

01;08

Распространение акустических волн в среде с рэлеевским механизмом энерговыделения

© Н.А. Герасимов, А.В. Каныгин, В.С. Сухомлинов

Физический факультет Санкт-Петербургского государственного университета,
198903 Петергоф, Санкт-Петербург, Россия
e-mail: prima-ivs@mail.ru

(Поступило в Редакцию 27 января 2011 г. В окончательной редакции 1 июня 2011 г.)

Работа продолжает теоретические исследования распространения звуковых волн в плазме с позиции рассмотрения ее как рэлеевской среды. В работе впервые рассматривается решение задачи с граничными, а не начальными условиями. Показано, что при малых значениях параметра, характеризующего энерговыдел в плазме, коэффициенты усиления гармонической звуковой волны для задачи распространения начального возмущения и задачи с граничными условиями близки. Однако при увеличении энерговыклада усиление волны, распространяющейся от источника, больше, чем для задачи распространения начального возмущения. То же можно сказать и об усилении волн разной частоты при фиксированных параметрах плазмы: различие в коэффициентах усиления тем больше, чем ниже частота волны. Полученные аналитические зависимости позволяют точно определить, какую из задач — с начальными или граничными условиями — необходимо решить, чтобы вычислить коэффициент усиления звуковых волн в конкретных экспериментальных условиях.

Введение

Проблема распространения упругих волн (в том числе и звуковых) в плазме самостоятельного газового разряда в последнее время привлекает пристальное внимание исследователей [1–8]. Это связано в первую очередь с важным прикладным значением этого фундаментального физического явления. Так, в работах [9,10] отмечается важность исследований в этой области в связи с попытками управления с помощью мощных звуковых волн процессами конденсации в атмосфере и использованию при этом явления усиления звука в неравновесных колебательно-возбужденных газах. Работы [11–13] посвящены разработке способов ослабления звуковых волн для аэрокосмических приложений.

В работе [14] была изучена гидродинамическая модель плазмы как рэлеевской среды. Напомним, суть рэлеевского механизма заключается в дополнительном выделении или поглощении тепла в среде при изменении ее плотности. В упомянутой работе было выведено локальное соотношение между количеством выделяющегося джоулева тепла и плотностью среды и определены границы его применимости. На основе этого соотношения было получено уравнение распространения акустических волн в плазме, а также его решение в случае задачи эволюции во времени начального возмущения в виде плоской гармонической волны.

В настоящей работе рассмотрим задачу, соответствующую экспериментам по изучению влияния плазмы на прохождение звуковых волн, а именно задачу распространения волн с граничными (задача № 2), а не начальными (задача № 1) условиями. Отметим, что такое рассмотрение проводится впервые и до настоящего времени в теоретических работах, посвященных расчетам коэффициента усиления звука в плазме и исследованию

акустической устойчивости плазмы, рассматривалась задача с начальными условиями (см., например, [1,2,4,14]).

Теоретический анализ

Будем пользоваться обозначениями, принятыми в работе [14], при этом рассмотрим одномерный случай. Уравнение распространения монохроматических акустических волн с частотой ω_0 и волновым числом k_0 в слабоионизованной плазме самостоятельного газового разряда, записанное в безразмерных координатах, имеет следующий вид [14]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} = 2b \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1)$$

где $\tau = \omega_0 t$, $z = k_0 x$ — безразмерные время и координата соответственно, u — массовая скорость газа,

$$b = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\rho_0}{\omega_0} \frac{dg}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \quad (2)$$

— параметр энерговыклада, $g = Q/\gamma P_0$, ρ_0 — плотность газа в отсутствие волны, P_0 — давление в отсутствие возмущений, γ — показатель адиабаты газа, $Q(x, t)$ — мощность, выделяемая в плазме в единице объема (см. [14]). Используя выражения, полученные для величины Q в работе [14], можно оценить значение параметра b . Для низкотемпературной плазмы самостоятельного газового разряда инертных газов и частот звука более 100 Hz этот параметр лежит в диапазоне $|b| < 0.1$, для молекулярных — $|b| \leq 1$. Отметим, что параметр энерговыклада зависит не только от параметров плазмы, но и от частоты рассматриваемой волны, т.е. для волн разных частот этот параметр будет различным.

