

01;03

Влияние тангенциального электрического поля на развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости пленки диэлектрической жидкости

© В.М. Коровин

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,
119192 Москва, Россия
e-mail: 1111@imec.msu.ru

(Поступило в Редакцию 8 ноября 2010 г. В окончательной редакции 18 февраля 2011 г.)

На базе длинноволнового приближения уравнений гидродинамики и упрощенной системы уравнений электростатики изучено влияние поверхностных пондеромоторных сил, создаваемых однородным тангенциальным электрическим полем, на развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости изотермической пленки однородной несжимаемой диэлектрической жидкости, покрывающей нижнюю поверхность горизонтальной диэлектрической пластины. Нижней границей жидкости является поверхность раздела с покоящимся газом. В рамках линейной теории показано, что при распаде сплошной пленки пондеромоторные силы вызывают формирование жидких валов, вытянутых вдоль силовых линий приложенного поля.

Введение

Известно, что достаточно сильное однородное электрическое поле, перпендикулярное горизонтальной свободной поверхности покоящейся диэлектрической жидкости (либо поверхности раздела кусочно-однородной устойчиво стратифицированной двухслойной диэлектрической жидкости), порождает неустойчивость плоской границы — см., например, библиографию в работах [1,2]. Тангенциальное поле вызывает анизотропию поверхностных волн, импульсивно возбужденных точечным источником на свободной поверхности жидкого диэлектрика: при фиксированной длине волны групповая скорость зависит от угла ϑ между волновым вектором и направлением приложенного электрического поля, достигая максимального значения $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ [3].

В двухслойной жидкости с резким отличием проводимостей и диэлектрических проницаемостей слоев, подверженных воздействию электрического поля, существенное влияние на устойчивость плоской поверхности раздела оказывает процесс релаксации электрического заряда [4].

В электрогидродинамике в зависимости от характерных величин определяющих параметров наряду с моделью слабопроводящей жидкости [5] широко используется модель однородного по своим физическим характеристикам идеального несжимаемого жидкого диэлектрика. В этом предельном случае силовое воздействие электрического поля на жидкость осуществляется за счет поверхностных поляризационных сил.

На базе такой модели рассмотрена задача Рэля—Тейлора для двух полуограниченных невязких диэлектрических жидкостей при наличии перпендикулярного электрического поля и показано, что в нелинейной постановке в зависимости от величин волнового числа и отношения плотностей жидкостей электрическое поле может оказывать как дестабилизирующее, так и

стабилизирующее воздействие [1]. В частном случае при $\vartheta = 0$ проведен нелинейный анализ рэлей-тейлоровской неустойчивости при наличии тепло- и массообмена в двухслойной диэлектрической жидкости, находящейся в тангенциальном поле, и построены области устойчивости в плоскости параметров (волновое число)–(квадрат напряженности электрического поля) [6].

Применительно к случаю сильного тангенциального электрического поля в последнее время получены точные решения, описывающие нелинейные трехмерные волны на свободной поверхности глубокой диэлектрической жидкости с большим коэффициентом диэлектрической проницаемости [7].

С использованием модели идеального жидкого диэлектрика показано, что тангенциальное электрическое поле оказывает стабилизирующее воздействие на неустойчивость Кельвина–Гельмгольца при движении в газе тонкого плоского слоя невязкой жидкости [8]. Применительно к окруженным газом пленкам невязких диэлектрических жидкостей с двумя плоскими в начальный момент времени границами изучено влияние тангенциального поля на двумерные симметричные [9,10] и антисимметричные [11] нелинейные капиллярные волны и на динамику пленки [9]. В аналогичной постановке при симметричных колебаниях противоположных свободных поверхностей показано [12], что тангенциальное электрическое поле оказывает стабилизирующее влияние на сверхтонкую (толщиной 100–1000 Å) пленку вязкой диэлектрической жидкости, динамика которой в значительной степени определяется расклинивающим давлением, создаваемым силами Ван-дер-Ваальса.

В отличие от имеющихся работ в настоящей работе влияние тангенциального электрического поля на развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости плоской пленки вязкой диэлектрической жидкости, покрывающей нижнюю поверхность горизонтальной диэлектрической пластины, изучено с учетом вызываемого полем эффекта анизотропии.

В отсутствие электрического поля исследование рэлей–тейлоровской неустойчивости тонкого слоя вязкой жидкости, смачивающей нижнюю поверхность горизонтальной пластины, проведено в работе [13]. В экспериментах с тонким слоем силиконового масла в зависимости от формы реализованного в начальный момент времени возмущения плоской свободной поверхности при развитии рэлей–тейлоровской неустойчивости наблюдались сформировавшиеся жидкие валы, концентрические кольца, периодические ячейки, состоящие из шести жидких пиков, симметрично расположенных относительно центральных пиков, и другие двумерные структуры. При числах Бонда Bo , меньших критического значения $Bo_c = 4 \cdot 10^{-2}$, жидкие пики, образующиеся на финальной стадии эксперимента, длительное время удерживаются на нижней поверхности пластины капиллярными силами.

