

# Максимум энтропии в нелинейной системе с $1/f$ -спектром флуктуаций

© В.П. Коверда, В.Н. Скоков

Институт теплофизики УрО РАН,  
620016 Екатеринбург, Россия  
e-mail: koverda@itp.uran.ru

(Поступило в Редакцию 29 марта 2011 г.)

Проведен анализ управления и подчинения в системе нелинейных стохастических уравнений, описывающих флуктуации с  $1/f$ -спектром при взаимодействии неравновесных фазовых переходов. Показано, что управляющее уравнение системы имеет функцию распределения, которая спадает при возрастании аргумента так же, как и для гауссовского распределения. Поэтому эта функция может быть использована для нахождения информационной энтропии Гиббса–Шеннона. Найден локальный максимум этой энтропии, который соответствует настройке на критичность стохастических уравнений и свидетельствует об устойчивости флуктуаций с  $1/f$ -спектром. Из условия, что координаты максимума энтропии Гиббса–Шеннона совпадают с координатами максимума энтропии Цаллиса и максимума энтропии Реньи для функций распределения, содержащих степенную зависимость, найдены значения параметра  $q$ , который входит в определение этих энтропий.

## Введение

В сложных системах часто наблюдаются флуктуации или шум со спектром мощности, обратно пропорциональным частоте:  $S(f) \propto 1/f$  [1,2]. Такое поведение спектра может сохраняться с изменением частоты в диапазоне нескольких порядков величины. Стационарные случайные процессы с таким спектром характеризуются вспышками и лавинной динамикой. Значительная часть энергии флуктуаций накапливается на низких частотах, и в таких системах возможны катастрофические выбросы, а сами флуктуации имеют масштабно-инвариантное распределение. Свойствами масштабной инвариантности обладают пульсации потока жидкости при турбулентном режиме течения [3], а также флуктуации термодинамических величин вблизи равновесной критической точки [4]. Общее, но формальное математическое описание  $1/f$ -шума дает дробное броуновское движение, при котором интенсивность флуктуаций вычисляется с помощью дробного интегрирования белого шума [5].

Теория самоорганизованной критичности [6] и относящаяся к ней лавинная динамика были предложены в качестве общего механизма возникновения  $1/f$ -шума в неравновесных системах. Она описывает случайные процессы в системах с фрактальными пространственными и временными свойствами, а для моделирования используются клеточные автоматы. Идеи самоорганизованной критичности проиллюстрированы большим числом компьютерных моделей систем, включающих „кучу песка“ [6], эволюцию биологических систем [7] и межфазную динамику [8], в которых существуют масштабно инвариантные распределения флуктуаций. В отличие от термодинамической критической точки в таких системах не требуется тонкая подстройка параметров состояния, а флуктуации не перекрываются и следуют одна за другой. Спектры мощности флуктуаций в моделях самоорганизованной критичности чаще всего непосредственно не

изменяются, а вычисляются из найденных распределений лавин. Модель „куча песка“, которая впервые была предложена для демонстрации самоорганизованной критичности, показала масштабную инвариантность лавин, однако спектральная плотность оказалась обратно пропорциональной не первой, а второй степени частоты, т. е.  $S(f) \propto f^{-2}$  [9]. Другие варианты моделей самоорганизованной критичности могут давать иные частотные зависимости спектров. Но самое главное достоинство таких моделей состоит в самонастройке критического состояния.

В работе [10] было показано, что стационарные случайные процессы с  $1/f$ -спектром мощности и масштабно-инвариантным распределением флуктуаций можно получить в системе двух нелинейных стохастических дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие гетерогенных фазовых переходов. Критическое поведение в данной системе соответствует определенному уровню белого шума, при котором осуществляется индуцированный шумом переход [11]. Исследования статистики флуктуаций в критическом режиме позволили выделить непересекающиеся и следующие одна за другой низкочастотные высокоэнергетические флуктуации, которые ответственны за возрастающую часть спектра мощности как в точечной [12], так и в пространственно распределенной системе [13]. В работах [12,13] было показано, что распределения длительностей и размеров низкочастотных экстремальных флуктуаций имеют степенной вид. Также были найдены скейлинговые соотношения между показателями, характеризующими частотную зависимость спектров и распределений длительностей и размеров экстремальных флуктуаций. Выделенные низкочастотные флуктуации имеют некоторую аналогию с лавинами в моделях самоорганизованной критичности, но описываются не клеточными автоматами, а системой стохастических

