01;03

К устойчивости одного класса стационарных осесимметричных течений идеальной жидкости в магнитном поле

© Ю.Г. Губарев

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: gubarev@hydro.nsc.ru

(Поступило в Редакцию 1 февраля 2011 г. В окончательной редакции 23 мая 2011 г.)

Изучена задача устойчивости частного класса установившихся осесимметричных магнитогидродинамических течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью относительно возмущений той же симметрии. Прямым методом Ляпунова доказано, что исследуемые течения абсолютно устойчивы по отношению к налагаемым возмущениям как по линейному приближению, так и в точной нелинейной постановке. Построены априорные оценки сверху, которые свидетельствуют об ограниченности во времени интегралов от суммы квадратов возмущений радиальной и угловой составляющих поля скорости по поперечному сечению области течения их начальными данными.

Введение

При разработке тех или иных технологий и устройств, использующих в своем производственном цикле разного рода течения жидкостей, газов либо плазмы, одним из основных предъявляемых к ним требований служит то, чтобы настоящие течения были устойчивы относительно соответствующих возмущений. В противном случае впоследствии без этого невозможно будет добиваться ни желаемой эффективности разрабатываемых технологических процессов, ни надежного функционирования создаваемых технических устройств.

Особое место среди данных устойчивых течений занимают те, которые абсолютно устойчивы по отношению к интересующим возмущениям, т.е. без всяких дополнительных условий на их профили скорости и другие характеристики. Дело в том, что свойство абсолютной устойчивости применяемых течений жидкостей, газов или плазмы позволяет создавать существенно более простые технологии и устройства.

К сожалению, вплоть до настоящего времени известны лишь единичные примеры течений, абсолютно устойчивых относительно тех либо иных возмущений [1]. Поэтому важность изыскания новых примеров абсолютно устойчивых течений жидкостей, газов и плазмы трудно переоценить.

В настоящей работе как раз и представляется новый пример течений, которые являются абсолютно устойчивыми по отношению к соответствующим возмущениям [2].

1. Формулировка исходной задачи

В цилиндрической системе координат r, φ, z рассматриваются осесимметричные движения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью при наличии магнитного поля $\mathbf{h} = (0, 0, h_3)$. Предполагается, что поля скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$, давления p и магнитное поле $\mathbf{h}$ зависят только от r, φ и времени t. Более того, считается, что жидкость и „вмороженное“ в нее магнитное поле помещаются внутри фиксированной области τ.

Эта область может быть или односвязной, или двусвязной, причем компонентами ее границы $\partial\tau$ служат покоящиеся непроницаемые твердые цилиндрические поверхности с бесконечной же проводимостью, параллельными оси z образующими и замкнутыми направляющими, определяемыми соотношениями

$$s_\alpha(r, \varphi) = 0 \quad (\alpha = 1 \quad \text{либо} \quad \alpha = 1, 2), \tag{1}$$

где α — номер той или другой составляющей границы $\partial\tau$ области τ течения: если $\alpha = 1$, то область τ представляет собой бесконечный по длине цилиндр; если же $\alpha = 1, 2$, то область τ течения является пространством между внешним и внутренним коаксиальным цилиндрами неограниченной длины.

Тогда с учетом вида уравнений трехмерных магнитогидродинамических (МГД) движений однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости [3] изучаемые течения будут описываться эволюционными решениями смешанной задачи в форме

$$Du - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p^*}{\partial r}, \quad Dv + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p^*}{\partial \varphi},$$
$$Dh_3 = 0, \quad Dw = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi},$$
$$p^* \equiv p + \frac{h_3^2}{8\pi} \quad \text{в} \quad \tau, \tag{2}$$
$$u\frac{\partial s_\alpha}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial s_\alpha}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\tau,$$
$$\mathbf{u}(r, \varphi, 0) = \mathbf{u}_0(r, \varphi), \quad \mathbf{h}(r, \varphi, 0) = \mathbf{h}_0(r, \varphi).$$

Характерной чертой начально-краевой задачи (1), (2) служит сохранение в жидких частицах величин h_3 и w. Принимая во внимание данное свойство, имеет смысл по аналогии с работой [4] включить в исследование дополнительное скалярное поле $q(r, \varphi, t)$, значения которого также будут сохраняться в каждой жидкой частице

$$Dq = 0. \tag{3}$$

В качестве этого скалярного поля можно использовать, например, одну из лагранжевых координат жидких частиц.