О расчете электрического поля в неограниченной кусочно-однородной диэлектрической среде, содержащей тонкий слой

Рассмотрено поведение плоской в начальный момент времени $t = 0$ изотермической пленки однородного жидкого диэлектрика, покрывающей нижнюю поверхность горизонтальной диэлектрической пластины, помещенной в создаваемое внешним устройством однородное горизонтальное электрическое поле E_0 (рис. 1). Обозначим ϵ_1, ϵ_2 диэлектрические проницаемости соответственно жидкости и материала пластины. Предполагается, что в рассматриваемых средах нет свободных зарядов.

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z с базисом $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$. Пусть ось x параллельна E_0 и лежит в плоскости верхней границы пленки, ось y перпендикулярна плоскости рисунка, а ось z направлена вертикально вниз. Нижней границей пленки является поверхность раздела $z = c(x, y, t)$ с покоящимся газом. Толщина c_0 пленки в начальный момент мала по сравнению с капиллярной длиной $l_c = \sqrt{\alpha/\rho g}$, т.е. $\epsilon = c_0/l_c = \sqrt{Bo} \ll 1$, где $Bo = \rho g c_0^2/\alpha$ — число

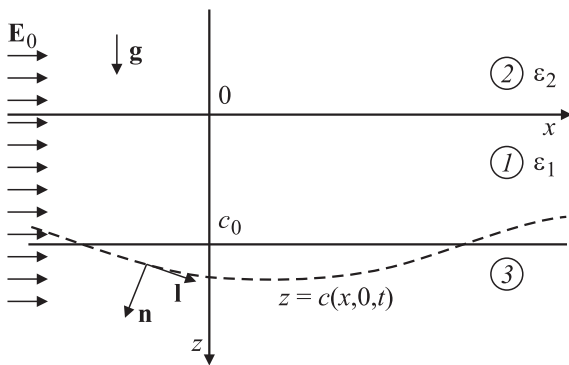


Рис. 1. Геометрия задачи и обозначения.

Бонда. Здесь и далее ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, а α — коэффициент поверхностного натяжения. В качестве примера укажем, что для силиконового масла $l_c = 1.49$ mm.

Наряду с базисом $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ в каждой точке поверхности раздела жидкость–газ введем неортогональный триэдр $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$, где \mathbf{l}, \mathbf{m} — единичные векторы, лежащие в касательной плоскости, проходящей через рассматриваемую точку поверхности раздела, а \mathbf{n} — внешняя нормаль:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial c}{\partial x})^2}} \left(\mathbf{a}_x + \frac{\partial c}{\partial x} \mathbf{a}_z \right), \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial c}{\partial y})^2}} \left(\mathbf{a}_y + \frac{\partial c}{\partial y} \mathbf{a}_z \right), \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{+(\frac{\partial c}{\partial x})^2 + (\frac{\partial c}{\partial y})^2}} \left(-\frac{\partial c}{\partial x} \mathbf{a}_x - \frac{\partial c}{\partial y} \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагается, что линейные размеры пластины вдоль осей x, y велики по сравнению с ее толщиной. Ввиду этого при расчете поля краевыми эффектами у торцов пластины пренебрегаем. В рамках такого приближения в силу геометрии задачи поляризационные заряды в объемах жидкости и пластины и на поверхностях раздела сред в начальный момент времени отсутствуют.

Вызываемое силой тяжести искажение первоначально плоской поверхности диэлектрической жидкости, находящейся в тангенциальном поле, влечет за собой появление поляризационных зарядов, возмущающих первоначально однородное электрическое поле. Пусть $\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_0 + \mathbf{e}_j$ — возмущенное поле в жидкой пленке ($j = 1$), в пластине ($j = 2$) и в граничащем с пленкой газе ($j = 3$).

Возмущения полей \mathbf{e}_j описываются уравнениями электростатики

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{jz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{jy}}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial e_{jx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{jz}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial e_{jy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{jx}}{\partial y} &= 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial e_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial e_{jy}}{\partial y} + \frac{\partial e_{jz}}{\partial z} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

На поверхностях раздела рассматриваемой кусочно-однородной диэлектрической среды тангенциальная компонента электрического поля и нормальная компонента вектора электрической индукции $\mathbf{D}_j = \epsilon_j(\mathbf{E}_0 + \mathbf{e}_j)$ непрерывны

$$\text{при } z = 0: \quad e_{1x} = e_{2x}, \quad e_{1y} = e_{2y}, \quad \epsilon_1 e_{1z} = \epsilon_2 e_{2z} \quad (4)$$

$$\text{при } z = c(x, y, t): \quad (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)\mathbf{l} = 0, \quad (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)\mathbf{m} = 0, \quad (5)$$

$$[\epsilon_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + (\epsilon_1 - 1)\mathbf{E}_0]\mathbf{n} = 0.$$

Предполагается, что характерный линейный размер L области на плоскости $z = 0$, в пределах которой толщина жидкой пленки в процессе развития рэлей-тейлоровской неустойчивости претерпевает изменение порядка c_0 , мал по сравнению с толщиной пластины. В этом случае допустима постановка асимптотического условия для возмущения поля в области, занятой пластиной

$$\text{при } \frac{z}{L} \rightarrow -\infty : \quad \mathbf{e}_2 \rightarrow 0. \quad (6)$$

Из экспериментов известно [13], что в отсутствие электрического поля $L \approx l_c$ реализуется длинноволновой ($c_0/l_c \ll 1$) режим развития рэлей-тейлоровской неустойчивости пленки.