уравнений, которая позволяет непосредственно определять спектры. Однако в отличие от клеточных автоматов в стохастических уравнениях нет самонастройки на критическое поведение, и настройку на критический режим случайных процессов приходится делать вручную. При моделировании случайных процессов с  $1/f$ -спектром системой стохастических уравнений требуется задать определенную критическую интенсивность белого шума, а при численном решении — еще и определенный шаг интегрирования. Решениями стохастических уравнений являются вероятностные функции распределения, которые легко связать с информационной энтропией. Но в системе нелинейных стохастических уравнений, как и в сложных системах, существует иерархия управления и подчинения. Цель настоящей работы — установить эту иерархию для системы стохастических уравнений [10] и показать, что настройке на критичность этой системы отвечает локальный максимум информационной энтропии. Существование максимума энтропии не только объясняет настройку на критичность, но и свидетельствует об устойчивости режимов с  $1/f$ -спектром флуктуаций при их моделировании системой стохастических уравнений.

## Спектры и функции распределения

Стационарные случайные процессы с  $1/f$ -спектром в точечной системе дают стохастические дифференциальные уравнения [10]

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= -\varphi\psi^2 + \psi + \Gamma_1(t), \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\varphi^2\psi + 2\varphi + \Gamma_2(t),\end{aligned}\quad (1)$$

которые описывают динамику флуктуаций в точечной системе. Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  — динамические переменные, их сумма  $\psi + \varphi$  и разность  $\psi - \varphi$  связаны с параметрами порядка докритического и закритического фазовых переходов теории Ландау.  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  —  $\delta$ -коррелированные шумы с нормальным распределением

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \sigma^2\delta(t - t'). \quad (2)$$

Шумы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  могут иметь разные реализации, но одинаковые дисперсии  $\sigma^2$ . Система уравнений (1) описывает случайные блуждания в потенциале, рельеф которого представляет собой две гиперболические долины, разделенные барьером с точкой перевала в начале координат. Оптимальный уровень шума при достижении стационарности стохастического процесса должен быть достаточен для преодоления перевала при случайных блужданиях броуновской частицы. Сужающиеся все более круто стенки долины по мере удаления от начала координат не позволяют частице уйти слишком далеко по дну долины от перевала. Упомянутые выше экстремальные флуктуации как раз и соответствуют преодолению броуновской частицей энергетического барьера в начале координат.

Коэффициент 2 перед вторым слагаемым в правой части второго уравнения (1) нарушает потенциальность системы и делает второе уравнение управляющим. В этом можно убедиться, если попытаться найти приближенное аналитическое решение этой системы. Если рассмотреть только детерминированную часть уравнений системы (1), т.е. без воздействия белого шума, то легко заметить, что производная в левой части первого уравнения системы (1) близка к нулю, и ею можно пренебречь. Поэтому первое уравнение определяет только связь между параметрами  $\varphi$  и  $\psi$ , а именно  $\varphi = 1/\psi$ . Если эту связь подставить во второе уравнение, то получим дифференциальное уравнение для  $\psi$ , которое и определяет временную зависимость параметра  $\psi$ , а следовательно, и временную зависимость параметра  $\varphi$ . Такая зависимость подчинения и управления между уравнениями системы сохраняется и при воздействии белого шума на уравнения системы (1), хотя связь между флуктуирующими параметрами  $\varphi$  и  $\psi$  будет сложнее [14]. Неравноценность уравнений нужно учитывать при нахождении максимума энтропии системы, который должен определяться в первую очередь с помощью функции распределения управляющего параметра  $\psi$ .