Требуется найти $u(z, \tau)$ при $\tau > 0$ и $-\infty < z < \infty$. Решение ищется в виде

$$u(z, \tau) = u_0 \exp\{\beta\tau + i(\mu\tau - z)\}, \quad (3)$$

где β, μ — некоторые вещественные постоянные.

В задаче № 1 предполагается, что в момент времени $\tau = 0$ в плазме возникло гармоническое возмущение, так что

$$u|_{\tau=0} = u_0 \exp(-iz). \quad (4)$$

Для коэффициента усиления (затухания) β и величины μ получены формулы [15]

$$\mu = \pm\sqrt{1 + 3\beta^2}, \quad \beta = A + B, \quad (5)$$

$$A = \frac{\left(b + \sqrt{b^2 + \frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}}{2}, \quad B = \frac{\left(b - \sqrt{b^2 + \frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}}{2}.$$

При малых величинах параметра энерговклада b уравнение распространения в координатах z, τ принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2b \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad (6)$$

при этом получается $\beta = b + O(b^2)$. Как видно из результатов, при $b > 0$ и фиксированной координате z амплитуда возмущения растет, и наоборот.

Теперь рассмотрим задачу о распространении акустических волн в слабоионизованной плазме (задача № 2). Пусть в плазме при $z = 0$ существует стационарный источник звука, так что

$$u|_{z=0} = u_0 \exp(i\tau). \quad (7)$$

Требуется найти $u(z, \tau)$ при $z > 0$ и $-\infty < \tau < \infty$. Будем искать решение в том же виде

$$u(z, \tau) = u_0 \exp\{\beta_z z + i(\tau - \mu_z z)\}, \quad (8)$$

где β_z, μ_z — также некоторые вещественные постоянные. Подставляя (8) в уравнение распространения, получим

$$\beta_z = \left[\frac{\sqrt{1 + 4b^2} - 1}{2(1 + 4b^2)} \right]^{0.5} \text{sign}(b), \quad (9)$$

где $\text{sign}(b) = 1$, если $b > 0$, и $\text{sign}(b) = -1$, если $b < 0$. В случае малых параметров энерговклада b , когда справедливо уравнение распространения (6), получается, как и в задаче № 1,

$$\beta_z = b + O(b^2).$$

Как видно из полученных результатов, $\beta \neq \beta_z$ в общем случае, а при малых параметрах b , т.е. в области применимости уравнения (6) выполняется условие $\beta = \beta_z + O(b^2)$. Таким образом, с учетом приведенного ранее диапазона изменения параметра энерговклада в инертных газах можно утверждать, что задачи № 1

и № 2 в газоразрядной плазме инертных газов эквивалентны. Отождествление задач № 1 и № 2 означает, что для вычисления размерного пространственного коэффициента усиления (затухания) акустической волны считается, что при экспериментальном определении коэффициента усиления (затухания) с использованием известной методики „динамика и микрофон“ [3,4] очевидно, что регистрируется $K_z = \beta_z k_0 \neq K$. Ниже найдем область значений параметра b , в которой выполняется $K \approx K_z$, а также проанализируем физические причины отличия этих величин вне этой области. Но сначала получим выражение для энергии звуковой волны в некотором объеме V . Как известно, энергия единицы объема газа (жидкости) есть

$$E = \rho e + \frac{\rho u^2}{2} \quad (10)$$

или с точностью до членов второго порядка малости по возмущениям параметров газа относительно равновесных значений при $u = 0$ [15]

$$E = \rho_0 e_0 + \rho' \frac{\partial(\rho e)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} + \frac{(\rho')^2}{2} \frac{\partial^2(\rho e)}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} + \frac{\rho u^2}{2}. \quad (11)$$