Далее будет рассматриваться смешанная задача (1), (2), расширенная соотношением (3). Следует заметить, что нестационарные решения начально-краевой задачи (1)–(3) представляют собой самостоятельный класс. Иными словами, если то или другое течение изучаемой жидкости в первые моменты времени своего развития описывается эволюционными решениями смешанной задачи (1)–(3), то оно будет ими характеризоваться и во все дальнейшие моменты времени. Тем самым сделанное выше предположение об отсутствии у полей скорости $\mathbf{u}$, давления p и магнитного поля $\mathbf{h}$ зависимости от переменной z оказывается правомерным и динамически непротиворечивым.

Для начально-краевой задачи (1)–(3) справедлив интеграл полной энергии вида

$$E \equiv \int\limits_{\tau} \left[\frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) + \frac{h_3^2}{8\pi}\right] r dr d\varphi = \text{const}. \tag{4}$$

Кроме того, смешанная задача (1)–(3) обладает сохраняющимся функционалом в форме

$$I \equiv \int\limits_{\tau} \Phi(q) r dr d\varphi = \text{const}. \tag{5}$$

Здесь $\Phi(q)$ — некая функция своего аргумента.

Точными стационарными решениями начально-краевой задачи (1)–(3) являются функции вида

$$u = v = 0, \quad h_3 = h_3^0(r, \varphi), \quad w = w^0(r, \varphi),$$

$$p = P(r, \varphi), \quad q = Q(r, \varphi), \quad P + \frac{h_3^{02}}{8\pi} = \text{const}, \tag{6}$$

где поля $h_3^0(r, \varphi)$, $w^0(r, \varphi)$ и $Q(r, \varphi)$ — суть произвольные функции независимых переменных r и φ, а поле $P(r, \varphi)$ вычисляется по заданной функции $h_3^0(r, \varphi)$ посредством последнего равенства системы (6).

Поскольку поля h_3, w и q (2), (3) сохраняются в жидких частицах, то между ними имеются функциональные зависимости

$$f(h_3, w) = 0, \quad f_1(h_3, q) = 0, \quad f_2(w, q) = 0,$$

если начальные данные h_{30}, w_0 и q_0 для этих полей подчинены ограничениям

$$f(h_{30}, w_0) = 0, \quad f_1(h_{30}, q_0) = 0, \quad f_2(w_0, q_0) = 0.$$

При выполнении условий теоремы о неявной функции [5] настоящие зависимости могут быть разрешены в форме

$$h_3 = h_3(q), \quad w = w(q).$$

Отсюда вытекает, что без ущерба для общности изложения далее можно сконцентрироваться лишь на тех из точных стационарных решений (6), которые обладают следующим характерным свойством:

$$h_3^0 = h_3^0(Q), \quad w^0 = w^0(Q), \quad Q \in (Q^-, Q^+),$$

$$Q^- \equiv \min Q(r, \varphi), \quad Q^+ \equiv \max Q(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \tau. \tag{7}$$

Цель дальнейшего исследования состоит в том, чтобы выяснить могут ли точные стационарные решения (6), (7) быть устойчивыми относительно осесимметричных возмущений $u'(r, \varphi, t)$, $p^{*\prime}(r, \varphi, t)$, $v'(r, \varphi, t)$, $h_3'(r, \varphi, t)$, $w'(r, \varphi, t)$ и $q'(r, \varphi, t)$.