Для численного интегрирования система (1) перепишется в виде

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1} &= (\varphi_i + \psi_i\Delta t)(1 + \psi_i^2\Delta t)^{-1} + \sigma_e p_i\Delta t^{0.5}, \\ \psi_{i+1} &= (\psi_i + 2\varphi_i\Delta t)(1 + \varphi_i^2\Delta t)^{-1} + \sigma_e q_i\Delta t^{0.5},\end{aligned}\quad (3)$$

где  $p_i$  и  $q_i$  — последовательности гауссовых случайных чисел с нулевым средним и единичным стандартным отклонением, которые моделируют белый шум. Индекс  $i$  относится к обозначению последовательности временных шагов интегрирования. Дисперсия гауссовых чисел  $\sigma_e^2$  связана с дисперсией белого  $\sigma^2$ -шума соотношением  $\sigma_e^2 = \sigma^2\Delta t$ , где  $\Delta t$  — шаг интегрирования. В уравнениях (3) величина  $\sigma_e$  вынесена в качестве коэффициента перед случайными числами с единичной дисперсией и моделирует интенсивность белого шума. Для наблюдения  $1/f$ -спектров величина  $\sigma_e$  находится из условия критичности системы (3).

Численное интегрирование (3) было проведено в окрестности критического состояния. Был использован ансамбль, содержащий 256 систем, и в каждой системе проведено 4096 временных шагов интегрирования. Исследована двумерная окрестность в интервале шагов интегрирования  $\Delta t$  от 0.03 до 0.12 и среднеквадратичных отклонений белого шума в интервале  $\sigma_e$  от 0.7 до 1.2. Для примера на рис. 1 приведены спектры  $S_\psi$  и  $S_\varphi$  для критического состояния, которому для заданного числа шагов интегрирования соответствовали значения  $\Delta t = 0.06$  и  $\sigma_e = 0.92$ . В критическом состоянии спектры переменных обратно пропорциональны частоте  $S_\psi \propto f^{-2}$ , а  $S_\varphi \propto f^{-1}$ . Плотности вероятности функций распределения  $P(\varphi)$  и  $P(\psi)$  для критического режима приведены на рис 2 и 3. Функция распределения  $P(\varphi) \propto \varphi^{-3}$  при  $\varphi \rightarrow \infty$ , т.е. имеет степенной

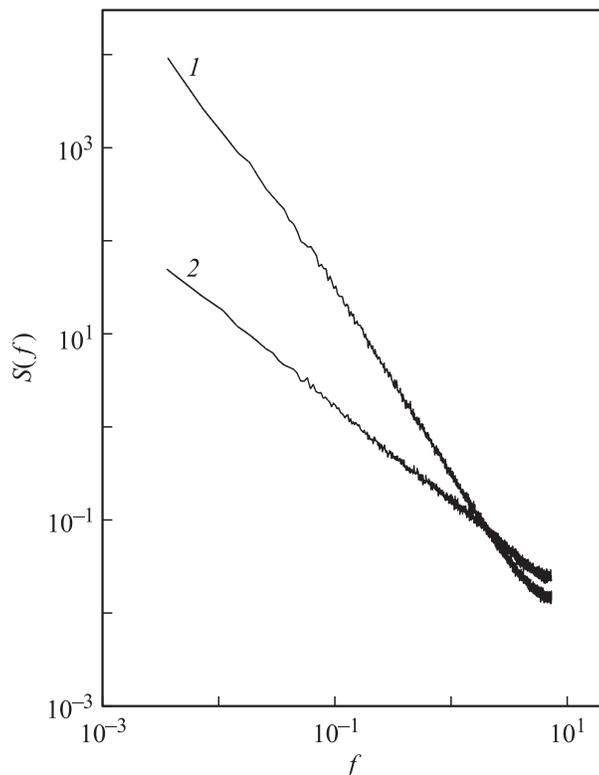


Рис. 1. Спектры мощности переменных  $\psi(t)$  — 1 и  $\varphi(t)$  — 2.

хвост, а функция распределения  $P(\psi)$  возрастает от нуля линейно, но при  $\psi \rightarrow \infty$  убывает по закону гауссова распределения.

Можно показать, что такие же зависимости хвостов распределений получаются из приближенного аналитического решения системы (1). Из численных расчетов известно, что спектр обратной по отношению  $\psi(t)$  случайной функции  $S_{1/\psi}$  обратно пропорционален первой степени частоты  $S_{1/\psi} \propto 1/f$  и совпадает со спектром  $S_\varphi$ , хотя функции распределения у реализаций  $\varphi(t)$  и  $1/\psi(t)$  разные. Они начинают совпадать только после масштабных преобразований со значительным огрублением временной шкалы [15]. Поэтому можно принять, что

$$\varphi(t) = \frac{1}{\psi(t)} + \vartheta(t), \quad (4)$$

где  $\vartheta(t)$  — новая случайная функция со спектром, независящим от частоты при низких частотах и спадающим с области высоких частот, а ее дисперсия  $\sigma_\vartheta^2 = \langle \vartheta^2 \rangle = \sigma^2 \Delta t$  зависит от шага интегрирования  $\Delta t$  [14]. Подставив (4) во второе уравнение системы (1), можно переписать уравнение для  $\psi(t)$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\psi} - \vartheta^2 \psi + \Gamma_2(t). \quad (5)$$

