

Исследование влияния мелкомасштабных неоднородностей на электрофизические характеристики тонкого слоя методом внутриврезонаторной лазерной спектроскопии

© К.Г. Куликов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
197046 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: kulikov_kg@hotmail.ru

(Поступило в Редакцию 24 января 2011 г.)

Построена математическая модель, которая позволяет варьировать характерные размеры шероховатости, электрофизические параметры исследуемого биологического образца, геометрические характеристики и устанавливать зависимости между ними и биологическими свойствами моделируемой биоткани, а также делает возможным теоретически рассчитывать спектры поглощения оптически тонких биологических образцов, помещенных в полость оптического резонатора.

Введение

Статья является продолжением цикла работ по применению методов теории дифракции к проблеме светорассеяния на биологических частицах. В ней развиваются результаты, полученные ранее в работах [1–3], применительно к более сложным биологическим структурам и поверхностям.

Большинство биологических поверхностей в той или иной степени шероховаты. При этом шероховатость поверхностей оказывает влияние на характеристики распространения и рассеяния волн, а именно характеристики волны, которая распространяется над такой поверхностью, отличаются от аналогичных характеристик в случае распространения над гладкой поверхностью. При падении на шероховатую поверхность волна не только отражается в зеркальном направлении, но и рассеивается во всех других направлениях. При исследовании рассеяния на шероховатой поверхности степень шероховатости поверхности связана с длиной волны падающего излучения и зависит от направления распространения и рассеяния волны. В связи с этим представляется весьма актуальным исследовать влияние шероховатостей на спектральные характеристики моделируемой биологической структуры.

Следует отметить, что использование резонатора позволяет получить более точные оценки оптических характеристик среды с учетом шероховатости, которые обычными методами не могут быть зарегистрированы.

Таким образом, представляется весьма уместным рассмотреть задачу на собственные колебания линейного резонатора, нагруженного оптически тонким слоем, моделирующим некоторую биологическую структуру. При этом биологическая структура представлялась в виде оптически тонкого слоя с определенными оптическими и геометрическими характеристиками, освещаемого лазерным пучком.

Задача состояла из трех последовательных этапов. На первом этапе необходимо было решить задачу рассеяния

на шероховатой границе, найти коэффициент отражения плоской волны от плавно нерегулярного слоя с учетом шероховатости границы, моделирующего заданную биологическую среду. На втором этапе — решить задачу об отражении гауссова пучка с произвольным поперечным сечением. Задача решалась путем разложения полей встречных волн по плоским волнам в области среды 1 и их отражения слоем 2, обратного преобразования с последующим интегральным преобразованием Гюйгенса–Френеля для получения поля в исходном опорном сечении после обхода резонатора [1]. На третьем этапе исследовалось влияние шероховатостей на спектральные характеристики моделируемого биологического образца.

Рассеяние плоской волны на шероховатой поверхности

Как было отмечено, поверхности реальных тел, в частности в биологии, всегда в той или иной степени не являются идеально гладкими, поэтому отражение и преломление волн на этих поверхностях сопровождаются явлениями, которые отсутствуют в случае идеально гладких границ раздела. При этом характер рассеяния на шероховатой поверхности определяется набором следующих фактов: степень гладкости определяется соотношением между длиной волны падающего излучения и геометрическими параметрами поверхности, играет существенную роль также поляризация первичной волны, отражающие и преломляющие свойства вещества. Строгих методов решения в случае шероховатой поверхности не существует. Задачу можно решить лишь приближенно при определенных ограничениях, налагаемых на размеры и форму неровностей. При этом применяют следующие методы расчета рассеянного поля: метод малых возмущений и метод Кирхгофа. В данной статье для расчета рассеянного поля использовался метод малых возмущений.

Для корректного применения метода малых возмущений предположим, что в рассматриваемой поверхно-

сти неровности а масштабе длины полны достаточно малы и пологи. Пологость неровностей означает [4], что наклоны поверхности в среднем невелики, т.е. $\sigma_H^2/l_H^2 \ll 1$, где $\sigma_H^2 \equiv \langle H^2 \rangle$ — средний квадрат уклонения от невозмущенной поверхности $z = 0$, l_H — характерный размер неровностей. Малость неровностей означает, что моменты $\langle H^m \rangle$ малы по сравнению с соответствующими степенями длины волны, $\langle H^m \rangle \ll \lambda^m$, в частности $\sigma_H^2 \ll \lambda^2$. В результате для малых и пологих неровностей можно использовать разложение как граничных условий, так и искомого решения по степеням малых параметров: $H/\lambda \ll 1$, $\sigma_H/l_H \ll 1$, т.е. использовать метод возмущения. Пусть на шероховатую поверхность падает плоская монохроматическая волна единичной амплитуды. Рассмотрим две среды с коэффициентами преломления n_1, n_2 . Уравнение поверхности будет иметь вид $z = H(x, y)$, при этом считаем, что $|\frac{\partial H}{\partial x}| \ll 1$, $|\frac{\partial H}{\partial y}| \ll 1$.