2. Случай малых возмущений

Сначала данная задача устойчивости рассматривается в линейном приближении. По этой причине ниже смешанная задача (1)–(3) линеаризуется в окрестности точных стационарных решений (6), (7), в результате чего получается начально-краевая задача вида

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p^{*\prime}}{\partial r}, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p^{*\prime}}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial h_3'}{\partial t} + u'\frac{\partial h_3^0}{\partial r} + \frac{v'}{r}\frac{\partial h_3^0}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u'\frac{\partial w^0}{\partial r} + \frac{v'}{r}\frac{\partial w^0}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + u'\frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{v'}{r}\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial \varphi} = 0 \text{ в } \tau,$$

$$u'\frac{\partial s_\alpha}{\partial r} + \frac{v'}{r}\frac{\partial s_\alpha}{\partial \varphi} = 0 \text{ на } \partial\tau, \tag{8}$$

$$u'(r, \varphi, 0) = u_0'(r, \varphi), \quad v'(r, \varphi, 0) = v_0'(r, \varphi),$$

$$h_3'(r, \varphi, 0) = h_{30}'(r, \varphi), \quad w'(r, \varphi, 0) = w_0'(r, \varphi),$$

$$q'(r, \varphi, 0) = q_0'(r, \varphi).$$

Утверждение 1. Точные стационарные решения (6), (7) смешанной задачи (1)–(3) абсолютно устойчивы по отношению к малым осесимметричным возмущениям (8). Для функций u' и v' имеет место априорная оценка сверху в форме

$$\int\limits_{\tau} \left(u'^2 + v'^2\right) r dr d\varphi \le C \int\limits_{\tau} \left(u_0'^2 + v_0'^2\right) r dr d\varphi. \tag{9}$$

Здесь $C \ge 1$ — некая постоянная величина.

Доказательство выполняется по методу связки интегралов движения [6–10], служащему модификацией энергетического метода [11], который, в свою очередь, представляет собой одну из разновидностей прямого метода Ляпунова [12,13].

В согласии с данным методом при помощи функционалов E (4) и I (5) прежде всего образуется интеграл $J \equiv E + I$. Затем определяется его первая вариация δJ

$$\delta J = \int\limits_{\tau} \left[w^0 \frac{dw^0}{dQ} + \frac{h_3^0}{4\pi} \frac{dh_3^0}{dQ} + \frac{d\Phi}{dQ} \right] \delta q r dr d\varphi,$$

где δq — первая вариация дополнительного скалярного поля q (3). Потом на произвольную до сих пор функцию Φ накладывается ограничение в форме

$$\frac{d\Phi}{dQ} = -w^0 \frac{dw^0}{dQ} - \frac{h_3^0}{4\pi} \frac{dh_3^0}{dQ}, \tag{10}$$

чтобы первая вариация δJ функционала J стала равной нулю. Наконец, опираясь на соотношение (10), вычисляется вторая вариация $\delta^2 J$ настоящего интеграла

$$2\delta^2 J = \int\limits_{\tau} \left\{ (\delta u)^2 + (\delta v)^2 \right\} r dr d\varphi.$$

Здесь δu и δv — первые вариации радиального и углового компонентов поля скорости соответственно.

Если теперь в выражении для второй вариации $\delta^2 J$ функционала J первые вариации δu и δv заменить на малые возмущения u' и v', а саму вторую вариацию $\delta^2 J$ обозначить через E_1, тогда величина

$$E_1 = \frac{1}{2} \int\limits_{\tau} \left(u'^2 + v'^2 \right) r dr d\varphi \tag{11}$$

окажется ни чем иным, как линейным аналогом интеграла полной энергии начально-краевой задачи (8). Существенно, что функционал E_1 (11) неотрицателен для любых возможных точных стационарных решений (6), (7) смешанной задачи (1)–(3) и удовлетворяет условиям первой теоремы Ляпунова (теоремы об устойчивости) [13]. Это и говорит о том, что верна первая часть утверждения 1: точные стационарные решения (6), (7) начально-краевой задачи (1)–(3) действительно абсолютно устойчивы относительно малых осесимметричных возмущений (8).