Независимо от толщины пластины возмущение электрического поля в граничащем с пленкой газе исчезает на большом удалении от жидкости

$$\text{при } \frac{z}{L} \rightarrow \infty : \quad \mathbf{e}_3 \rightarrow 0. \quad (7)$$

Из первых двух уравнений (2), относящихся к жидкой пленке ($j = 1$), следует

$$e_{1x} \approx e_{1z}\delta, \quad e_{1y} \approx e_{1z}\delta, \quad \text{где } \delta = \frac{c_0}{L}.$$

С использованием этих оценок заключаем, что в длинноволновом ($\delta \ll 1$) режиме развития рэлей-тейлоровской неустойчивости уравнение (3) для \mathbf{e}_1 после отбрасывания членов порядка δ^2 принимает вид

$$\frac{\partial e_{1z}}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

т. е. вертикальная компонента возмущения электрического поля не изменяется поперек пленки.

Полагая $e_{3x} \approx e_{3y} \approx e_{3z}$ и пренебрегая в последнем равенстве (5) малыми порядков δ и выше, с использованием (1) получаем

$$\varepsilon_1 e_{1z} - e_{3z} = (\varepsilon_1 - 1)E_0 \frac{\partial c}{\partial x}. \quad (9)$$

С учетом выражений (8), (9) после введения потенциалов $\varphi_j(x, y, x, t)$ возмущений электрических полей

$$\mathbf{e}_j = -\nabla\varphi_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\text{где } \nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

задача (2)–(7) в длинноволновом приближении записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0, \quad j = 2, 3 \quad (10)$$

$$\text{при } z = 0 : \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\text{при } z = c(x, y, t) : \quad \varphi_1 = \varphi_3,$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = (\varepsilon_1 - 1)E_0 \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{при } \frac{z}{L} \rightarrow -\infty : \quad & \nabla\varphi_2 \rightarrow 0, \\ \text{при } \frac{z}{L} \rightarrow \infty : \quad & \nabla\varphi_3 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, ввиду малой толщины пленки изменение по z вертикальной компоненты возмущения электрического поля происходит в основном вне области, занятой жидкостью.

Постановка задачи Рэля–Тейлора в случае поляризованной пленки

Из выражения для плотности объемной пондеромоторной силы, полученного Максвеллом [14], следует, что в рамках используемой далее модели однородной несжимаемой диэлектрической жидкости, не содержащей свободных зарядов, эта сила равна нулю. Для описания развития рэлей-тейлоровской неустойчивости пленки поляризованного однородного жидкого диэлектрика используется упрощенная в длинноволновом приближении система уравнений гидродинамики, предложенная для пленки в отсутствие электрического поля [13,15].

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (14)$$

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g. \quad (15)$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости, p — давление, а η — коэффициент динамической вязкости жидкости. Уравнения движения (15) получены в результате подстановки в полные уравнения Навье–Стокса, записанные в безразмерном виде, разложений искомых функций по степеням малого параметра δ и последующего удержания в каждом из трех уравнений членов лидирующего порядка.

Известно [14,16], что на незаряженной границе двух поляризованных жидких диэлектриков возникают нормальные к границе поверхностные пондеомоторные силы. В рамках модели несжимаемой жидкости эти силы всегда направлены в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

В рассматриваемой задаче за счет действия поверхностных пондеомоторных сил давление вблизи свободной поверхности со стороны жидкости (без учета капиллярного скачка давления) оказывается меньше постоянного давления в газе p_a на величину [16]

$$P_e = \frac{(\varepsilon_1 - 1)}{8\pi} [E_1^2 + (\varepsilon_1 - 1)(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n})^2].$$

В длинноволновом приближении из этой формулы следует

$$P_e' = \frac{\varepsilon_1 - 1}{8\pi} \left\{ E_0^2 - 2E_0 \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - 2(\varepsilon_1 - 1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial x} \right] + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (16)$$

При постановке гидродинамической задачи о движении поляризованной диэлектрической жидкости скачок давления (16) требуется учесть при записи динамического условия, выражающего равенство нормальных составляющих сил, с которыми действуют на поверхность раздела две соприкасающиеся среды

$$\text{при } z = c(x, y, t) : \quad p - p_a = -\alpha\Delta_2 c - \Pi_2^l,$$

$$\text{где } \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (17)$$

В длинноволновом приближении условие отсутствия касательных напряжений на поверхности раздела имеет вид [13]

$$\text{при } z = c(x, y, t) : \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Наличие электрического поля, очевидно, никак не сказывается на формах записи условия прилипания частиц вязкой жидкости к твердой стенке и кинематического условия на свободной поверхности

$$\text{при } z = 0 : \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad (19)$$

$$\text{при } z = c(x, y, t) : \quad \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = w. \quad (20)$$

Таким образом, движение поляризованной жидкости в процессе развития рэлей–тейлоровской неустойчивости пленки описывается системой уравнений (10), (14), (15) с граничными условиями (11)–(13), (17)–(20).