Здесь, как и ранее, штриховые переменные обозначают возмущение равновесных параметров; e — внутренняя энергия единицы объема газа; переменные с индексом „0“ обозначают их равновесное значение при $u = 0$. Член $\rho_0 e_0$ можно опустить, поскольку он не связан со звуковой волной. Для газа (жидкости) с дополнительным энерговыделением (поглощением) в сжатиях из закона сохранения энергии получается

$$\frac{\partial^2 e}{\partial \rho^2} = \frac{d^2 Q}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial \rho} - \frac{2P}{\rho^3}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11) и учитывая, что для скорости звука справедлива формула $a_0^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0}$ [15], получаем соотношение

$$E = \rho_0 \rho' \frac{dQ}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} + (\rho')^2 \frac{dQ}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} + \frac{\rho_0 (\rho')^2}{2} \frac{d^2 Q}{d\rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} + \frac{\rho_0 u^2}{2} + \frac{(\rho')^2 a_0^2}{2\rho_0} + \rho' h_0, \quad (13)$$

где $h_0 = e_0 + P_0/\rho_0$ — тепловая функция единицы объема газа. При интегрировании по большому объему V существования звуковой волны члены в (13), пропорциональные ρ' , можно опустить (если газ однороден), поскольку они дадут изменение количества газа (жидкости) в объеме, которое не изменяется. Таким образом, получаем окончательно

$$E_v = \int dV \left\{ (\rho')^2 \frac{dQ}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} + \frac{\rho_0 (\rho')^2}{2} \frac{d^2 Q}{d\rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} + \frac{\rho_0 u^2}{2} + \frac{(\rho')^2 a_0^2}{2\rho_0} \right\}. \quad (14)$$

Результаты и их обсуждение

Одно из наиболее очевидных различий задач № 1 и № 2 заключается в том, что решение задачи № 1 в отличие от решения задачи № 2 не является стационарным. В частности, для отрицательного параметра b это объясняется тем, что из-за наличия поглощения энергия звуковой волны уменьшается со временем, поскольку отсутствует источник звука. В задаче № 2 — напротив, при фиксированной координате z амплитуда звуковой волны не зависит от времени, поскольку происходит постоянная подкачка энергии от источника звука, расположенного при $z = 0$. Указанные особенности аналогичны тем, которые реализуются при пучковой неустойчивости в газоразрядной плазме. Действительно, как показано в [16], при конвективной пучковой неустойчивости возмущения в каждой точке являются стационарными в отличие от абсолютной конвективной неустойчивости, когда в каждой точке амплитуда возмущения нарастает со временем.

На рис. 1 приведены зависимости величин β , β_z , определенных формулами (5) и (9) соответственно, от параметра b при положительных его значениях и диапазонах его изменения от 0 до 5. Видно, что при $b > 0.5$ выполняется неравенство $\beta > \beta_z$. Таким образом, можно заключить, что задачи № 1 и № 2 с известной степенью точности тождественны, если $b < 0.5$. На рис. 2 приведена зависимость безразмерного параметра энерговклада b от частоты звука ω_0 при различных плотностях тока в бесстеночном разряде в воздухе. При расчетах параметров плазмы мы использовали результаты работы [17]. Видно, что в интересующем нас диапазоне условий выполняется неравенство $b < 0.4$. На рис. 3 рассчитана зависимость относительной разности размерных коэффициентов усиления (поглощения) в задачах № 1 и № 2 в том же, что и на рис. 2, диапазоне условий. Как следует из приведенных данных, эта разность не превосходит 3%. Как уже отмечалось, в области неэквивалентности рассматриваемых задач для пространственных коэффициентов усиления (поглощения) акустических волн K , K_z выполняется неравенство $K > K_z$. Рассмотрим физические причины этого и для определенности положим $b > 0$. Рассмотрим задачу № 2. Предположим, что в некоторый момент времени τ в точке с координатой z было максимальное разряжение. Тогда в этот же момент времени в точке с координатой $z - \pi$ будет максимальное сжатие. Через время $\Delta\tau = \pi$ в точке с координатой z образуется максимальное сжатие, амплитуда которого определяется энергией, запасенной в сжатии около точки с координатой $z - \pi$ в момент времени τ , и дополнительным энерговкладом ($b > 0$) около точки с координатой z . Соответственно этому энергия звуковой волны возрастает. Теперь перейдем к задаче № 1. Рассматривая аналогичным образом волну, распространяющуюся слева направо, приходим к выводу, что усиление в этом случае будет выше. Дело в том, что за время $\Delta\tau = \pi$ преобразования разряжения в сжатие, энергия, запасенная в области сжатия около точки $z - \pi$, экспоненциально возрастает. Таким образом,