Обозначим амплитуды электрического поля в верхней и нижней средах соответственно E_1 и E_2 . При этом в верхней среде амплитуда электрического поля E_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} + k^2 n_1^2 E_1 = 0, \quad (1)$$

а в нижней среде амплитуда электрического поля E_2 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} + k^2 n_2^2 E_2 = 0, \quad (2)$$

где k — волновой вектор, n_j — комплексный показатель преломления $n_j = n_j^0 + i\chi_j$, $j = 1, 2$ с граничными условиями следующего вида:

$$E_1|_{z=H(x,y)} = E_2|_{z=H(x,y)}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{n_1^2} \frac{\partial E_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=H(x,y)} = \frac{1}{n_2^2} \frac{\partial E_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=H(x,y)}, \quad (4)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали, причем он имеет следующие компоненты:

$$\mathbf{n} = \left(\alpha \frac{\partial H}{\partial x}, \alpha \frac{\partial H}{\partial y}, -\alpha \right), \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2}}.$$

Требуется найти отраженное поле с учетом шероховатости на поверхности раздела сред.

Окончательные формулы для s -поляризованной волны отличаются от формул для p -поляризации тем, что величины n_1, n_2 равны единице. Поэтому достаточно рассмотреть случай p -поляризации. Граничное условие вида (3) разложим по степеням H

$$\begin{aligned} & (E_1)|_{z=0} + H \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \dots \\ & = (E_2)|_{z=0} + H \left(\frac{\partial E_2}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим граничное условие вида (4). Имеем для $\frac{\partial E_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=H(x,y)}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_1^2} \frac{\partial E_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=H(x,y)} = \frac{1}{n_1^2} \left(n_x \frac{\partial E_1}{\partial x} + n_y \frac{\partial E_1}{\partial y} + n_z \frac{\partial E_1}{\partial z} \right) \\ & = \frac{1}{n_1^2} \left(\alpha \frac{\partial H}{\partial x} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(E_1|_{z=0} + H \frac{\partial E_1}{\partial x} \Big|_{z=0} + \dots \right) \\ & + \frac{1}{n_1^2} \left(\alpha \frac{\partial H}{\partial y} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(E_1|_{z=0} + H \frac{\partial E_1}{\partial x} \Big|_{z=0} + \dots \right) \\ & - \frac{1}{n_1^2} \left(\alpha + \frac{(\nabla H)^2}{2} - \dots \right) \\ & \times \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + H \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{H^2}{2} \frac{\partial^3 E_1}{\partial z^3} \Big|_{z=0} + \dots \right) \\ & = \alpha \frac{1}{n_1^2} \left(- \frac{\partial E_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial E_1}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{z=0} + \frac{\partial E_1}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_{z=0} \right. \\ & \left. - H \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + H \frac{\partial^2 E_1}{\partial x \partial z} \Big|_{z=0} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial y \partial z} \Big|_{z=0} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ & - \alpha \frac{1}{n_1^2} \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} \Big|_{z=0} \frac{(\nabla H)^2}{2} + \frac{H^2}{2} \frac{\partial^3 E_1}{\partial z^3} \Big|_{z=0} + \dots \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично запишем для $\frac{\partial E_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=H(x,y)}$