Если в первом приближении заменить квадрат неизвестной случайной функции  $\vartheta^2$  в уравнении (5) просто на величину дисперсии этой функции, то получим приближенное стохастическое уравнение для  $\psi(t)$ :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\psi} - \sigma^2 \psi \Delta t + \Gamma_2(t), \quad (6)$$

которое имеет простой математический смысл. Оно описывает случайные блуждания в силовом поле с потенциалом  $V(\psi)$

$$V(\psi) = -\ln |\psi| + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta t \psi^2. \quad (7)$$

Но из-за того что  $\sigma_\vartheta^2 = \sigma^2 \Delta t$  зависит от шага интегрирования  $\Delta t$  и второе слагаемое в правой части уравнения (6) также содержит шаг интегрирования, этому уравнению нельзя придать независимый физический смысл в отрыве от системы (1), которая имеет свой физический смысл. Но тогда нужно определить и вторую функцию  $\varphi(t)$ . Ее естественно выбрать как обратную

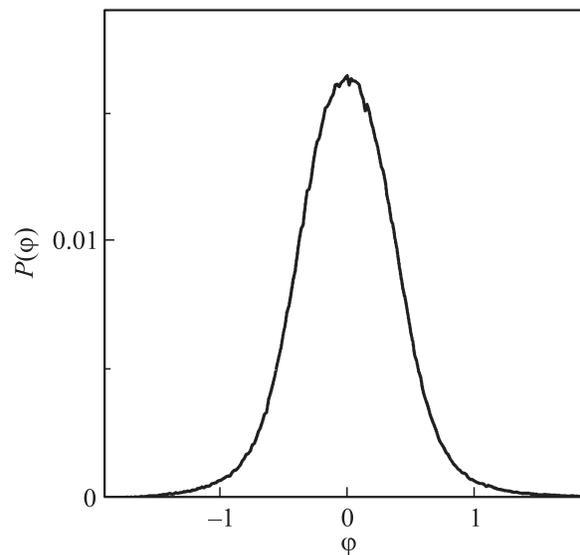


Рис. 2. Плотность вероятности распределения переменной  $\varphi(t)$ , полученная из численного решения системы (3).

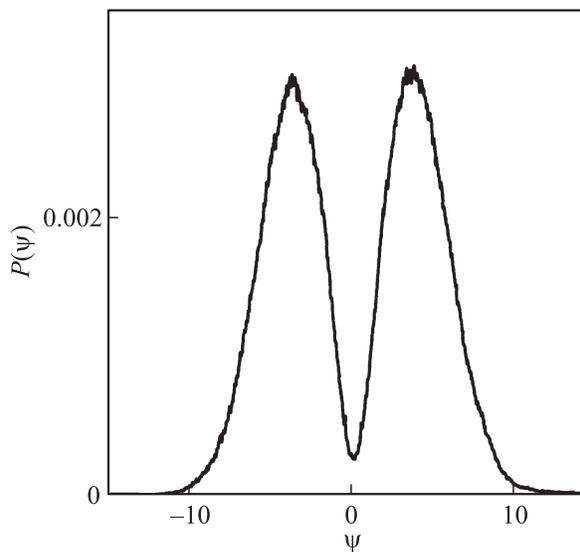


Рис. 3. Плотность вероятности распределения переменной  $\psi(t)$ , полученная из численного решения системы (3).

функцию  $\psi(t)$ , а именно

$$\varphi = \frac{\psi}{\psi^2 + \varepsilon}, \quad (8)$$

где  $\varepsilon$  — малая константа, исключающая расходимость обратной функции  $1/\psi$  при приближении  $\psi(t)$  к нулю в процессе случайного блуждания. Введение этой малой константы, кроме того, приближенно компенсирует влияние  $\vartheta(t)$  на функцию  $\varphi(t)$ , определенную уравнением (4).