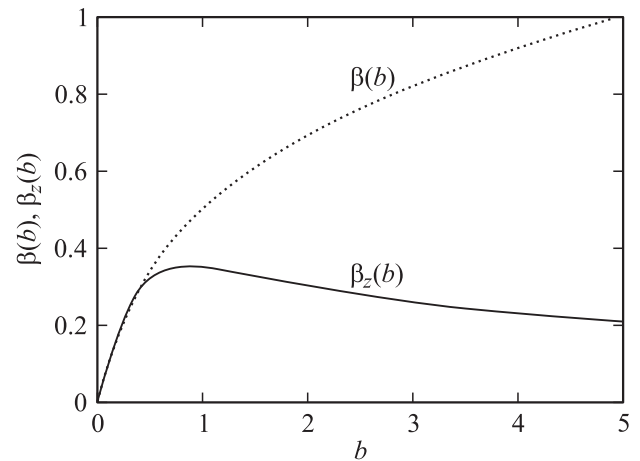


Рис. 1. Зависимости коэффициентов усиления (поглощения) $\beta(b)$, $\beta_z(b)$ от безразмерного параметра энерговклада b , рассчитанные для задачи об усилении (поглощении) акустических волн в плазме с начальными условиями (задача на устойчивость) и с граничными условиями (задача с микрофоном) соответственно.

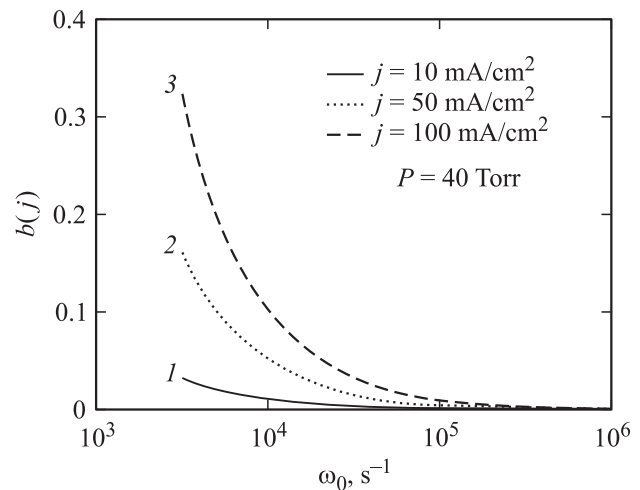


Рис. 2. Зависимости безразмерного параметра энерговклада $b(\omega_0)$ от частоты звука ω_0 при различных плотностях тока j , mA/cm² = 10, 50, 100 при давлении воздуха $P = 40$ Torr.