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{1}{n_2^2} \left(- \frac{\partial E_2}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial E_2}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{z=0} + \frac{\partial E_2}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_{z=0} \right. \\ & \left. - H \frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + H \frac{\partial^2 E_2}{\partial x \partial z} \Big|_{z=0} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ & + \alpha \frac{1}{n_2^2} \left(\frac{\partial^2 E_2}{\partial y \partial z} \Big|_{z=0} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \frac{(\nabla H)^2}{2} \right. \\ & \left. - \frac{H^2}{2} \frac{\partial^3 E_2}{\partial z^3} \Big|_{z=0} + \dots \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда граничное условие вида (4) с учетом (6) и (7) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_1^2} \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} \Big|_{z=0} - \frac{\partial E_1}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{z=0} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_{z=0} \right. \\ & \left. + H \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} \Big|_{z=0} - H \frac{\partial^2 E_1}{\partial x \partial z} \Big|_{z=0} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial^2 E_1}{\partial y \partial z} \Big|_{z=0} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ & + \frac{1}{n_1^2} \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} \Big|_{z=0} \frac{(\nabla H)^2}{2} + \frac{H^2}{2} \frac{\partial^3 E_1}{\partial z^3} \Big|_{z=0} \right) \\ & = \frac{1}{n_2^2} \left(\frac{\partial E_2}{\partial z} \Big|_{z=0} - \frac{\partial E_2}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{z=0} - \frac{\partial E_2}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_{z=0} \right. \\ & \left. + H \frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + H \frac{\partial^2 E_2}{\partial x \partial z} \Big|_{z=0} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial^2 E_2}{\partial y \partial z} \Big|_{z=0} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ & + \frac{1}{n_2^2} \left(\frac{\partial E_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \frac{(\nabla H)^2}{2} + \frac{H^2}{2} \frac{\partial^3 E_2}{\partial z^3} \Big|_{z=0} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Будем искать отраженное поле в среде 1 и прошедшее поле в среду 2 в виде (множитель $\exp(-i\omega t)$ для краткости опустим):

$$E_1(x, y, z) = E_{\text{inc}}(x, y, z) + \sum_{n=0}^{\infty} E_{01}^n(x, y, z), \quad (9)$$

$$E_2(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{02}^n(x, y, z), \quad (10)$$

где $E_{\text{inc}}(x, y, z)$ — первичное монохроматическое поле, падающее на шероховатую поверхность, $E_{01}^0(x, y, z)$ является амплитудой отраженной волны, $E_{02}^0(x, y, z)$ — амплитудой проходящей волны. Остальные члены рядов (9), (10) представляют собой распространяющиеся и затухающие рассеянные моды в верхней и нижней средах. Подставив (9), (10) в (7), (8), получим граничные условия для последовательных приближений поля

$$E_{\text{inc}}|_{z=0} + E_{01}^0|_{z=0} = E_{02}^0|_{z=0}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} E_{01}^1|_{z=0} + H \left(\frac{\partial E_{\text{inc}}}{\partial z} \right)_{z=0} + H \left(\frac{\partial E_{01}^0}{\partial z} \right)_{z=0} \\ = H \left(\frac{\partial E_{02}^0}{\partial z} \right)_{z=0} + E_{02}^1|_{z=0}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} E_{01}^2|_{z=0} + H \frac{\partial E_{01}^1}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial^2 E_{\text{inc}}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_{01}^0}{\partial z^2} \right)_{z=0} \\ = E_{02}^2 + H \left(\frac{\partial E_{02}^1}{\partial z} \right)_{z=0} + E_{02}^3|_{z=0} + \left(\frac{H^2}{2} \frac{\partial^2 E_{02}^0}{\partial z^2} \right)_{z=0}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{1}{n_1^2} \left(\frac{\partial E_{\text{inc}}}{\partial z} + \frac{\partial E_{01}^0}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{1}{n_2^2} \left(\frac{\partial E_{02}^0}{\partial z} \right)_{z=0}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_1^2} \left[\left(\frac{\partial E_{01}^1}{\partial z} \right)_{z=0} - \left(\frac{\partial E_{\text{inc}}}{\partial x} + \frac{\partial E_{01}^0}{\partial x} \right)_{z=0} \frac{\partial H}{\partial x} \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial E_{\text{inc}}}{\partial y} + \frac{\partial E_{01}^0}{\partial y} \right)_{z=0} \frac{\partial H}{\partial y} + H \left(\frac{\partial^2 E_{01}^0}{\partial z^2} \right)_{z=0} \right] \\ = \frac{1}{n_2^2} \left[\left(\frac{\partial E_{02}^1}{\partial z} \right)_{z=0} - \left(\frac{\partial E_{02}^0}{\partial x} \right)_{z=0} \frac{\partial H}{\partial x} \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial E_{02}^0}{\partial y} \right)_{z=0} \frac{\partial H}{\partial y} + H \left(\frac{\partial^2 E_{02}^0}{\partial z^2} \right)_{z=0} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_1^2} \left[\left(\frac{\partial E_{01}^2}{\partial z} \right)_{z=0} - \left(\frac{\partial E_{\text{inc}}}{\partial x} + \frac{\partial E_{01}^1}{\partial x} \right)_{z=0} \frac{\partial H}{\partial x} \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial E_{\text{inc}}}{\partial y} + \frac{\partial E_{01}^1}{\partial y} \right)_{z=0} \frac{\partial H}{\partial y} + H \left(\frac{\partial^2 E_{\text{inc}}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_{01}^1}{\partial z^2} \right)_{z=0} \right] \\ + \frac{1}{n_1^2} \left[H \left(\frac{\partial^2 E_{\text{inc}}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_{01}^1}{\partial x \partial z} \right)_{z=0} \frac{\partial H}{\partial x} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. - H \left(\frac{\partial^2 E_{\text{inc}}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 E_{01}^1}{\partial y \partial z} \right)_{z=0} \frac{\partial H}{\partial y} \right] \\ + \frac{1}{n_1^2} \left[\left(\frac{\partial E_{\text{inc}}}{\partial z} + \frac{\partial E_{01}^1}{\partial z} \right)_{z=0} \frac{(\nabla H)^2}{2} \right. \\ \left. + \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial^3 E_{\text{inc}}}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 E_{01}^1}{\partial z^3} \right)_{z=0} \right] \\ = \frac{1}{n_2^2} \left[\left(\frac{\partial E_{02}^2}{\partial z} \right)_{z=0} - \left(\frac{\partial E_{02}^1}{\partial x} \right)_{z=0} \frac{\partial H}{\partial x} \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial E_{02}^1}{\partial y} \right)_{z=0} \frac{\partial H}{\partial y} + H \left(\frac{\partial^2 E_{02}^1}{\partial z^2} \right)_{z=0} \right] \\ + \frac{1}{n_2^2} \left[H \left(\frac{\partial^2 E_{02}^1}{\partial x \partial z} \right)_{z=0} \frac{\partial H}{\partial x} - H \left(\frac{\partial^2 E_{02}^1}{\partial y \partial z} \right)_{z=0} \frac{\partial H}{\partial y} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial E_{01}^1}{\partial z} \right)_{z=0} \frac{(\nabla H)^2}{2} \right] + \frac{1}{n_2^2} \left[\frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial^3 E_{02}^1}{\partial z^3} \right)_{z=0} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Предположим, что возмущение границы раздела двух сред описывается некоторой периодической функцией $H(x + 2a, y + 2a) = H(x, y)$. Из условия периодичности следует, что функция $H(x, y)$ разлагается в ряд Фурье. Предположим, что число гармоник этого ряда конечно, когда получим

