01;03

Магнитозвуковые волны в намагничивающихся жидкостях

© В.А. Желнорович

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия
e-mail: v.zhelnor@imec.msu.ru

(Поступило в Редакцию 22 марта 2011 г.)

В рамках уравнений Нойрингера–Розенцвейга для намагничивающихся жидкостей получены решения, описывающие поперечные линейно-поляризованные и продольные плоскополяризованные магнитозвуковые волны при произвольной ориентации волнового вектора и вектора намагниченности жидкости. В общем случае вектор групповой скорости магнитозвуковых волн имеет составляющую, ортогональную волновому вектору. Для полученных решений скорость звука уменьшается от максимального значения при распространении волны вдоль вектора намагниченности до минимального значения при распространении волны перпендикулярно вектору намагниченности. Получены точные решения уравнений для намагничивающихся жидкостей в виде волн Римана, которые переходят в рассмотренные магнитозвуковые волны при малых возмущениях параметров жидкости и магнитного поля.

Магнитозвуковые волны в намагничивающихся сжимаемых жидкостях рассматривались рядом авторов [1–6]. Хороший обзор и подробное изложение известных теоретических результатов и возможные технические приложения можно найти в [4]. Работы, связанные с изучением магнитозвуковых волн в намагничивающихся жидкостях, как правило, основаны на использовании уравнений Нойрингера–Розенцвейга [7], хотя есть и работы с учетом процессов релаксации намагниченности [4] и с учетом внутренних моментов количества движения спиновой природы [3]. Как отмечается в [5], ввиду громоздкости получаемых соотношений обычно рассматриваются только простейшие случаи, когда магнитозвуковая волна распространяется вдоль вектора намагниченности или перпендикулярно ему. В [1] рассматривается случай произвольного направления волн, но вычисления до конца проводятся для совершенного газа и только для случая, когда магнитная проницаемость не зависит ни от поля, ни от намагниченности; рассматривается также случай идеальной жидкости в состоянии магнитного насыщения и без учета магнитострикции. В [6] рассматривается случай, когда магнитная проницаемость жидкости линейно зависит от массовой плотности жидкости ρ и тоже не зависит ни от намагниченности, ни от поля.

В настоящей работе рассматриваются магнитозвуковые волны в намагничивающихся жидкостях тоже на основе модели Нойрингера–Розенцвейга, но для случая произвольной зависимости внутренней энергии, и значит магнитной проницаемости, от определяющих параметров жидкости (массовой плотности, энтропии и намагниченности) и при произвольной ориентации вектора намагниченности жидкости относительно распространения волн. В линеаризированной теории уравнения рассматриваются в произвольной системе координат, и все соотношения получаются в явно инвариантом и компактном виде. Вычислен также тензор высокочастотной магнитной восприимчивости на основе точных уравнений, связывающих намагниченность и магнитное поле.

Модель намагничивающейся жидкости

Рассмотрим следующую систему уравнений, определяющую модель намагничивающейся изотропной жидкости в магнитном поле в магнитостатическом приближении,

$$\rho \frac{d}{dt} v^\alpha = -\nabla^\alpha p + \frac{1}{2}\left(M_\lambda \nabla^\alpha H^\lambda - H^\lambda \nabla^\alpha M_\lambda\right) + \nabla_\lambda \tau^{\alpha\lambda} + Q^\alpha,$$

$$\frac{d}{dt}\rho + \rho \nabla_\alpha v^\alpha = 0,$$

$$\nabla_\alpha\left(H^\alpha + 4\pi M^\alpha\right) = 0, \quad \nabla_\alpha H_\beta - \nabla_\beta H_\alpha = 0,$$

$$M^\alpha = \chi H^\alpha, \quad \frac{1}{\chi} = \frac{\rho}{M}\frac{\partial U_m}{\partial M},$$

$$T = \frac{\partial U_m}{\partial s}, \quad \rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla_\alpha q^\alpha + \tau^{\alpha\lambda}\nabla_\alpha v_\lambda. \qquad (1)$$