Теперь можно выписать приближенное выражение для плотности функции распределения  $P(\psi)$ . Опуская нормировочную константу, для  $P(\psi)$  имеем

$$P(\psi) \propto \exp \left[ -\frac{V(\psi)}{\sigma^2} \right]. \quad (9)$$

Подставляя выражение для потенциала (7) в (9) и учитывая, что индуцированный шумом переход к критичности в системе (1) соответствует значениям интенсивности белого шума вблизи  $\sigma^2 \approx 1$ , получим

$$P(\psi) \propto \psi \exp \left[ -\frac{1}{2} \psi^2 \Delta t \right]. \quad (10)$$

Эта функция вначале возрастает от нуля линейно, а затем очень быстро спадает, как и гауссово распределение. Она получена из управляющего уравнения системы стохастических уравнений. Другая функция  $P(\varphi)$  определяется как распределение обратной функции  $\varphi = 1/\psi$  и находится с помощью значения для  $P(\psi)$

$$P(\varphi) \propto \varphi^{-3} \exp \left( -\frac{1}{2} \varphi^{-2} \Delta t \right). \quad (11)$$

Эта функция очень быстро возрастает от нуля, а затем спадает по степенному закону: обратно пропорционально третьей степени аргумента. Формулы для  $P(\psi)$  и  $P(\varphi)$  содержат в показателе экспоненты шаг интегрирования  $\Delta t$ . Хотя с приближением к белому шуму шаг интегрирования должен уменьшаться и в пределе белого шума  $\Delta t \rightarrow 0$ , но при этом с уменьшением шага интегрирования в такой же степени должна возрастать интенсивность пульсаций, поэтому в сделанных оценках нельзя пренебрегать значением  $\Delta t$ . Приближенные выражения для функций распределения  $P(\psi)$  и  $P(\varphi)$  дают возможность аппроксимировать хвосты распределений и при численном интегрировании.

## Энтропия распределений

По известным функциям распределения  $P_n$  легко вычислить значения информационной энтропии Шеннона  $H$  [16]

$$H = - \sum_n P_n \ln P_n. \quad (12)$$

Функции распределения должны быть нормированы:  $\sum_n P_n = 1$ . Индекс  $n$  относится к последовательности разбиения аргумента функции распределения по вели-

чине. Информационная энтропия по существу имеет свойства статической энтропии Гиббса [17], но также справедлива не только для физических систем, но и для более широкого класса социальных, биологических, коммуникационных систем, которые изучаются статистическими методами. Однако считается, что при изучении сложных физических систем, для которых характерно распределение со степенными хвостами, энтропия Гиббса не обеспечивает согласия с наблюдаемыми явлениями [18]. Монтролл и Шлезингер [19] нашли, что принцип максимальности энтропии Гиббса–Шеннона может применяться к степенному распределению лишь при некоторых искусственных условиях. Цаллис [20] для решения этой проблемы предложил деформировать логарифмическую функцию энтропии таким образом, что при больших значениях энергии состояний вероятность их реализации спадала бы не экспоненциально быстро, а по степенному закону. Энтропия Цаллиса определена выражением

$$H^T = \frac{1}{1-q} \left( \sum_n P_n^q - 1 \right). \quad (13)$$

Для степенных функций распределения предлагается также использовать энтропию, введенную Реньи [21]

$$H^R = \frac{1}{1-q} \ln \sum_n P_n^q. \quad (14)$$

Оба вида выражений для энтропий  $H^T$  и  $H^R$  содержат зависимость от параметра  $q$ , величина которого должна определяться физическими свойствами системы. В тех случаях, когда нет информации относительно природы стохастического процесса,  $q$  может рассматриваться как свободный параметр.

На наш взгляд, сложная система не может характеризоваться только одним распределением. Достаточно подробная теория сложной системы должна иметь иерархию процессов управления и подчинения. И проблема существования максимума энтропии должна решаться с учетом анализа такой иерархии. Подход Цаллиса [20] или Реньи [21] может быть использован, когда имеется ограниченная информация о сложной системе. Например, в экспериментах часто приходится иметь дело только с одной функцией распределения. При этом важными являются оценки параметра  $q$ . Поскольку в нашей системе функция распределения управляющего параметра не имеет степенного хвоста, а спадает по закону гауссова распределения, то эта функция распределения может быть использована для нахождения энтропии Гиббса–Шеннона.