До момента возникновения возмущений жидкость находится в состоянии гидростатического равновесия с плоской свободной поверхностью. При этом давление p_0 является линейной функцией z :

$$p_0 = p_a - \frac{\varepsilon_1 - 1}{8\pi} E_0^2 + \rho g(z - c_0).$$

Формулировка гидродинамической задачи (14), (15), (17)–(20) допускает существенное упрощение.

Легко выписать решение последнего уравнения системы (15), удовлетворяющее граничному условию (17):

$$p = p_a + \rho g(z - c) - \alpha\Delta_2 c - \Pi_e^l|_{z=c(x,y,t)}. \quad (21)$$

Принимая во внимание это выражение, находим решения первых двух уравнений системы (15), удовлетворяющие граничным условиям (18), (19)

$$u = \frac{z}{2\eta} [z - 2c(x, y, t)] \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = \frac{z}{2\eta} [z - 2c(x, y, t)] \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (22)$$

Далее из уравнения неразрывности (14) находим распределение вертикальной компоненты скорости $w(x, y, z, t)$, обращаемой в нуль на твердой стенке

$$w = - \int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz. \quad (23)$$

С учетом (23) кинематическое условие на свободной поверхности пленки (20) принимает вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{c(x,y,t)} u dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{c(x,y,t)} v dz. \quad (24)$$

Вычислив с учетом выражений (21), (22) правую часть (24), получаем уравнение

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{3\eta} \operatorname{div} \left\{ c^3 \nabla_2 \left[\rho g c + \alpha\Delta_2 c - \frac{\varepsilon_1 - 1}{8\pi} \left\{ 2E_0 \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - 2(\varepsilon_1 - 1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial x} \right] - \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] \right\} \Big|_{z=c(x,y,t)} = 0,$$

где $\nabla_2 = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (25)$

описывающее эволюцию локальной толщины пленки на начальном интервале времени вплоть до момента, когда в окрестности какой-либо точки поверхности пластины область, занятая жидкостью, теряет односвязность.

Таким образом, развитие рэлей–тейлоровской неустойчивости пленки поляризованной диэлектрической жидкости описывается совместным решением эволюционного уравнения (25) и задачи электростатики (10)–(13). При этом давление (21) и поле скоростей (22) выражаются в явном виде через координату z и функции

$$c(x, y, t), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{z=c(x,y,t)}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=c(x,y,t)}.$$

Ограничимся исследованием линейной стадии неустойчивости. Полагая

$$c(x, y, t) = c_0 + \xi(x, y, t), \quad \frac{|\xi|}{c_0} \ll 1,$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{z=c_0} \ll E_0, \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=c_0} \ll E_0,$$

линеаризуем эволюционное уравнение (25) и граничные условия (12) задачи электростатики:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{c_0^3}{3\eta} \Delta_2 \left[\rho g \xi + \alpha\Delta_2 \xi - \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} E_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{z=c_0} \right] = 0, \quad (26)$$

$$\text{при } z = c_0 : \quad \varphi_1 = \varphi_3,$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = (\varepsilon_1 - 1) E_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (27)$$

Дальнейший анализ проводится в рамках системы уравнений (10), (26) с граничными условиями (11), (13), (27).

Влияние пондеромоторных сил на развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости

Возникшее в начальный момент времени возмущение $\xi(x, y, 0)$ плоской свободной поверхности пленки, достаточно быстро убывающее при $x, y \rightarrow \pm\infty$, можно представить в виде интеграла Фурье. Обозначим через $Z(k_x, k_y)$, $F_j(z, k_x, k_y)$, $j = 1, 2, 3$ фурье-компоненты соответственно функции $\xi(z, y, 0)$ и потенциалы возмущений магнитных полей $\varphi_j(x, y, z, 0)$ в начальный момент. Поскольку коэффициенты линеаризованного эволюционного уравнения (26) и уравнений электростатики (10) не зависят от времени, то решения этих уравнений $\varphi_j(x, y, z, t)$, $\xi(z, y, t)$, $j = 1, 2, 3$ можно представить в виде линейных суперпозиций соответствующих частных решений с разделенными переменными — нормальных мод

$$F_j(z, k_x, k_y) \exp\{i[k_x x + k_y y - \omega(k_x, k_y)t]\}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (28)$$

$$Z(k_x, k_y) \exp\{i[k_x x + k_y y - \omega(k_x, k_y)t]\}.$$

Здесь $F_j(z, k_x, k_y)$, $\omega(k_x, k_y)$ — неизвестные функции, i — мнимая единица, а k_x, k_y — вещественные параметры (компоненты двумерного волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$).