Здесь ∇_α — символ ковариантной производной относительно инерциальной системы координат с переменными x^α; $\alpha = 1, 2, 3$, относительно которой вычисляются все векторы и тензоры в уравнениях (1); t — время; ρ — массовая плотность жидкости; v^α — компоненты вектора скорости индивидуальных точек жидкости; Q^α — компоненты вектора внешней силы, действующей на жидкость (например, силы тяжести); M^α — компоненты вектора объемной плотности намагниченности жидкости; H^α — компонетны вектора напряженности магнитного поля; s — удельная плотность энтропии; T — величина, играющая роль температуры в равновесных процессах; U_m — удельная плотность внутренней энергии жидкости, которая предполагается заданной функцией от плотности жидкости ρ, удельной плотности энтропии s и от модуля вектора намагниченности $M = (M_\alpha M^\alpha)^{1/2}$:

$$U_m = U_m(\rho, s, M).$$

Компоненты тензора вязких напряжений $\tau^{\alpha\lambda}$ и вектора плотности потока тепла q^α в уравнениях (1) обычно определяются соотношениями

$$\tau^{\alpha\lambda} = \mu\left(\nabla^\alpha v^\lambda + \nabla^\lambda v^\alpha\right) + \lambda g^{\alpha\lambda}\nabla_\beta v^\beta, \quad q^\alpha = -\varkappa\nabla^\alpha T, \tag{2}$$

где λ, μ — коэффициенты вязкости, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, $g^{\alpha\lambda}$ — компоненты метрического тензора в системе координат с переменными x^α.

Давление p в уравнении импульсов в (1) определяется следующим образом:

$$p = \rho^2 \frac{\partial U_m}{\partial \rho} + \rho M \frac{\partial U_m}{\partial M} - \frac{1}{2} M_\alpha H^\alpha. \tag{3}$$

Система уравнений (1)–(3) определяет модель намагничивающейся жидкости по Нойрингеру−Розенцвейгу [7]. Это простейшая модель намагничивающейся изотропной жидкости, которая в некоторых случаях может применяться, например, для описания ферромагнитных жидкостей.

Вид уравнений для намагничивающихся жидкостей зависит от выбора термодинамического потенциала и определяющих термодинамических параметров. В [7] в качестве термодинамического потенциала рассматривается не внутренняя энергия U_m, а свободная энергия F; в качестве термодинамических определяющих параметров в [7] используется массовая плотность ρ, температура T и напряженность магнитного поля H^α, поэтому запись уравнений в [7] несколько отличается от уравнений (1). Заметим в связи с этим, что при рассмотрении адиабатических волновых процессов удобнее и проще рассматривать в качестве определяющих параметров принятые здесь энтропию s и намагниченность M^α вместо температуры T и напряженности поля H^α.

Заметим также, что в уравнениях (1) компоненты F^α вектора пондеромоторной силы, действующей на жидкость со стороны магнитного поля, определены равенством $F^\alpha = \frac{1}{2}(M_\lambda \nabla^\alpha H^\lambda - H^\lambda \nabla^\alpha M_\lambda)$ как дивергенция тензора Максвелла, как это обычно принято в электродинамике сплошных сред [8]. Иногда вектор пондеромоторной силы определяется иначе: $F^\alpha = M_\lambda \nabla^\alpha H^\lambda$, что приводит к различному определению давления p. Различие в определении давления и пондеромоторной силы не меняет систему динамических дифференциальных уравнений в целом, однако это различие необходимо учитывать при формулировке краевых условий.

Более общие модели намагничивающихся жидкостей в произвольном электромагнитном поле на основе вариационного принципа рассматривались в [3,9,10].

Будем рассматривать далее адиабатические движения намагничивающейся жидкости, описываемой уравнениями (1) без внешних сил $Q^\alpha = 0$. Предположим, что система координат с переменными x^α является инерциальной и декартовой, а величины ρ, M^α, H^α в уравнениях (1)−(3) мало меняются относительно постоянных равновесных значений ρ_0, M_0^α, H_0^α, и положим

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad M^\alpha = M_0^\alpha + \mu^\alpha, \quad H^\alpha = H_0^\alpha + h^\alpha,$$