Вычисление по формуле (12) энтропии Гиббса–Шеннона при функциях распределения  $P(\psi)$  и  $P(\varphi)$  показало, что такая энтропия изменяется монотонно в окрестности критического состояния при изменении как  $\sigma_e$ , так и шага интегрирования  $\Delta t$ . Но в отличие от этого поведения энтропия  $H(\psi^2)$  при функции распределения  $P(\psi^2)$  от квадрата флуктуирующего параметра  $\psi^2$

имеет устойчивый локальный максимум  $H_{\max} = 2.243$ , а координаты максимума совпадают с координатами критической точки индуцированного шумом перехода  $\Delta t = 0.06$  и  $\sigma_e = 0.92$ . На рис. 4 показан этот максимум, причем внутри всей очерченной области на плоскости  $\sigma_e - \Delta t$  спектры  $S_\psi$  и  $S_\varphi$  практически совпадают с изображенными на рис. 1. Наличие максимума энтропии Гиббса–Шеннона для  $\psi^2$  и совпадение его положения с координатами критической точки было проверено и для других значений выбранных точек интегрирования (от 2000 до 16000), и других шагах численного интегрирования  $\Delta t$ . При удвоении числа точек интегрирования критическое значение  $\Delta t$  уменьшалось в  $\sqrt{2}$  раза, а значение  $\sigma_e$  оставалось прежним, как и должно быть при численном интегрировании при использовании системы (3). При изменении шага интегрирования максимальное значение энтропии Гиббса–Шеннона  $H_{\max}$  оставалось прежним, что также свидетельствует об устойчивости максимума. Максимум локальный, потому что уменьшение энтропии при увеличении среднеквадратичного отклонения белого шума идет только до значений  $\sigma_e < 3$ . При значениях  $\sigma_e > 3$  начинается рост  $H(\psi^2)$ , связанный с подавляющим влиянием белого шума на всю систему при столь больших значениях  $\sigma_e$ .

Следует отметить, что с критическим поведением системы и максимумом энтропии связан критический индуцированный шумом переход для функции распределения  $P(\psi^2)$ , при котором происходит смещение максимума этого распределения при малом изменении дисперсии белого шума. На рис. 5 показано, что при интенсивности белого шума меньше критического значения максимуму  $P(\psi^2)$  отвечает конечное значение  $\psi^2$ , а при закритических интенсивностях максимум расположен при нуле. Поэтому наличие этого индуцированного шумом перехода приводит к наиболее широкому распределению функции  $P(\psi^2)$  при критической интенсивности белого шума и соответствующему максимуму энтропии.

Зная положение максимума энтропии Гиббса–Шеннона, можно оценить параметр  $q$  в выражениях (13) и (14) для энтропии Цаллиса и Реньи. Для этого

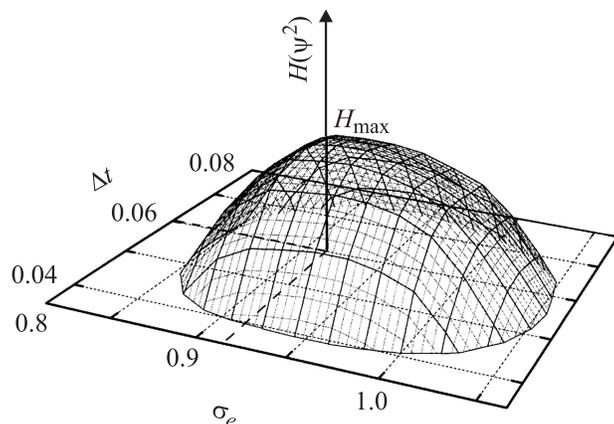


Рис. 4. Максимум энтропии Гиббса–Шеннона в переменных  $\sigma_e - \Delta t$ .