$$H(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N H_{mn} \exp(i\lambda_n x) \exp(i\lambda_m y), \quad (17)$$

где

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a}, \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{a}.$$

Поле в верхней среде с учетом (9) и (17) будем искать в виде

$$\begin{aligned} E_1 = \exp[i\tau_{\text{inc}}(x, y, z)] \\ + \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N B_{mn}^- H_{mn} \exp(i\lambda_n x) \exp(i\lambda_m y) \exp[i\tau_{\text{ref}}(x, y, z)], \end{aligned} \quad (18)$$

а поле в нижней среде с учетом (10) и (17) — в виде

$$E_2 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N B_{mn}^+ H_{mn} \exp(i\lambda_n x) \exp(i\lambda_m y) \exp[i\tau_{\text{tr}}(x, y, z)], \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{\text{inc}}(x, y, z) = k_{1x}x + k_{1y}y - k_{1z}z, \\ \tau_{\text{ref}} = k_{1x}x + k_{1y}y + k_{1z}z, \quad \tau_{\text{tr}} = k_{2x}x + k_{2y}y - k_{2z}z, \\ k_{1x} = kn_1 \sin \theta \sin \phi, \quad k_{1y} = kn_1 \sin \theta \cos \phi, \quad k_{1z} = kn_1 \cos \theta, \\ k_{2x} = kn_2 \sin \theta \sin \phi, \quad k_{2y} = kn_2 \sin \theta \cos \phi, \quad k_{2z} = kn_2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Подставим (18), (19) в уравнения (1), (2) и получим, что эти уравнения выполняются при следующем условии

$$k_{1x}^2 + k_{1y}^2 + k_{1z}^2 + \lambda_n^2 + \lambda_m^2 = k^2 n_1^2,$$

$$k_{2x}^2 + k_{2y}^2 + k_{2z}^2 + \lambda_n^2 + \lambda_m^2 = k^2 n_2^2.$$

Следуя работе [5], подставим в (11)–(16) выражения (18), (19), при этом умножим на $\exp(-i\lambda_{n1}x) \times \exp(-i\lambda_{m1}y)$ и проинтегрируем по периоду, тогда получим систему линейных уравнений на нахождение B^+ и B^- . Решая полученную систему, найдем поправки к амплитудным коэффициентам пропускания и отражения. Они будут иметь следующий вид:

$$B^- = B_{00}^- + H^2 B_{00}^- \\ = \left[1 + \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M H_{nm}^2 k_1 (-2k_2 + 2\alpha_{\text{ref}} - \alpha_{\text{tr}}) \right] B_{00}^-, \quad (20)$$

$$B^+ = B_{00}^+ + H^2 B_{00}^- \\ = \left[1 + 0.5k_1 k_2 \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M H_{nm}^2 ((k_1 - k_2) + 2\alpha_{\text{ref}} - 2\alpha_{\text{tr}}) \right] B_{00}^+, \quad (21)$$