Истинность же второй части утверждения 1 может быть установлена посредством того, что, согласно указанному в предыдущем абзаце, $E_1(t) = \text{const}$ на нестационарных решениях смешанной задачи (8). В частности, без потери общности изложения $E_1(t) = E_1(0)$. Отсюда, в свою очередь, немедленно вытекает, что $E_1(t) \le C E_1(0)$ $(C \ge 1)$, а значит, желаемая априорная оценка сверху (9) на самом деле справедлива.

В итоге утверждение 1 полностью доказано.

3. Случай конечных возмущений

Далее задача устойчивости точных стационарных решений (6), (7) начально-краевой задачи (1)–(3) по отношению к осесимметричным возмущениям $u'(r,\varphi,t)$, $p^{*\prime}(r,\varphi,t)$, $v'(r,\varphi,t)$, $h_3'(r,\varphi,t)$, $w'(r,\varphi,t)$ и $q'(r,\varphi,t)$ будет изучаться в точной же нелинейной постановке.

Тогда эволюционные решения смешанной задачи (1)–(3) удобно записать в виде

$$u = u'(r,\varphi,t), \quad v = v'(r,\varphi,t),$$

$$h_3 = h_3^0(r,\varphi) + h_3'(r,\varphi,t),$$

$$w = w^0(r,\varphi) + w'(r,\varphi,t), \quad p = P(r,\varphi) + p'(r,\varphi,t),$$

$$q = Q(r,\varphi) + q'(r,\varphi,t),$$

после чего с учетом последнего равенства системы соотношений (6) она примет форму

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{v'}{r} \frac{\partial u'}{\partial \varphi} - \frac{v'^2}{r} = -\frac{\partial p^{*\prime}}{\partial r},$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{v'}{r} \frac{\partial v'}{\partial \varphi} + \frac{u'v'}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p^{*\prime}}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial h_3'}{\partial t} + u' \frac{\partial h_3^0}{\partial r} + u' \frac{\partial h_3'}{\partial r} + \frac{v'}{r} \frac{\partial h_3^0}{\partial \varphi} + \frac{v'}{r} \frac{\partial h_3'}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial w^0}{\partial r} + u' \frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{v'}{r} \frac{\partial w^0}{\partial \varphi} + \frac{v'}{r} \frac{\partial w'}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + u' \frac{\partial Q}{\partial r} + u' \frac{\partial q'}{\partial r} + \frac{v'}{r} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{v'}{r} \frac{\partial q'}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{в} \quad \tau, \tag{12}$$

$$u' \frac{\partial s_\alpha}{\partial r} + \frac{v'}{r} \frac{\partial s_\alpha}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\tau, \quad u'(r,\varphi,0) = u_0'(r,\varphi),$$

$$v'(r,\varphi,0) = v_0'(r,\varphi), \quad h_3'(r,\varphi,0) = h_{30}'(r,\varphi),$$

$$w'(r,\varphi,0) = w_0'(r,\varphi), \quad q'(r,\varphi,0) = q_0'(r,\varphi).$$

Утверждение 2. Точные стационарные решения (6), (7) начально-краевой задачи (1)–(3) абсолютно устойчивы относительно конечных осесимметричных возмущений (12). Для функций u' и v' верна априорная оценка сверху следующего вида:

$$\int\limits_{\tau} \left(u'^2 + v'^2 \right) r dr d\varphi \le C_1 \int\limits_{\tau} \left(u_0'^2 + v_0'^2 \right) r dr d\varphi, \tag{13}$$

где $C_1 \ge 1$ — некая постоянная.