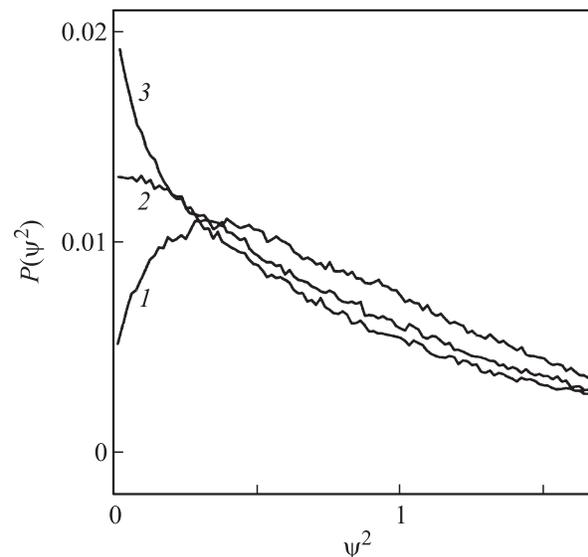


Рис. 5. Распределение  $P(\psi^2)$ : 1 — докритическое состояние, 2 — критическое состояние, 3 — закритическое состояние.

использовались функции распределения со степенными хвостами. Поскольку максимум энтропий Цаллиса и Реньи обеспечивается в широком диапазоне параметров  $q$ , то естественно находить его такое значение, которое бы давало совпадение с положением максимума энтропии Гиббса–Шеннона. Расчеты энтропии Цаллиса и энтропии Реньи были проведены в тех же диапазонах параметров системы (3), что и проведенные расчеты энтропии Гиббса–Шеннона. Найдено, что для функции распределения  $P(\varphi^2)$  устойчивый максимум энтропии Цаллиса  $H_{\max}^T = 19.301$  совпадает с координатами максимума энтропии Гиббса–Шеннона ( $\Delta t = 0.06$  и  $\sigma_e = 0.92$ ) при значении параметра  $q = 0.62$ . Для функции распределения  $P(1/\psi^2)$  максимум энтропии Цаллиса был другим:  $H_{\max}^T = 18.412$ , но совпадение с координатами максимума энтропии Гиббса–Шеннона наблюдалось при том же значении параметра  $q = 0.62$ , что и для другой функции распределения.

Устойчивый максимум энтропии Реньи для функции распределения  $P(\varphi^2)$  был по величине меньше:  $H_{\max}^R = 2.424$ , а совпадение с координатами максимума энтропии Гиббса–Шеннона наблюдалось при том же значении параметра  $q = 0.62$ , что и для энтропии Цаллиса. Для другой функции распределения  $P(1/\psi^2)$  значение максимума энтропии Реньи было также другим  $H_{\max}^R = 2.376$ , а совпадение с координатами максимума энтропии Гиббса–Шеннона наблюдалось при том же значении параметра  $q = 0.62$ . Следовательно, для рассматриваемой системы значения параметра  $q$  совпадают для энтропии Цаллиса и энтропии Реньи. Его величина, как и величины максимумов энтропии, не зависит от изменения шага интегрирования.

Естественным обобщением системы (1), описывающей флуктуации при неравновесных фазовых переходах в точечной системе, на пространственно распределенный вариант было добавление к ней слагаемого  $D\nabla^2\varphi$ ,

где  $D$  — коэффициент диффузии, определяющий пространственное взаимодействие флуктуаций. Простейший вариант пространственно распределенной системы имеет вид [13]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\varphi \psi^2 + \psi + D \nabla^2 \varphi + \Gamma_1(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\varphi^2 \psi + \varphi + \Gamma_2(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\quad (15)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  имеют тот же смысл, что и ранее, но появляется их зависимость от пространственной координаты  $\mathbf{r}$ . Шумы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  —  $\delta$ -коррелированные и с нормальным распределением. По аналогии с (2) можно записать

$$\langle \Gamma(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma(\mathbf{r}, t) \Gamma(\mathbf{r}', t') \rangle = \sigma^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t').$$

Для численного интегрирования в одномерном случае система (15) переписывается в виде

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1,j} &= \frac{\varphi_{i,j} + \frac{D}{2} \varphi_{i,j-1} \Delta t + \frac{D}{2} \varphi_{i,j+1} \Delta t + \psi_{i,j} \Delta t}{1 + (\psi_{i,j})^2 \Delta t + D \Delta t} \\ &\quad + \sigma_e (p_i)_j (\Delta t)^{0.5}, \\ \psi_{i+1,j} &= \frac{\psi_{i,j} + \varphi_{i,j} \Delta t}{1 + (\varphi_{i,j})^2 \Delta t} + \sigma_e (q_i)_j (\Delta t)^{0.5},\end{aligned}\quad (16)$$

где  $p_i$  и  $q_i$  — так же как и в системе (3), последовательности гауссовых случайных чисел с нулевым средним и единичным стандартным отклонением, но которые должны быть различными для разных пространственных точек  $j$ . Все другие обозначения те же, что и в уравнениях (3).