где

$$k_1 = kn_1, \quad k_2 = kn_2, \quad \alpha_{\text{ref}} = k_{1x} + k_{1y} + k_{1z}, \\ \alpha_{\text{tr}} = k_{2x} + k_{2y} - k'_{2z}.$$

Заменяем в выражениях (20), (21) H_{mn}^2 на σ^2 , тогда получим

$$B^- = B_{00}^- + H^2 B_{00}^- = [1 + \sigma^2 k_1 (-2k_2 + 2\alpha_{\text{ref}} - \alpha_{\text{tr}})] B_{00}^-, \quad (22)$$

$$B^+ = B_{00}^+ + H^2 B_{00}^- \\ = [1 + 0.5k_1 k_2 \sigma^2 ((k_1 - k_2) + 2\alpha_{\text{ref}} - 2\alpha_{\text{tr}})] B_{00}^+, \quad (23)$$

где B_{00}^+ — амплитуда отраженной волны для шероховатой границы раздела двух сред, B_{00}^- — амплитуда прошедшей волны для шероховатой границы раздела двух сред. При этом σ определим как среднеквадратичное отклонение профиля шероховатой границы от невозмущенной границы.

После того как мы нашли поправки к амплитудным коэффициентам прохождения и отражения поставим задачу об отражении плоской волны от слоя с медленно меняющейся толщиной с учетом шероховатости поверхности.

Рассмотрим оптическую систему (см. рис. 1). Система состоит из двух областей с различными показателями преломления. С целью достижения наибольшего соответствия структуре реального объекта исследования представим границу раздела слоя модельной среды в виде волнистой поверхности $z = H(x, y)$, где

$$H(x, y) = c \sin(ax + by);$$

c, a, b — некоторые произвольно задаваемые константы, причем $a \ll 1, b \ll 1, c \ll 1$. Пусть на слой падает под углом θ плоская волна. Требуется найти отраженное поле. Электромагнитное поле (E, H) в среде со слоем будет удовлетворять волновому уравнению вида (2).

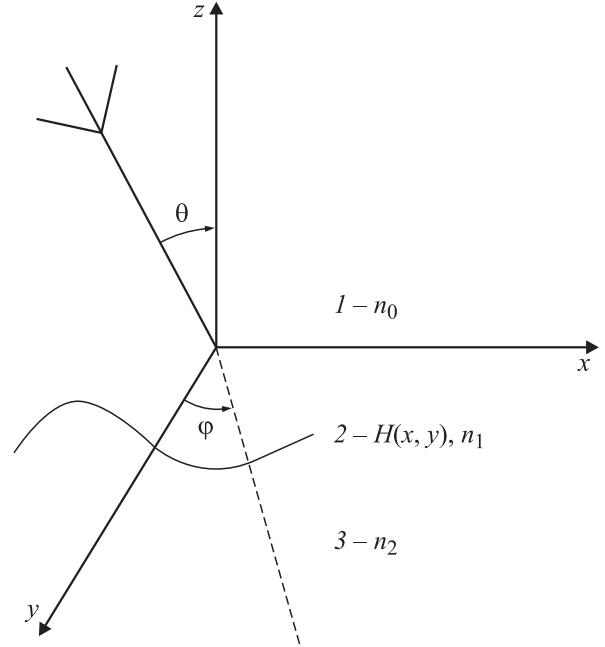


Рис. 1. оптическая система, моделирующая биологическую среду. Области с показателями преломления: 1 — n_1 , 2 — n_1 , 3 — n_2 ; $H(x, y)$ — граница раздела слоя модельной среды.

Введем в рассмотрение сжатые координаты

$$\xi_1 = \epsilon x, \quad \xi_2 = \epsilon y, \quad \xi_3 = \epsilon z. \quad (24)$$