Доказательство опять выполняется методом связки интегралов движения [4,6–10]. Пусть начальные поля $w(r,\varphi,0)$, $h_3(r,\varphi,0)$ и $q(r,\varphi,0)$ можно получить из стационарных распределений $w^0(r,\varphi)$, $h_3^0(r,\varphi)$ и $Q(r,\varphi)$ с помощью одних только взаимных перемещений частиц однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью. Величины w, h_3 и q в процессе данных перемещений остаются неизменными в каждой жидкой частице и равны своим значениям на точных стационарных решениях (6), (7) смешанной задачи (1)–(3):

$$
\begin{gathered}
w = w^0(q), \quad h_3 = h_3^0(q), \quad q \in (Q^-, Q^+), \\
w \in (w^{0-}, w^{0+}), \quad w^{0-} \equiv \min w^0(r, \varphi) \\
w^{0+} \equiv \max w^0(r, \varphi) \quad \text{в} \quad \tau, \\
h_3 \in (h_3^{0-}, h_3^{0+}), \quad h_3^{0-} \equiv \min h_3^0(r, \varphi), \\
h_3^{0+} \equiv \max h_3^0(r, \varphi) \quad \text{в} \quad \tau,
\end{gathered} \tag{14}
$$

т. е. связи между функциями w, h_3 и q, интервалы определения настоящих величин те же, что и в системе соотношений (7). По существу здесь речь идет об условии „равнозавихренности" [4,8]. Понятно, что если выражения (14) истинны в начальный момент времени $t = 0$, то в силу третьего и четвертого уравнений системы (2), а также соотношения (3) они будут справедливы и во всякий момент времени $t > 0$.

Ниже в согласии с методом связки интегралов движения посредством функционалов E (4) и I (5) вновь составляется интеграл J, сохраняющийся на нестационарных решениях начально-краевой задачи (1)–(3):

$$
\begin{aligned}
J = J(u, v, q) \equiv \int\limits_{\tau} \biggl[\frac{1}{2}\,(u^2 + v^2) \\
+ \frac{w^2(q)}{2} + \frac{h_3^2(q)}{8\pi} + \Phi(q)\biggr] r dr d\varphi = \text{const}.
\end{aligned}
$$

Этот функционал, в свою очередь, может быть выписан как сумма трех слагаемых в форме

$$
J = J(u, v, q) = J(0, 0, Q) + J_1 + J_2, \tag{15}
$$

где

$$
J(0, 0, Q) \equiv \int\limits_{\tau} \left[\frac{w^{02}(Q)}{2} + \frac{h_3^{02}(Q)}{8\pi} + \Phi(Q)\right] r dr d\varphi,
$$

$$
J_1 \equiv \int\limits_{\tau} \left[w^0 \frac{dw^0}{dQ} + \frac{h_3^0}{4\pi} \frac{dh_3^0}{dQ} + \frac{d\Phi}{dQ}\right] q' r dr d\varphi,
$$

$$
\begin{aligned}
J_2 \equiv \int\limits_{\tau} \biggl\{\frac{1}{2}\,(u'^2 + v'^2) + \frac{1}{2}\biggl[w^2(Q + q') - w^{02}(Q) \\
- 2w^0 \frac{dw^0}{dQ} q'\biggr] + \frac{1}{8\pi}\biggl[h_3^2(Q + q') - h_3^{02}(Q) \\
- 2h_3^0 \frac{dh_3^0}{dQ} q'\biggr] + \Phi(Q + q') - \Phi(Q) - \frac{d\Phi}{dQ} q'\biggr\} r dr d\varphi \\
= \frac{1}{2} \int\limits_{\tau} \biggl\{u'^2 + v'^2 + \biggl[\frac{d}{dQ}\left(w^0 \frac{dw^0}{dQ}\right)(Q_*) \\
+ \frac{d}{dQ}\left(\frac{h_3^0}{4\pi} \frac{dh_3^0}{dQ}\right)(Q_*) + \frac{d^2\Phi}{dQ^2}(Q_*)\biggr] q'^2\biggr\} r dr d\varphi, \\
Q_* \equiv Q + \theta q', \quad \theta \equiv \text{const}: \quad 0 < \theta < 1.
\end{aligned}
$$