где величины ρ_1, μ^α, h^α и компоненты вектора скорости v^α рассматриваются как малые первого порядка. Полагая, что внутренняя энергия U_m является голоморфной функцией своих аргументов, разложим эту функцию в ряд, ограничиваясь квадратичными членами

$$\rho U_m = \frac{1}{2\rho_0} a_*^2 \rho_1^2 + \frac{1}{2}\beta^{\alpha\lambda}\mu_\alpha\mu_\lambda + b n^\alpha \mu_\alpha \rho_1 + D n^\alpha \mu_\alpha + A\rho_1 + \text{const}.$$

Здесь компоненты $n^\alpha = M_0^\alpha / M_0$ определяют единичный вектор, направленный по вектору намагниченности; a_*, $\beta^{\alpha\lambda}$, b, D, A — постоянные коэффициенты. Компоненты тензора $\beta^{\alpha\lambda}$ в общем случае определяются соотношением

$$\beta^{\alpha\lambda} = \beta_\perp\left(g^{\alpha\lambda} - n^\alpha n^\lambda\right) + \beta_\| n^\alpha n^\lambda.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\beta_\perp = \left(\frac{1}{\chi}\right)_0, \quad \beta_\| = \left(\frac{1}{\chi} + M\frac{\partial}{\partial M}\frac{1}{\chi}\right)_0,$$

$$b = \left(M\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\chi}\right)_0, \quad a_*^2 = \left(\rho\frac{\partial^2 \rho U_m}{\partial\rho^2}\right)_0. \tag{4}$$

Величины в скобках $()_0$ вычисляются при постоянных равновесных значениях параметров.

Линеаризация уравнений (1) в рассматриваемом случае дает следующую систему уравнений:

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} v_\alpha = -\left(a_*^2 + M_0 b\right)\partial_\alpha\rho_1 + M_0 n^\lambda \partial_\alpha h_\lambda + \left(\rho_0 b + M_0\beta_\|\right) n_\lambda \partial_\alpha \mu^\lambda + \mu\Delta v_\alpha + (\lambda+\mu)\partial_\alpha\partial_\lambda v^\lambda,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_1 + \rho_0 \partial_\alpha v^\alpha = 0,$$

$$\partial_\alpha(h^\alpha + 4\pi\mu^\alpha) = 0, \quad \partial_\alpha h_\lambda - \partial_\lambda h_\alpha = 0,$$

$$h^\alpha = \beta^{\alpha\lambda}\mu_\lambda + n^\alpha b \rho_1, \tag{5}$$

где $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$, $\Delta = g^{\alpha\lambda}\partial_\alpha\partial_\lambda$ — оператор Лапласа.

Плоские гармонические волны в намагничивающихся жидкостях

Будем искать решение уравнений (5) в виде плоских гармонических волн, для которых все неизвестные функции меняются по закону $\exp i(-\omega t + k_\alpha x^\alpha)$, где $i = \sqrt{-1}$, ω — частота волны, k_α — компоненты волнового вектора. Из уравнений Максвелла для напряженности магнитного поля h^α и уравнения неразрывности для плотности жидкости ρ находим

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{\omega} k_\lambda v^\lambda, \quad h^\alpha = -\frac{4\pi}{k^2} k^\alpha k_\lambda \mu^\lambda, \tag{6}$$

где $k = \left(k_\alpha k^\alpha\right)^{1/2}$ — волновое число.

Уравнения импульсов и уравнения для намагниченности в (5) после исключения из них величин ρ_1 и h^α при помощи уравнений (6) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}&\left(\omega\rho_0 + i\mu k^2\right)v^\alpha - \left(\rho_0 b + M_0\beta_\parallel\right)k^\alpha n_\lambda \mu^\lambda \\ &\quad + \left[-\frac{\rho_0}{\omega}\left(a_*^2 + M_0 b\right) + i(\lambda+\mu)\right]k^\alpha k_\lambda v^\lambda \\ &\quad - \frac{4\pi M_0 \cos\psi_0}{k} k^\alpha k_\lambda \mu^\lambda = 0,\end{aligned}$$

$$\left[\beta_\perp\left(\delta^\alpha_\beta - n^\alpha n_\beta\right) + \beta_\parallel n^\alpha n_\beta + \frac{4\pi}{k^2} k^\alpha k_\beta\right]\mu^\beta + \frac{\rho_0 b}{\omega} n^\alpha k_\beta v^\beta = 0. \tag{7}$$

Здесь δ^α_β — символы Кронекера, ψ_0 — угол между волновым вектором и вектором намагниченности, $\cos\psi_0 = k_\alpha M_0^\alpha/(kM_0)$.