После подстановки выражений (28) в уравнения электростатики (10) и в граничные условия (11), (27), получаем

$$\frac{d^2 F_1}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 F_j}{dz^2} - k^2 F_j = 0, \quad j = 2, 3,$$

$$\text{при } z = 0: \quad F_1 = F_2, \quad \varepsilon_1 \frac{dF_1}{dz} = \varepsilon_2 \frac{dF_2}{dz},$$

$$\text{при } z = c_0: \quad F_1 = F_3,$$

$$\frac{dF_3}{dz} - \varepsilon_1 \frac{dF_1}{dz} = ik_x(\varepsilon_1 - 1)E_0 Z,$$

где $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ — волновое число.

С точностью до малых порядка $kc_0\varepsilon_2/\varepsilon_1$ решение этой задачи, исчезающее при $z \rightarrow \pm\infty$, записывается следующим образом:

$$F_1 = -\frac{ik_x}{\varepsilon_1 k} \frac{(\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 k z)}{\varepsilon_2 + 1} E_0 z,$$

$$F_2 = -\frac{ik_x}{k} \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_2 + 1} E_0 Z e^{kz},$$

$$F_3 = -\frac{ik_x}{k} \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_2 + 1} E_0 Z e^{k(c_0 - z)}.$$

Подстановка выражений (28) в эволюционное уравнение (26) с учетом найденной функции F_1 приводит к дисперсионному уравнению

$$\omega = i \frac{c_0^3}{3\eta} \left[\rho g (k_x^2 + k_y^2) - \frac{(\varepsilon_1 - 1)^2}{4\pi(\varepsilon_2 + 1)} E_0^2 k_x^2 \sqrt{k_x^2 + k_y^2} - \alpha (k_x^2 + k_y^2)^2 \right]. \quad (29)$$

Отсюда следует, что пондеромоторные силы не оказывают влияния на нормальные моды с $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_0$.

Введем обозначение $\omega_i = \text{Im } \omega$. Уравнение (29) определяет в пространстве переменных k_x, k_y, ω_i некоторую поверхность $\omega_i = \psi(k_x, k_y)$. Двумерная область на плоскости k_x, k_y , в которой при заданной величине E_0 выполняется условие $\omega_i > 0$, представляет область экспоненциального роста мод по времени, т.е. область неустойчивости.

В случае $\mathbf{E}_0 = 0$ поверхность $\omega_i = \psi(k_x, k_y)$ является, очевидно, поверхностью вращения. Это означает, что при фиксированном $|\mathbf{k}|$ в отсутствие электрического поля все моды каждого из четырех множеств (28) независимо от направления волнового вектора \mathbf{k} с ростом времени ведут себя одинаково.

Известно, что в отсутствие поля волновое число k_m^0 , длина волны λ_m^0 и характерное время τ_0 развития наиболее быстро растущей моды начального возмущения формы свободной поверхности определяются выражениями [13]

$$k_m^0 = \frac{1}{\sqrt{2}l_c}, \quad \lambda_m^0 = 2\pi\sqrt{2}l_c, \quad \tau_0 = \frac{12\alpha\eta}{\rho^2 g^2 c_0^3}.$$

Легко установить, что при наличии электрического поля стационарными точками функции $\omega_i = \psi(k_x, k_y)$, наряду с началом координат, являются точки $(0, \pm k_m^0)$, $(\pm k_s, 0)$, где

$$k_s = k_m^0 \left(-\frac{3}{8} Q + \sqrt{1 + \frac{9}{64} Q^2} \right),$$

$$Q = \frac{(\varepsilon_1 - 1)^2 E_0^2}{2\pi\sqrt{2}\rho g \alpha (\varepsilon_2 + 1)}.$$

При переходе в (29) к безразмерным переменным

$$\kappa_1 = \frac{k_x}{k_m^0}, \quad \kappa_2 = \frac{k_y}{k_m^0}, \quad \Omega_i = \omega_i \tau_0$$

получаем

$$\Omega_i = 2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) - Q\kappa_1^2 \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^2. \quad (30)$$

Из записанного в безразмерном виде дисперсионного уравнения (30) следует, что в отсутствие поля (случай $Q = 0$) область неустойчивости представляется внутренностью круга $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 < 2$ с исключенным началом координат, в то время как нормальные моды с $\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} > \sqrt{2}$ — внешность круга — стабилизируются капиллярными силами. Воздействие капиллярных сил описывается последним слагаемым в правой части выражения (30).

На рис. 2, 3 показаны лежащие в верхнем полупространстве части рельефа функции (30), соответствующие областям неустойчивости при $Q = 0$, $Q = 1$.