Как и в точечной системе (1), в системе (15) спектры переменных в критическом состоянии изменяются обратно пропорционально частоте  $S_\psi \propto f^{-2}$ , а  $S_\varphi \propto f^{-1}$ . Численное решение распределенной системы (16) было проведено при значении коэффициента диффузии, соответствующего окрестности критического состояния. Система содержала 256 пространственных точек при 4096 шагах интегрирования. Шаги интегрирования изменялись в интервале от 0.02 до 0.1, среднеквадратичное отклонение шума — в интервале от 0.4 до 1.0. Найденные значения  $P_j(\psi_{i,j})$  усреднялись по пространственным точкам

$$P(\psi_i^2) = M^{-1} \sum_{j=1}^M P_j(\psi_{i,j}^2),$$

где  $M$  — число пространственных точек. Рассчитанная в указанном диапазоне энтропия  $H(\psi_i^2)$  для функции распределения  $P(\psi_i^2)$  имела устойчивый локальный максимум, который соответствовал критическому состоянию, как и для точечной системы.

## Заключение

В заключение отметим, что в настоящей работе проведен анализ управления и подчинения в системе нелинейных стохастических уравнений, описывающих флуктуации с  $1/f$ -спектром при взаимодействии неравновесных

фазовых переходов. Система стохастических уравнений имеет разные функции распределения, среди которых имеются функции со степенными хвостами. Найден локальный максимум энтропии Гиббса–Шеннона для функции распределения, которая определяется управляющим стохастическим уравнением системы. Максимум энтропии соответствует настройке на критичность стохастических уравнений и свидетельствует об устойчивости случайных режимов с  $1/f$ -спектром флуктуаций. Из условия, что координаты максимума энтропии Гиббса–Шеннона совпадают с координатами максимума энтропии Цаллиса и максимума энтропии Реньи, для функции распределения, которые имеют степенные хвосты, найдены значения параметра  $q$  для этих энтропий.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 09-08-00244а и Программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН (№ 09-Т-2-1004).

## Список литературы

- [1] Климонтович Ю.Л. Статическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995.
- [2] Коган Ш.М. // УФН. 1985. Т. 145. № 2. С. 285–328.
- [3] Колмогоров А.Н. // ДАН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 299–303.
- [4] Потапшинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982.
- [5] Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. // SLAM Rev. 19068. Vol. 10. P. 422.
- [6] Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38. N 1. P. 364–374.
- [7] Bak P., Sneppen K. // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 4083.
- [8] Sneppen K. // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 69. P. 3539.
- [9] Jensen H.J., Christinsen K., Fogedby H.C. // Phys. Rev. B. 19
- [10] Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. № 5. С. 1748–1757.
- [11] Коверда В.П., Скоков В.Н. // ДАН. 2002. Т. 386. № 2. С. 187–189.
- [12] Коверда В.П., Скоков В.Н. // ДАН. 2008. Т. 420. № 5. С. 610–613.
- [13] Коверда В.П., Скоков В.Н. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 3. С. 9–15.
- [14] Коверда В.П., Скоков В.Н. // ДАН. 2007. Т. 145. № 6. С. 39–43.
- [15] Коверда В.П., Скоков В.Н. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 11. С. 1–6.
- [16] Shannon C. // Bell. Syst. Tech. 1948. Vol. 27. P. 379.
- [17] Башкиров А.Г. // ТМФ. 2006. Т. 149. № 2. С. 299–317.
- [18] Bak P. How Nature Works. The Science of Self-Organized Criticality. Berlin: Springer, 1996.
- [19] Montroll E.W., Shlesinger M.F. // J. Stat. Phys. 1983. Vol. 32. N 2. P. 209–230.
- [20] Tsallis C. // J. Stat. Phys. 1988. Vol. 52. P. 479.
- [21] Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland, 1970.