Из уравнений (7) следует, что для рассматриваемой модели намагничивающейся жидкости дисперсионное уравнение для линейно-поляризованных поперечных волн такое же, как и для вязкой жидкости Навье–Стокса

$$\omega\rho_0 + i\mu k^2 = 0.$$

Это дисперсионное уравнение подробно изучено во многих классических руководствах (см., например, [11]).

Из уравнений (7) следует также дисперсионное уравнение для плоскополяризованных продольных волн

$$\frac{\omega^2}{k^2} = a_*^2 - \frac{\rho_0 b^2}{B} - i\,\frac{\omega}{\rho_0}(\lambda + 2\mu). \tag{8}$$

Здесь коэффициент B определяется следующим образом:

$$B = \beta_\parallel + \beta_\perp \frac{4\pi\cos^2\psi_0}{4\pi\sin^2\psi_0 + \beta_\perp}.$$

Таким образом, фазовая скорость продольных волн $V = \omega/k$ зависит от угла ψ_0 между волновым вектором и вектором намагниченности и не зависит от волнового числа k. Из (8), пренебрегая вязкостью, получаем также вектор групповой скорости продольных волн

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial k^\alpha} &= V\frac{k_\alpha}{k} + \frac{4\pi\beta_\perp(4\pi+\beta_\perp)\rho_0 b^2\cos\psi_0}{\left[\beta_\parallel(4\pi\sin^2\psi_0 + \beta_\perp) + 4\pi\beta_\perp\cos^2\psi_0\right]^2} \\ &\quad \times \frac{1}{V} n_\lambda \left(\delta^\lambda_\alpha - \frac{1}{k^2} k_\alpha k^\lambda\right),\end{aligned}$$

который имеет составляющую, ортогональную волновому вектору.

В силу дисперсионного уравнения (8) в системе уравнений (6), (7) в общем случае содержится только девять независимых уравнений. Поэтому из этих уравнений девять из десяти неизвестных величин μ^α, h^α, v^α и ρ_1 можно выразить через одну из них, например, через ρ_1:

$$v^\alpha = V\frac{k^\alpha}{k}\frac{\rho_1}{\rho_0},$$

$$h^\alpha = \frac{k^\alpha}{k}\frac{4\pi b\beta_\perp\cos\psi_0}{\beta_\parallel\left(4\pi\sin^2\psi_0 + \beta_\perp\right) + 4\pi\beta_\perp\cos^2\psi_0}\rho_1,$$

$$\begin{aligned}\mu^\alpha &= \frac{b}{\beta_\parallel\left(4\pi\sin^2\psi_0 + \beta_\perp\right) + 4\pi\beta_\perp\cos^2\psi_0} \\ &\quad \times \left[4\pi\cos\psi_0\frac{k^\alpha}{k} - (4\pi+\beta_\perp)n^\alpha\right]\rho_1.\end{aligned} \tag{9}$$

Из решения (9) следует, что для продольных волн компоненты векторов h^α, μ^α связаны соотношением

$$\mu^\alpha = \chi^\alpha_\beta h^\beta, \quad h^\alpha = \left(\chi^\alpha_\beta\right)^{-1}\mu^\beta,$$

где

$$\chi^\alpha_\beta = \frac{1}{\beta_\perp}\left(\delta^\alpha_\beta - n_\beta n^\alpha\frac{4\pi+\beta_\perp}{4\pi\cos^2\psi_0}\right),$$

$$\left(\chi^\alpha_\beta\right)^{-1} = \beta_\perp\left(\delta^\alpha_\beta - n_\beta n^\alpha\frac{4\pi+\beta_\perp}{\beta_\perp + 4\pi\sin^2\psi_0}\right). \tag{10}$$