В противоположность случаю $Q = 0$ (рис. 2), когда дисперсионная зависимость представляется поверхностью вращения, при наличии поля (рис. 3) рельеф

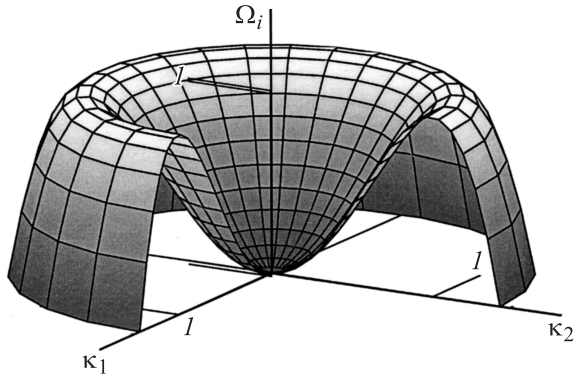


Рис. 2. Дисперсионная зависимость при $Q = 0$.

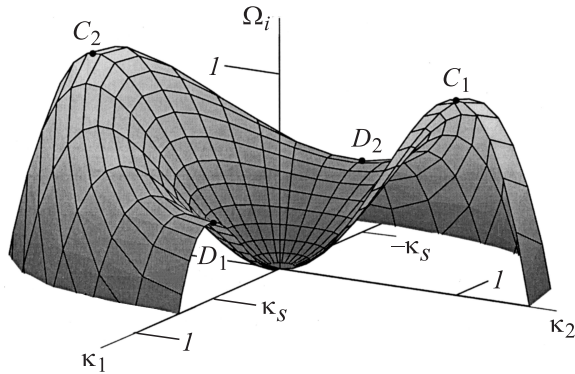


Рис. 3. Дисперсионная зависимость при $Q = 1$.

функции $\Omega_i(\kappa_1, \kappa_2)$ имеет — вследствие вызываемого полем эффекта анизотропии — две симметрично расположенные вершины — точки $C_{1,2} = (0, \pm 1, 1)$ и две седловые точки $D_{1,2} = (\pm \kappa_s, 0, \Omega_i^s)$, где

$$\kappa_s = -\frac{3}{8}Q + \sqrt{1 + \frac{9}{64}Q^2},$$

$$\Omega_i^s = 1 - Q \left(1 + \frac{9}{64}\right)^{3/2} + \frac{9}{16}Q^2 \left(1 + \frac{3}{32}Q^2\right).$$

Из представленного на рис. 3 графического изображения дисперсионной зависимости (30) видно, что наибольшее воздействие электрическое поле оказывает на моды с волновыми векторами $\kappa_s = (\kappa_s, 0)$ и $-\kappa_s$, соответствующими седловыми точками.

Вводя в плоскости переменных κ_1, κ_2 полярную систему координат κ, ϑ

$$\kappa_1 = \kappa \cos \vartheta, \quad \kappa_2 = \kappa \sin \vartheta$$

перепишем дисперсионное уравнение (30)

$$\Omega_i = \kappa^2(2 - Q\kappa \cos^2 \vartheta - \kappa^2). \quad (31)$$

Отсюда находим уравнение семейства кривых нейтральной устойчивости, вдоль которых при фиксированном Q выполняется условие $\Omega_i = 0$:

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(-Q \cos \vartheta + \sqrt{Q^2 \cos^2 \vartheta + 8} \right).$$

На рис. 4 кривые нейтральной устойчивости представлены в плоскости κ_1, κ_2 . Из рисунка видно, что поверхностные подемоторные силы при $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}, \vartheta \neq \frac{3\pi}{2}$ стабилизируют некоторый диапазон неустойчивых в отсутствие поля мод. С ростом безразмерного параметра подобия Q (например, за счет увеличения E_0) диапазон стабилизируемых мод расширяется. При этом область неустойчивости сужается по оси κ_1 .

С использованием выражения (31) легко показать, что при фиксированном $Q \neq 0$ среди мод с волновыми векторами \mathbf{k} , составляющими заданный угол ϑ с вектором \mathbf{E}_0 , наиболее быстрый рост испытывает мода, у которой $k = k_m(\vartheta, Q)$, где

$$k_m(\vartheta, Q) = k_m^0 \left(-\frac{3}{8}Q \cos^2 \vartheta + \sqrt{1 + \frac{9}{64}Q^2 \cos^4 \vartheta} \right).$$

Длина волны $\lambda_m(\vartheta, Q)$ и характерное время развития $\tau_m(\vartheta, Q) = \omega_i^{-1}[k_m(\vartheta, Q)]$ этой моды определяются выражениями

$$\lambda_m(\vartheta, Q) = \frac{\lambda_m^0}{-\frac{3}{8}Q \cos^2 \vartheta + \sqrt{1 + \frac{9}{64}Q^2 \cos^4 \vartheta}},$$

$$\tau_m(\vartheta, Q) = \frac{\tau_0}{1 - Q \cos^2 \vartheta \left(1 + \frac{9}{64}A\right)^{3/2} + \frac{9}{16}A \left(1 + \frac{3}{32}A\right)},$$

где $A = Q^2 \cos^4 \vartheta$. Отметим, что при $Q \neq 0$ функции $\lambda_m(\vartheta, Q), \tau_m(\vartheta, Q)$ являются периодическими с периодом π .