Обозначим отношение характерной толщины слоя к характерному продольному масштабу L через ϵ , тогда получим

$$H(x, y) = h(\xi_1, \xi_2)|_{\xi_1=\epsilon x, \xi_2=\epsilon y}. \quad (25)$$

Условия непрерывности касательных компонент E и H на границах раздела сред приводят к следующим граничным условиям:

$$E_1|_{\xi_3=0} = E_2|_{\xi_3=0}, \quad E_2|_{\xi_3=\epsilon h(\xi_1, \xi_2)} = E_3|_{\xi_3=\epsilon h(\xi_1, \xi_2)}, \quad (26)$$

$$\frac{1}{n_0^2} \frac{\partial E_1}{\partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=0} = \frac{1}{n_1^2} \frac{\partial E_2}{\partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=0}, \quad (27)$$

$$\frac{1}{n_1^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_3} - \epsilon_x \frac{\partial h}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \epsilon_y \frac{\partial h}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) E_2 \Big|_{\xi_3=\epsilon h(\xi_1, \xi_2)} \\ = \frac{1}{n_2^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_3} - \epsilon_x \frac{\partial h}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \epsilon_y \frac{\partial h}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) E_3 \Big|_{\xi_3=\epsilon h(\xi_1, \xi_2)}. \quad (28)$$

Поскольку H слабо зависит от x, y , то естественно искать отраженное поле в виде волн с медленно меняющимися амплитудами и быстро осциллирующими фазами, тогда с учетом (24) получим

$$E_1 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{\text{inc}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) \\ + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) A(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (29)$$

$$E_2 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{2\text{tr}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) B^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{3\text{ref}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) B^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (30)$$

$$E_3 = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \tau_{3\text{tr}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) C, \quad (31)$$

где

$$\tau_{1\text{ref}} = k_{2x}\xi_1 + k_{2y}\xi_2 + k_{2z}\xi_3, k_{2x}^2 + k_{2y}^2 + k_{2z}^2 = k^2 n_2^2, \quad (32)$$

$$\tau_{2\text{tr}} = k_{2x}\xi_1 + k_{2y}\xi_2 - k'_{2z}\xi_3, k_{2x}^2 + k_{2y}^2 + k_{2z}^2 = k^2 n_2^2, \quad (33)$$

$$k_{2x} = kn_2 \sin \theta \sin \phi, k_{2y} = kn_2 \sin \theta \cos \phi, k_{2z} = kn_1 \cos \theta,$$

$$\tau_{3\text{ref}} = k_{3x}\xi_1 + k_{3y}\xi_2 + k'_{3z}\xi_3, k_{3x}^2 + k_{3y}^2 + k_{3z}^2 = k^2 n_3^2, \quad (34)$$

$$\tau_{3\text{tr}} = k_{3x}\xi_1 + k_{3y}\xi_2 - k'_{3z}\xi_3, k_{3x}^2 + k_{3y}^2 + k_{3z}^2 = k^2 n_3^2, \quad (35)$$

$$k_{3x} = kn_3 \sin \theta \sin \phi, k_{3y} = kn_3 \sin \theta \cos \phi, k_{3z} = kn_3 \cos \theta.$$

Амплитуды A, C ищем в виде рядов по степеням малого параметра ϵ_x, ϵ_y [2]. Отметим, что выражения для амплитуд B^\pm с учетом (20), (21) будут иметь следующий вид:

$$B^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon_x, \epsilon_y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} B_{(00)ij}^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3) (1 + F_1) (\epsilon_x^i \epsilon_y^j), \quad (36)$$

$$B^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon_x, \epsilon_y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} B_{(00)ij}^-(\xi_1, \xi_2, \xi_3) (1 + F_2) (\epsilon_x^i \epsilon_y^j), \quad (37)$$

где

$$F_1 = 0.5k_1 k_2 \sigma^2 [(k_1 - k_2) - 2\alpha_{\text{ref}} + 2\alpha_{\text{tr}}],$$

$$F_2 = \sigma^2 k_1 [-2k_2 - 2\alpha_{\text{ref}} + 2\alpha_{\text{tr}}].$$

Отметим, что выражения на амплитуды

$$A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon_x, \epsilon_y), C(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon_x, \epsilon_y), B^\pm(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \epsilon_x, \epsilon_y)$$

определяются аналогично методу, описанному в статье [2].

Подстановка (29)–(31) в (26)–(28) порождает рекуррентную систему уравнений. Из этой системы для отраженного поля находится коэффициент отражения A с учетом шероховатости на границе раздела моделируемой среды.

Кратко рассмотрим задачу об отражении гауссова пучка с произвольным поперечным сечением. Задача решалась путем разложения полей встречных волн по плоским волнам в области среды 1 и их отражения слоем 2, обратного преобразования с последующим интегральным преобразованием Гюйгенса–Френеля для получения поля в исходном опорном сечении после обхода резонатора [2].