Если волновой вектор ортогонален вектору намагниченности ($\psi_0 = \pi/2$), то связь между μ^α и h^α вырождена $\det\left(\chi^\alpha_\beta\right)^{-1} = 0$ и

$$h^\alpha = 0, \quad \mu^\alpha = -\frac{b}{\beta_\parallel}\rho_1 n^\alpha.$$

Тензор с компонентами χ^α_β, связывающий компоненты μ^α и h^α, называется тензором высокочастотной магнитной восприимчивости. Следует заметить, что обычно (см., например, [12]) этот тензор вычисляется из уравнения для намагниченности (в нашем случае это последнее уравнение в (5)) при дополнительном условии $v^\alpha = 0$, что означает переход к приближенному уравнению намагниченности. Вычисляя таким способом тензор высокочастотной магнитной восприимчивости из уравнений (5), мы бы получили $\chi^\alpha_\beta = (\beta^\alpha_\beta)^{-1}$, что существенно отличается от χ^α_β, вычисленных по формуле (10) на основе точного решения (9).

Если волновой вектор направлен по вектору намагниченности ($\psi_0 = 0$) или ортогонален вектору намагниченности ($\psi_0 = \pi/2$), то дисперсионные уравнения упрощаются, а групповая скорость продольных волн в обоих случаях совпадает с фазовой скоростью. Для случая $\psi_0 = 0$ дисперсионное уравнение имеет вид

$$\frac{\omega^2}{k^2} = a_*^2 - \frac{\rho_0 b^2}{\beta_\parallel + 4\pi} - i\,\frac{\omega}{\rho_0}(\lambda + 2\mu), \tag{11}$$

а для случая $\psi_0 = \pi/2$ находим

$$\frac{\omega^2}{k^2} = a_*^2 - \frac{\rho_0 b^2}{\beta_\parallel} - i\,\frac{\omega}{\rho_0}\,(\lambda + 2\mu). \tag{12}$$

Из дисперсионных уравнений (8), (11), (12) следует, что при изменении угла ψ_0 от 0 до $\pi/2$ скорость звука для ферромагнитных жидкостей ($\beta_\parallel < -4\pi$) убывает от максимального $a_{\max}$ до минимального значения $a_{\min}$, которые в отсутствие вязкости определяются соотношениями

$$a_{\max}^2 = a_*^2 - \frac{\rho_0 b^2}{\beta_\parallel + 4\pi}, \quad a_{\min}^2 = a_*^2 - \frac{\rho_0 b^2}{\beta_\parallel}. \tag{13}$$

Из формул (13) видно, что скорость звука при намагничивании жидкости (при $\beta_\parallel < -4\pi$) увеличивается, что соответствует экспериментальным данным [4] для ферромагнитных жидкостей.

Волны Римана в намагничивающихся жидкостях

Рассмотрим систему уравнений (1) с равными нулю коэффициентами вязкости $\lambda = \mu = 0$ и при равной нулю теплопроводности $q^\alpha = 0$. Будем искать точные решения этих уравнений в виде волн Римана, для которых все неизвестные функции зависят от переменных системы координат x^α и времени t только через одну функцию $\varphi = \varphi(x^1, t)$:

$$\rho = \rho(\varphi), \quad v^\alpha = v^\alpha(\varphi), \quad H^\alpha = H^\alpha(\varphi) \quad M^\alpha = M^\alpha(\varphi).$$

В этом случае из уравнения баланса энтропии в (1) следует $ds/dt = 0$, а из уравнений Максвелла следует

$$H_1 + 4\pi M_1 = \text{const}, \quad H_2 = \text{const}, \quad H_3 = \text{const}. \tag{14}$$

Из уравнений для намагниченности в (1) с учетом уравнений (14) получаем

$$M_1(\chi^{-1})' + (\chi^{-1} + 4\pi)M_1' = 0,$$

$$M_2(\chi^{-1})' + \chi^{-1}M_2' = 0, \quad M_3(\chi^{-1})' + \chi^{-1}M_3' = 0. \tag{15}$$

Здесь и далее штрих над буквой означает производную по φ: $M' = dM/d\varphi$. Введем обозначения

$$\beta_\perp = \frac{1}{\chi}, \quad \beta_\parallel = \frac{1}{\chi} + M\,\frac{\partial}{\partial M}\,\frac{1}{\chi},$$

$$b = M\,\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{1}{\chi}, \quad a_*^2 = \rho\,\frac{\partial^2 \rho U_m}{\partial \rho^2}. \tag{16}$$