Графики функций $\lambda_m(\vartheta, Q)/\lambda_m^0, \tau_m(\vartheta, Q)/\tau_0$, представленные на рис. 5, 6, показывают, что на множестве мод, волновые векторы которых составляют фиксированный угол $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}, \vartheta \neq \frac{3\pi}{2}$ с вектором \mathbf{E}_0 , длина волны наиболее быстро растущей моды и характерное время ее

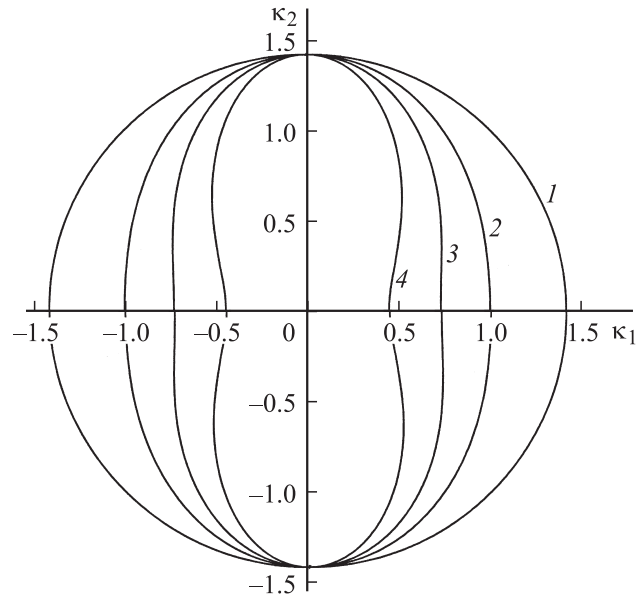


Рис. 4. Нейтральные кривые. Линии 1–4 соответствуют значениям параметра $Q = 0, 1, 2, 4$.

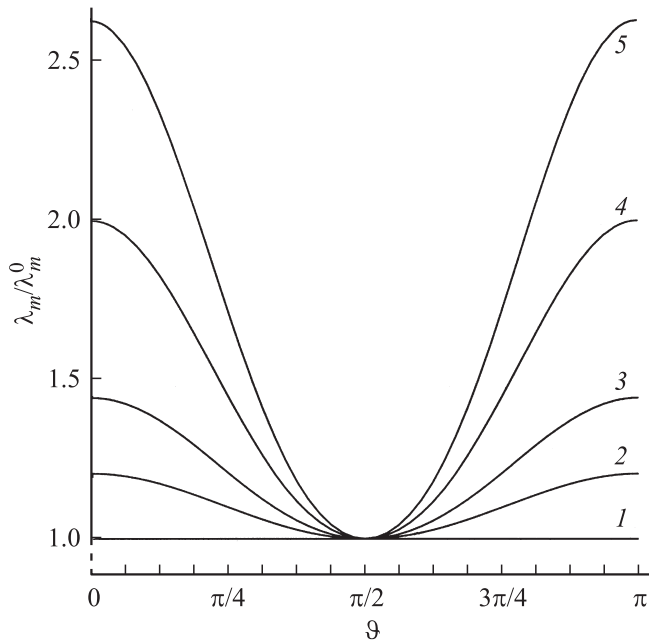


Рис. 5. Зависимости нормированной длины волны наиболее быстро (при фиксированных ϑ и Q) растущей моды от направления волнового вектора. 1–5 соответствуют значениям параметра $Q = 0, 0.5, 1, 2, 3$.

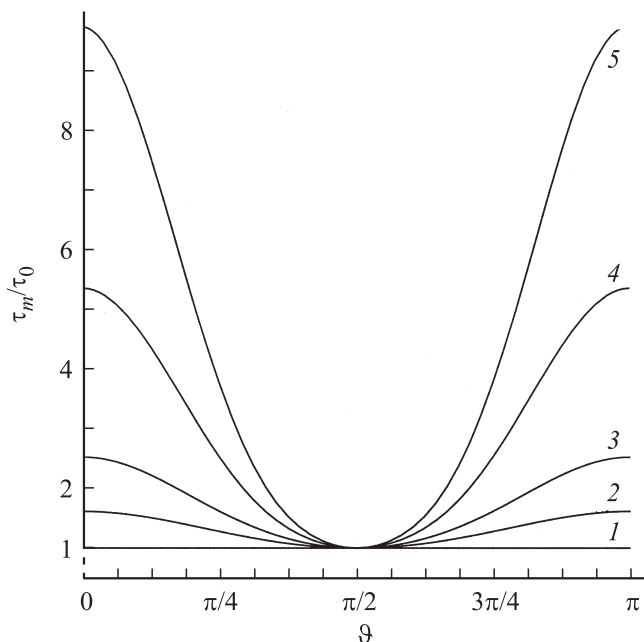


Рис. 6. Зависимости нормированного характерного времени развития наиболее быстро (при фиксированных ϑ и Q) растущей моды от направления волнового вектора. 1–5 соответствуют значениям параметра $Q = 0, 0.5, 1, 2, 3$.

развития с ростом Q увеличивается во всем диапазоне изменения угла ϑ . Как отмечалось выше, при заданном Q наиболее сильно этот эффект проявляется при $\vartheta = 0, \vartheta = \pi$.