Исходя из произвольности функции $\Phi(q)$, ее опять можно выбрать в том же виде, что и в предыдущем разделе (см. уравнение (10)). В таком случае из выражения (15) для интеграла J будет вытекать, что $J_1 = 0$, а функционал J_2 не зависит от времени и сводится к форме

$$
J_2 = \frac{1}{2} \int\limits_{\tau} (u'^2 + v'^2) r dr d\varphi. \tag{16}
$$

Ясно, что в линейном приближении интеграл J_2 по своему виду совпадает с функционалом E_1 (11).

Далее полагается, что на начальные значения $q(r, \varphi, 0)$ дополнительного скалярного поля q (3) никаких ограничений нет. Начальные же величины $w(r, \varphi, 0)$ и $h_3(r, \varphi, 0)$ осевых компонентов поля скорости $\mathbf{u}$ и магнитного поля $\mathbf{h}$ по-прежнему вычисляются по нему при помощи равенств (14). Тогда возникает необходимость учета значений скалярного поля q, которые лежат вне промежутка (Q^-, Q^+). Данная проблема решается путем продолжения функций $\Phi(q)$, $w(q)$ и $h_3(q)$ за интервал (Q^-, Q^+) так, чтобы соотношение (10) оставалось верным. Поскольку настоящие функции снаружи промежутка (Q^-, Q^+) не определены, это продолжение может быть выполнено бесконечным числом способов. Следовательно, выражение (16) для интеграла J_2 истинно и в том случае, когда $-\infty < q < +\infty$.

Принимая во внимание сохранение функционала J_2 на эволюционных решениях смешанной задачи (12), его неотрицательность для всех допустимых точных стационарных решений (6), (7) начально-краевой задачи (1)–(3) и удовлетворение условиям теоремы Ляпунова об устойчивости [13], можно сделать вывод о справедливости первой части утверждения 2: точные стационарные решения (6), (7) смешанной задачи (1)–(3) действительно абсолютно устойчивы по отношению к конечным осесимметричным возмущениям (12).

Достоверность же второй части утверждения 2 может быть установлена посредством равенства $J_2(t) = J_2(0)$, вытекающего из неизменности величины интеграла J_2 на нестационарных решениях начально-краевой задачи (12). Именно данное равенство не препятствует истинности соотношения $J_2(t) \le C_1 J_2(0)$ $(C_1 \ge 1)$, а значит, справедливости искомой априорной оценки сверху (13).

В результате утверждение 2 тоже полностью доказано.

Заключение

Автор выражает надежду, что обнаруженный им подкласс (6), (7) стационарных осесимметричных МГД-течений, которые абсолютно устойчивы относительно возмущений (8), (12) того же типа симметрии, найдет себе применение при разработке и совершенствовании магнитокумулятивных генераторов, МГД-движетелей, технологических процессов порошковой металлургии и т. д.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 2.1.1/9896).

Список литературы

[1] *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic Stability. Cambridge: Univ. Press, 1981. 527 p.
[2] *Губарев Ю.Г., Лябухова М.Н.* // Второй сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-96). Тез. докл. / Новосибирск: Институт математики, 1996. С. 250.
[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 632 с.
[4] *Владимиров В.А., Губарев Ю.Г.* // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 442–450.
[5] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
[6] *Fjørtoft R.* // Geofys. Publ. 1950. Vol. 17. N 6. P. 4–52.
[7] *Арнольд В.И.* // ДАН СССР. 1965. Т. 162. № 5. С. 975–978.
[8] *Арнольд В.И.* // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 846–851.
[9] *Арнольд В.И.* // Изв. вузов. Математика. 1966. № 5. С. 3–5.
[10] *Владимиров В.А.* // ПМТФ. 1986. № 3. С. 70–78.
[11] *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
[12] *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 471 с.
[13] *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.