Отметим, что в работе [2] получены отражательные формулы для поля пучка с произвольным поперечным

распределением, набегающего под произвольным углом падения на некоторую поверхность тела с произвольным показателем преломления для случаев s - и p -поляризации падающего пучка. Результаты представлены в форме асимптотики по малому параметру, имеющему смысл отношения характерного масштаба изменения профиля границы тела к характерному расстоянию, на котором это изменение произошло. Вычисления проведены с погрешностью порядка квадратичных членов асимптотики. Полученные формулы конечны при любых значениях параметров системы, за исключением угла падения пучка. По углу падения формулы неравномерны. С ростом угла падения начинают расти поправочные члены асимптотики, что свидетельствует об увеличивающемся искажении пучка.

Интегральные уравнения для собственных колебаний поля в резонаторе, нагруженного слоем, моделирующим заданную биологическую среду

Пусть в некоторой окрестности оси z в области Ω резонатора расположена кювета с образцом биоткани.

Следуя работе [6], запишем уравнение для поля на одном из зеркал резонатора

$$\Phi(\xi_1') = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi_1', \xi_1'') E_{\text{ref}}(\Phi(\xi_1'', \xi_2'')) d\xi_1'', \quad (38)$$

где $E_{\text{ref}}(\Phi(\xi_1'', \xi_2''))$ является линейной комбинации $\Phi(\xi_1'', \xi_2'')$ и ее производных и определяется аналогично работе [2], K_1 — ядро интегрального преобразования поля определено в [6].

Будем искать Φ и γ в виде разложения по степеням малого параметра ϵ , характеризующего плавность изменений свойств среды на длине волны

$$\Phi = \psi_0 + \epsilon_x \varphi_{01} + O(\epsilon_x^2), \quad (39)$$

$$\gamma = \psi_1 + \epsilon_x \varphi_{11} + O(\epsilon_x^2), \quad (40)$$

где $\psi_0^\pm(\xi_1')$ и φ_{11} определены в [6]. Более подробно о решении интегрального уравнения вида (38) с учетом (39), (40) можно найти в статье [6].

Подставим разложения (39) и (40) в интегральное уравнение (38).

Тогда в главном приближении получим [6]

$$\psi_0^\pm(\xi_1') = \psi_1 \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi_1', \xi_1'') S_{00}(\xi_1'', \xi_2'') \varphi_0(\xi_1'') d\xi_1'' \right]. \quad (41)$$

При этом поправки к собственным значениям будут иметь вид [6]

$$\varphi_{11} = \pm \psi_1 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^+ \psi_0^- S_x(\xi_1'', \xi_2'') d\xi_1'' - \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^{\pm} \frac{\partial S_x(\xi_1'', \xi_2'')}{\partial k_x} \frac{\partial \psi_0^{\mp}}{\partial \xi_1''} d\xi_1'' \right] \Delta^{-1},$$

$$\Delta = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^+ \psi_0^- S_{00}(\xi_1'', \xi_2'') d\xi_1'' \right],$$

$$S_{00}(\xi_1'', \xi_2'') = \frac{A_{00}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x})}{\alpha}, \quad (42)$$

$$S_x(\xi_1'', \xi_2'') = \frac{1}{\alpha} \left[A_{10}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) + \frac{k_{13}}{kn_1} \xi_1'' A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \right],$$

$$\frac{\partial S_x(\xi_1'', \xi_2'')}{\partial k_x} = \left[\frac{k_x^0}{ikn_1 \alpha} \left[\frac{\partial A_{00}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1x}} + \frac{\partial A_{00}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x})}{\partial k_{1y}} \right] \right],$$

$$\alpha, k_{13}, k_x^0, A_{00}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}),$$

$$A_{10}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x}) \text{ и } A_{0000}(\xi_1'' \sim + \xi_2'' \sim, k_{1y}, k_{1x})$$

определены в статье [2].

Решения уравнения (41) находилось в виде разложения в ряд по собственным функциям идеального резонатора (см. [6]).

Таким образом, на данном этапе мы связали частоты собственных колебаний оптического резонатора, нагруженного образцом исследуемой биоткани, с электрофизическими параметрами этой биологической структуры, такими как реальные и мнимые части их показателей преломления, размеры и т.д.

