 (кривая 2). Видно, что воздействие шума приводит к существенному усилению отклика системы на дополнительный гармонический сигнал. Мощность колебаний на частоте Ω_h и ее гармониках сильно возрастает. В наибольшей степени это проявляется в случае b и c. Режим c, отвечающий узким всплескам угловой скорости на фоне динамической невосприимчивости системы, характеризуется наибольшими относительными значениями мощности колебаний на высших гармониках частоты Ω_h . В случае режима a имеет также место существенное ослабление под воздействием шумового сигнала низкочастотной составляющей динамики магнитных диполей.

Представленная чувствительность динамики к шумовому сигналу оказывается отличной от явления стохастического резонанса, так как в рассмотренном интервале значений интенсивности шума не проявляются характерные резонансные свойства [1,8,21] — отсутствует явно выраженная оптимальная интенсивность шума, при которой отклик системы на дополнительное гармоническое воздействие максимален. На рис. 7 в логарифмическом масштабе для величины $|\omega_{1x}|$ приведена зависимость от уровня шума характеристики сигнал/шум, т. е. $R(D)$ — отношения мощности колебаний на частоте гармонического сигнала Ω_h (кривые 1 и 3) и удвоенной частоте $2\Omega_h$ (кривые 2 и 4) к шумовому „педесталу“ — усредненной мощности на других частотах, для системы с основной частотой переменного поля $\Omega_0 = 5$ и параметрами: $f_0 = 19$, $f_h = 3.88$, $\Omega_h = \Omega_0/300$ (кривые 1 и 2) и $f_0 = 16$, $f_h = 3.1$, $\Omega_h = \Omega_0/100$ (кривые 3 и 4). Вначале, т. е. при включении слабых шумов, имеет место

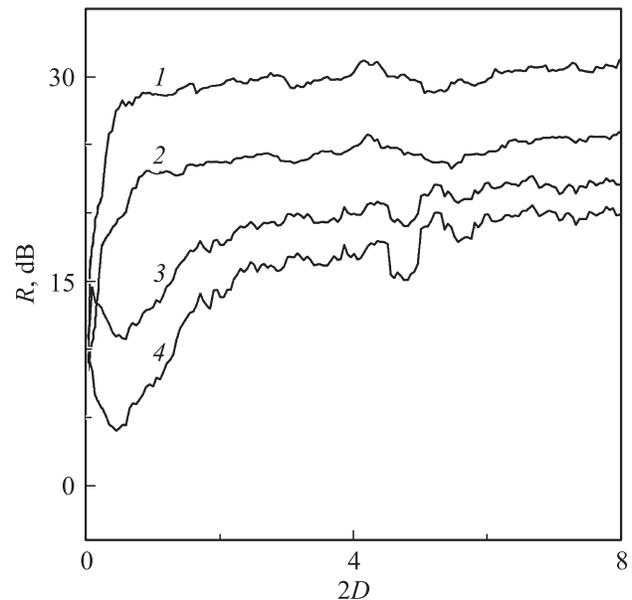


Рис. 7. Зависимость от уровня шума параметра R — отношения сигнал-шум для колебаний величины $|\omega_{1x}|$ на частотах Ω_h (кривые 1, 3) и $2\Omega_h$ (кривые 2, 4) при $\Omega_0 = 5$ и $f_0 = 19$, $f_h = 3.88$, $\Omega_h = \Omega_0/300$ (кривые 1, 2), $f_0 = 16$, $f_h = 3.1$, $\Omega_h = \Omega_0/100$ (кривые 3, 4).

резкое увеличение отклика системы на дополнительное гармоническое поле. При дальнейшем увеличении шума в первом случае (кривые 1 и 2) рост соответствующих гармоник значительно падает, но тем не менее продолжается во всем рассматриваемом диапазоне интенсивности шума, за исключением отдельных областей незначительного уменьшения относительной мощности колебаний на частотах Ω_h и $2\Omega_h$, что может быть объяснено ограничениями численного счета. Во втором случае (кривые 3 и 4) после начального увеличения наблюдается некоторое понижение параметра R , после которого, однако, опять имеет место его рост, аналогичный первому случаю. Предлагаемое уменьшение гармонических составляющих в динамике системы диполей может быть реализовано только при достаточно интенсивных шумах, которые здесь не рассматривались.