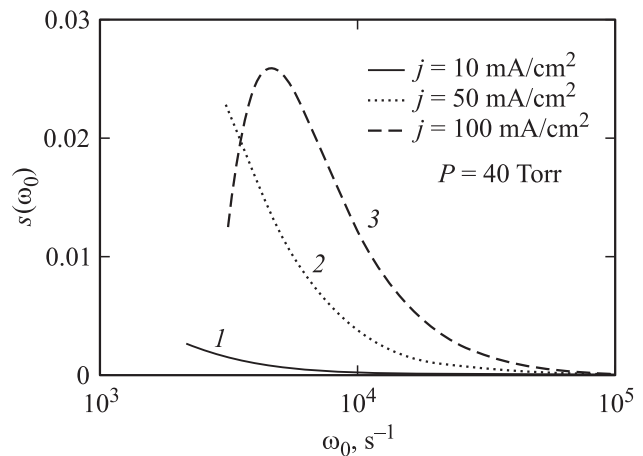


Рис. 3. Зависимости относительной разности коэффициентов усиления (поглощения) β , β_z от частоты звука ω_0 , при тех же условиях, что и на рис. 2.

если в задаче № 2 при фиксированном z идет перекачка фиксированной энергии из области около точки $z - \pi$, то в задаче № 1 при $b > 0$ эта энергия возрастает со временем. Поэтому коэффициент усиления в задаче № 1 оказывается выше, чем в задаче № 2. Очевидно, что разница между этими коэффициентами определится усилением волны за время $\Delta t = \pi$ (т.е. на расстоянии полуволны). Отсюда можно сделать вывод, что если это усиление мало, т.е. мала величина b , то $K \approx K_z$. Это согласуется с данными, представленными на рис. 1–3. Легко показать, что величина β_z является немонотонной и имеет максимум при $b = \sqrt{3}/2$, при этом $\beta_{z \max} = 1/2\sqrt{2}; \beta_z(b)/b|_{b \rightarrow \infty} \rightarrow 0$. Функция же $\beta(b)$ монотонна и, как следует из соотношений (5), имеет следующую асимптотику: $\beta|_{b \rightarrow 0} \rightarrow b; \beta|_{b \rightarrow \infty} \rightarrow b^{1/3}$, т.е. также выполняется условие $\beta(b)/b|_{b \rightarrow \infty} \rightarrow 0$. Из вышесказанного можно сделать вывод о том, что при увеличении параметра энерговклада рост усиления (ослабления) акустических волн в плазме замедляется. Физически это, на наш взгляд, можно объяснить следующим образом. Как видно из формулы (14), плотность энергии звуковой волны пропорциональна величине $(\rho')^2$. Максимальное значение $(\rho')^2$ определяется энергией E_0 , запасенной в соседней против направления распространения волны области сжатия (разряжения) в предыдущие моменты времени. Предположим, что эта энергия зафиксирована, и сравним величину ρ' в двух случаях: когда есть дополнительный энергоподвод в сжатиях и когда он отсутствует. Ясно, что в первом случае, работа по сжатию газа равная энергии E_0 , будет совершена по достижении меньшего, чем во втором случае, значения ρ' , поскольку при дополнительном энергокладе в сжимаемую область давление в ней будет возрастать быстрее. При этом данный эффект имеет второй порядок малости. Таким образом, дополнительный энергоподвод в область сжатия несколько уменьшает величину ρ' . Этим, на наш взгляд, и может быть вызвано замедление роста коэффициента усиления при увеличении энергоподвода. Совершенно аналогичные рассуждения можно провести в случае, когда $b < 0$.

Интересно отметить, что в выражении для энергии звуковой волны (14) присутствует член, пропорциональный величине $d^2Q/d\rho^2|_{\rho=\rho_0}$. Даже если $dQ/d\rho|_{\rho=\rho_0} > 0$ ($b > 0$), то при выполнении неравенств

$$\frac{d^2Q}{d\rho^2}\Big|_{\rho=\rho_0} < 0, \quad \frac{dQ}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_0} < \frac{1}{2} \left| \frac{d^2Q}{d\rho^2}\Big|_{\rho=\rho_0} \right| \quad (15a)$$