Численные расчеты для резонатора с выбранными параметрами и выводы

Рассмотрим оптический резонатор с модельной средой (с образцом биоткани) при следующих параметрах: расстояние между зеркалами $L = 11$ см, радиусы зеркал M_1 и M_2 равны 100 и 46.3 см соответственно, длина волны $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ (центр линии гелий-неонового лазера). Произвольно задаваемые константы $a = -0.0024$, $b = 0.020$, $c = 10^{-2}$. Значения параметров a, b, c подобраны для границы раздела моделируемого слоя таким образом, чтобы форма поверхности наиболее соответствовала форме границы раздела соответствующего слоя в структуре моделируемого биообразца, толщина

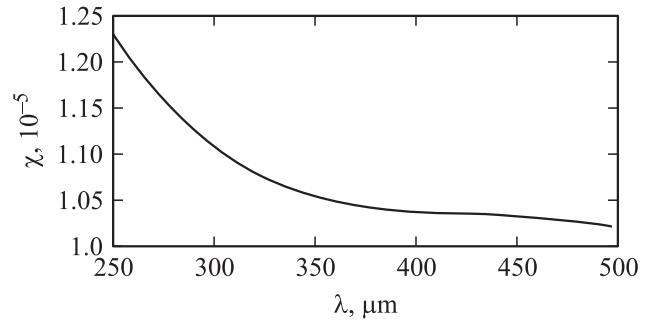


Рис. 2. Зависимость показателя поглощения моделируемого биообразца от длины волны в окрестности линии $0.63 \mu\text{m}$ гелий-неонового лазера при следующих параметрах модельной среды: действительная часть показателя преломления моделируемого биообразца 1.3, $\sigma = 0$.

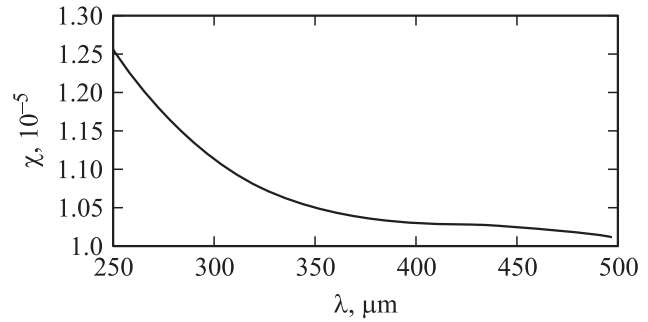


Рис. 3. Зависимость показателя поглощения моделируемого биообразца от длины волны в окрестности линии $0.63 \mu\text{m}$ гелий-неонового лазера при следующих параметрах модельной среды: действительная часть показателя преломления моделируемого биообразца 1.3, $\sigma = 0.3 \text{ nm}$.

моделируемого образца составила $0.3 \mu\text{m}$. Все расчеты проводились для основной поперечной моды линейного резонатора.

На рис. 2 и 3 показана зависимость коэффициента поглощения моделируемого биообразца от длины волны при $\sigma = 0, 0.3 \text{ nm}$, где σ мы определили как среднеквадратичное отклонение профиля шероховатой границы от невозмущенной границы. Как следует из графиков, в ультрафиолетовой части показатель поглощения биообразца велик, а в видимой области показатель поглощения снижается и практически не изменяется, далее отметим, что с увеличением σ показатель поглощения биообразца растет, а с уменьшением σ — понижается, что в принципе не противоречит общетеоретическим представлениям.

Таким образом, построенная модель позволяет анализировать биофизические характеристики, связанные с поглощением света в оптически тонких слоях, с учетом мелкомасштабных неоднородностей. А также дает возможность варьирования на одной установке биологических объектов их электрофизических параметров, характерных толщин слоев, характерных размеров шероховатостей биологической структуры с целью регистра-

ции зависимости между ними. В результате систематического использования данного подхода вполне вероятно обнаружить корреляции между электрофизическими параметрами моделируемой биологической структуры и ее биологическими свойствами.

Отметим, что при помощи данной математической модели, варьируя коэффициент поглощения биологической ткани, возможно измерение спектральных характеристик биоткани для случая *in vitro* с учетом мелкомасштабных неоднородностей, с целью построения спектрального автографа для определения патологических изменений в исследуемых биологических образцах.

Аналогичные зависимости могут быть рассчитаны для лазеров с другими параметрами и использованы для обработки экспериментальных кривых поглощения исследуемых биологических структур с учетом мелкомасштабных неоднородностей.

В дальнейшем предполагается расширить модель, рассмотрев задачу рассеяния на крупномасштабных неоднородностях, с целью более адекватного описания отражения от шероховатой границы раздела для моделируемых биологических структур различной морфологии.

Список литературы

- [1] Куликов К.Г., Радин А.М. // Опт. и спектр. 2002. Т. 92. № 2. С. 228–236.
- [2] Куликов К.Г., Радин А.М. // Опт. и спектр. 2004. Т. 96. № 3. С. 522–534.
- [3] Куликов К.Г. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 96–103.
- [4] Рытов С.М., Кварцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М.: Наука, 1978. 463 с.
- [5] Боголюбов А.Н., Тихонравов А.А. // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2002. Вып. 3. С. 27–32.
- [6] Куликов К.Г. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 3. С. 110–114.