Заключение

Проведенный анализ показал, что при возбуждении переменным магнитным полем системы диполей, состоящей из цепочки или двух связанных идентичных тел, выполняются условия, при которых шумовой сигнал приводит к качественному изменению динамики связанных диполей, сопровождаемому усилением отклика системы на дополнительный гармонический сигнал. Данный эффект реализуется в том случае, если имеют место частотные области динамической бистабильности (или невосприимчивости системы), граничащие с интервалами, отвечающими хаотическим колебаниям, при этом параметры системы и внешнего переменного поля должны соответствовать краю указанных областей. Устанавливающиеся при этом режимы, как правило, представляют собой фазы вращений, или фазы покоя, которые сменяются (с периодом, равным периоду дополнительного гармонического сигнала) фазами сильных колебаний угловой частоты, с противоположными по знаку экстремальными значениями. В области слабого шума увеличение его интенсивности приводит к быстрому росту мощности колебаний системы на частоте дополнительного сигнала и ее гармониках. В достаточно продолжительной области сильного шума с ростом его интенсивности увеличение параметра сигнал/шум в среднем сохраняется, однако оно незначительно. Последняя особенность отличает обнаруженный эффект индуцированного шумом усиления отклика системы на гармоническое возмущение от эффекта стохастического резонанса.

Список литературы

- [1] Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 544. с
- [2] Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.

- [3] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. Ижевск: НИЦ „РХД“ 2008. 620 с.
- [4] Ланда П.С., Ушаков В.Г. // Письма в ЖЭТФ. 2007. Т. 86. Вып. 5. С. 356–559.
- [5] Zhou B., Xu W. // Chaos, Solitons & Fractals. 2008. Vol. 38. N 4. P. 1146–1151.
- [6] Testa L., Trapanese M. // Physica B: Phys. of Condensed Mat. 2008. Vol. 403. N 2–3. P. 486–490.
- [7] Шутый А.М. // ФТТ. 2010. Т. 52. Вып. 7. С. 1323–1329.
- [8] Шутый А.М. // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 36. Вып. 15. С. 53–61.
- [9] Филиппов Б.Н., Корзунин Л.Г. // ЖЭТФ. 2002. Т. 121. Вып. 2. С. 372–387.
- [10] Кандаурова Г.С., Осадченко В.Х., Пашко А.Г. // ФТТ. 2005. Т. 47. Вып. 10. С. 1806–1812.
- [11] Mantegna R.N., Spanolo B., Testa L., Trapanese M. // J. Appl. Phys. 2005. Vol. 97. 10E519 (3 pages).
- [12] Семенов Д.И., Шутый А.М. // УФН. 2007. Т. 177. № 8. С. 831–857.
- [13] Testa L., Trapanese M. // Physica B: Phys. of Condensed Mat. 2008. Vol. 403. N 2–3. P. 486–490.
- [14] Eliseev A.A., Vyacheslavov A.S., Lukashin A.V., Tret'yakov Yu.D., Suzdalev I.P., Maksimov Yu.V., Goernert P. // Intern. J. of Nanoscience. 2006. Vol. 5. N 4&5. P. 459–463.
- [15] Головань Л.А., Тимошенко В.Ю., Кашкаров П.К. // УФН. 2007. Т. 177. № 6. С. 619–638.
- [16] Макаров Г.Н. // УФН. 2008. Т. 178. № 4. С. 337–376.
- [17] Гладких Д.В., Диканский Ю.И. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 8. С. 13–18.
- [18] Лахтина Е.В., Пшеничников А.Ф. // Коллоид. журн. 2006. Т. 68. № 3. С. 327–337.
- [19] Шутый А.М. // ЖЭТФ. 2009. Т.135. Вып. 5. С. 1009–1010.
- [20] Губин А.М., Кошкаров Ю.А., Хомутов Г.Б., Юрков Г.Ю. // Успехи химии. 2005. Т. 74. № 6. С. 539–574.
- [21] Шутый А.М. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 7. С. 21–26.