энергия звуковой волны может уменьшаться. И наоборот, если $b < 0$, то при

$$\frac{d^2Q}{d\rho^2}\Big|_{\rho=\rho_0} > 0, \quad -\frac{dQ}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_0} < \frac{1}{2} \left| \frac{d^2Q}{d\rho^2}\Big|_{\rho=\rho_0} \right| \quad (15b)$$

акустическая волна может усиливаться. Данный эффект не проявляется в полученных на основании уравнения (1) результатах, поскольку при выводе этого уравнения не учитывались члены, квадратичные по возму-

щениям параметров газа в звуковой волне, и, в частности, член

$$\frac{d^2Q}{d\rho^2}\Big|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0)^2.$$

Заключение

Задача с начальными условиями имеет смысл только при теоретическом исследовании устойчивости плазмы относительно акустических возмущений. В подавляющем большинстве реальных ситуаций в плазме распространяется волна, имеющая некоторый источник. Следовательно, при решении задачи распространения акустических волн необходимо решать задачу с граничными, а не начальными условиями. Коэффициент усиления (ослабления) для задачи с начальными условиями всегда выше соответствующей величины для граничной задачи. Расчеты показывают, что для плазмы инертных газов и частот звука не ниже 10 Hz величина параметра b оказывается много меньше, чем 0.4 поэтому в этом случае для оценки параметров акустических волн можно пользоваться результатами работы [13]. Оценивая параметр b для плазмы воздуха [14,17], можно заключить, что диапазон частот, где задачи № 1 и № 2 эквивалентны, значительно уже: $\nu_0 > 200 \text{ s}^{-1}$.

Список литературы

- [1] Александров Н.Л., Напартович Н.П., Паль А.Ф., Серов А.О., Старостин А.Н. // Физика плазмы. 1990. Т. 16. Вып. 7. С. 862–870.
- [2] Цендин Л.Д. // ЖТФ. 1965. Т. 35. Вып. 11. С. 1973–1977.
- [3] Soukhomlinov V.S., Kuranov A.L., Kuchinsky V.V., Septan V.Yu., Tolmachev Yu.A. AIAA-99-3536, 30th Plasmadynamics and Lasers Conference Norfolk, VA, 1999.
- [4] Soukhomlinov V., Gerasimov N., Sheverev V. // J. Appl. Phys. 2008. Vol. 104. P. 043 301.
- [5] Герасимов Н.А., Кучинский В.В., Сухомлинов С.В. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 7. С. 11–19.
- [6] Hasegawa V. // J. Soc. Japan. 1974. Vol. 37. N 1. P. 193–199.
- [7] Галечян Г.А., Диванян Э.Г., Мкртчян А.Р. // Акустический журн. 1990. Т. 36. С. 364–366.
- [8] Fitaire M., Mantei T.D. // Phys. Fluids. 1972. V. 15. N 3. P. 464–469.
- [9] Галечян Г.А. // АЭЭ. 2005. № 8 (28). С. 56–60.
- [10] Галечян Г.А. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 9. С. 85–88.
- [11] Soukhomlinov V., Sheverev V., Raman G., Otugen M.V., Stepaniuk V. 1st AIAA Flow Control Conference, 24–26 June. 2002. St. Louis. MO.
- [12] Stepaniuk V., Sheverev V., Otugen V., Tarau C., Raman G., Soukhomlinov V. AIAA J. 2004. N 42. P. 545.
- [13] Soukhomlonov V., DiZinno N., Sheverev V., Otugen V., Vradis G. 43rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 10–13 January. 2005. Reno, Nevada.
- [14] Soukhomlinov V., Gerasimov N., Sheverev V. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2007. Vol. 40. P. 2507–2512.
- [15] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Т. VI. М.: Наука, 1988. С. 356.
- [16] Сб. статей „Вопросы теории плазмы“ Под ред. М.А. Леонтовича, М.: Атомиздат. Вып. 4. 1964. С. 211.
- [17] Soukhomlonov V., Sheverev V., Ötügen V. // J. Appl. Phys. 2003. Vol. 94. N 2. P. 844–851.