Из рис. 6 видно, что среди всех мод при любом $Q \neq 0$ наиболее быстро растут моды с $\mathbf{k} = \pm k_m^0 \mathbf{a}_y$, не испытывающие стабилизирующее воздействие помпедиторных сил. Ввиду этого при достаточно больших Q и конечных t доминирующий вклад в интегральное представление возмущения формы свободной поверхности пленки

$$\xi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z(k_x, k_y) \exp[i(k_x x + k_y y) + \omega_i(k_x, k_y)] dk_x dk_y$$

вносят точки $(0, \pm k_m^0)$ совместно со своими малыми окрестностями. В результате на линейной стадии развития неустойчивости толщина пленки с течением времени изменяется вдоль оси x значительно медленнее, чем вдоль оси y .

Таким образом, в рамках линейной теории развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости пленки жидкого диэлектрика, находящейся в достаточно сильном продольном электрическом поле, при любом зависящем от y начальном возмущении формы свободной поверхности (как одномерном, так и двумерном) приводит к формированию системы валов, вытянутых вдоль силовых линий приложенного поля.

В отсутствие электрического поля валы экспериментально наблюдались лишь в случае реализации одномерного возмущения плоской свободной поверхности тонкого слоя вязкой жидкости [13].

Заключение

Применительно к случаю малых чисел Бонда изучено влияние создаваемого внешним устройством горизонтального электрического поля \mathbf{E}_0 на развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости изотремической пленки однородной диэлектрической жидкости, смачивающей нижнюю поверхность горизонтальной диэлектрической пластины. Предполагается, что в рассматриваемых средах нет свободных зарядов.

В рамках длинноволновой модели гидродинамическая часть задачи Рэля–Тейлора сведена к нелинейному эволюционному уравнению и явным выражением для давления и поля скоростей. Полученное уравнение описывает изменение локальной толщины пленки до момента времени, когда в окрестности какой-либо точки поверхности пластины область, занятая жидкостью, теряет односвязность.

Деформация свободной поверхности вызывает возмущение приложенного электрического поля. В длинноволновом приближении изменение поперек пленки вертикальной компоненты возмущения поля пренебрежимо мало. Ввиду этого задача электростатики о расчете возмущенного электрического поля в рассматриваемой кусочно-однородной диэлектрической среде упрощается.

В линейной постановке на базе эволюционного уравнения и задачи электростатики исследовано развитие трехмерных возмущений гидростатического состояния жидкости, имеющей в начальный момент времени плоскую свободную поверхность.

Установлено, что при наличии тангенциального электрического поля доминирующий вклад в интегральном представлении формы свободной поверхности создают неустойчивые моды с волновыми векторами, направления которых составляют с вектором \mathbf{E}_0 углы, близкие к $\pi/2$ и $3\pi/2$. Вследствие этого почти постоянная в начальный момент толщина пленки с ростом времени на линейной стадии развития неустойчивости изменяется в поперечном к полю направлении значительно быстрее, чем вдоль поля. В результате формируется система валов, параллельных вектору \mathbf{E}_0 .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00051).

Список литературы

- [1] Mohamed A.A., El Shehawey E.F. // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 129. P. 473–494.
- [2] Dong Junhang, Almeida V.F., Tsouris C. // J. Colloid Interface Sci. 2001. Vol. 242. P. 327–336.
- [3] Melcher J.R. // Phys. Fluids. 1961. Vol. 4. N 11. P. 1348–1354.
- [4] Melcher J.R., Schwarz W.J., Jr. // Phys. Fluids. 1968. Vol. 11. N 12. P. 2604–2616.
- [5] Saville D.A. // Ann. Rev. Fluid Mech. 1997. Vol. 29. P. 27–64.
- [6] Mohamed A.A., Elhefnawy F.R.F., Mahmoud Y.D. // Physica A. 1993. Vol. 195. P. 74–92.
- [7] Зубарев Н.М. // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 89. Вып. 6. С. 317–321.
- [8] El-Sayed M.F. // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. N 6. P. 7588–7591.
- [9] Tilley B.S., Petropoulos P.G., Papageorgiou D.T. // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13. N 12. P. 3547–3563.
- [10] Papageorgiou D.T., Vanden-Broeck J.-M. // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 508. P. 71–88.
- [11] Papageorgiou D.T., Vanden-Broeck J.-M. // Euro. J. Appl. Math. 2004. Vol. 15. P. 609–623.
- [12] Savettaseraanee K., Papageorgiou D.T., Petropoulos P.G., Tilley B.S. // Phys. Fluids. 2003. Vol. 15. N 3. P. 641–652.
- [13] Fermigier M., Limat L., Wesfreid J.E., Boudinet P., Quilliet C. // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 236. P. 349–383.
- [14] Сивухин Д.В. Электричество. М.: Наука. 1983. 688 с.
- [15] Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. // Rev. Mod. Physics. 1997. Vol. 69. N 3. P. 931–980.
- [16] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1992. 664 с.