Величины β, b, a_*, определенные равенствами (16), вычисленные при постоянных равновесных значениях параметров ρ, s, M_α, совпадают с соответствующими величинами в (4). Заменяя производные $(\chi^{-1})'$ в уравнениях (15), согласно тождеству

$$(\chi^{-1})' = \frac{b}{M}\,\rho' + \frac{1}{M}\left(\beta_\parallel - \frac{1}{\chi}\right)M',$$

следующему из определения (1) для χ и обозначений (16), после простых преобразований получим систему уравнений

$$\big(\beta_\perp + 4\pi\sin^2\psi\big)M_1' - \beta_\perp\cos\psi M' = 0,$$

$$4\pi\cos\psi M_1' + \beta_\parallel M' + b\rho' = 0,$$

$$M_3 M_2' - M_2 M_3' = 0, \tag{17}$$

в которых ψ — угол между вектором намагниченности и осью x^1 системы координат, $\cos\psi = M_1/M$.

Уравнение неразрывности и уравнения импульсов в (1) с учетом обозначений (16) можно записать в виде

$$a\rho' = \rho v_1', \quad a v_2' = 0, \quad a v_3' = 0,$$

$$-a\rho v_1' + (Mb + a_*^2)\rho' + (\rho b + M\beta_\parallel)M' + 4\pi M_1 M_1' = 0. \tag{18}$$

Здесь величина a_* определена равенством (16), a — скорость фазы φ волны Римана относительно индивидуальных точек жидкости

$$a = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - v_1.$$

Условие существования ненулевого решения системы уравнений (17), (18) для производных ρ', v_α', M_α' записывается в виде уравнения $a = 0$ (что соответствует согласно принятой терминологии энтропийной волне) или в виде уравнения

$$a^2 = a_*^2 - \frac{\rho b^2}{B}, \tag{19}$$

которое соответствует магнитозвуковой волне. Коэффициент B в уравнении (19) определяется следующим образом:

$$B = \beta_\parallel + \beta_\perp\,\frac{4\pi\cos^2\psi}{4\pi\sin^2\psi + \beta_\perp}.$$

Из уравнений (17), (18) для магнитозвуковых волн можно получить выражение производных v_1', M_α' через производную ρ'

$$v_1' = \frac{a}{\rho}\,\rho',$$

$$M_1' = -\frac{b}{B}\,\frac{M_1}{M}\,\frac{\beta_\perp}{\beta_\perp + 4\pi\sin^2\psi}\,\rho',$$

$$M_2' = -\frac{b}{B}\,\frac{M_2}{M}\,\frac{\beta_\perp + 4\pi}{\beta_\perp + 4\pi\sin^2\psi}\,\rho',$$

$$M_3' = -\frac{b}{B}\,\frac{M_3}{M}\,\frac{\beta_\perp + 4\pi}{\beta_\perp + 4\pi\sin^2\psi}\,\rho', \tag{20}$$

и уравнения $v_2' = v_3' = 0$. Значит $v_2 = \text{const}$, $v_3 = \text{const}$, поэтому за счет выбора системы координат компоненты скорости v_2, v_3 для волн Римана можно обратить в нуль. Из уравнений (20) находим также выражение для производной модуля вектора намагниченности

$$M' = -\frac{b}{B}\,\rho'. \tag{21}$$

В уравнениях (20), (21) в качестве функции $\varphi(x^1, t)$ можно взять массовую плотность жидкости ρ. Тогда $\rho' = 1$ и система уравнений (20), (21) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешененных относительно производных, для определения функций $v_1(\rho)$, $M_\alpha(\rho)$ в римановой волне. Напряженность магнитного поля определяется уравнениями (14). В этом случае $x^1 = (a + v_1)t + f(\rho)$, где $f(\rho)$ — производная функция.

Если $\varphi(x^1, t) = \rho$, то уравнения (20) в общем случае имеют решение

$$\frac{M_1}{M} = \cos\psi, \quad \frac{M_2}{M} = C_2 \sin\psi, \quad \frac{M_3}{M} = C_3 \sin\psi,$$

где C_2, C_3 — постоянные интегрирования, связанные соотношением $C_2^2 + C_3^2 = 1$.

В некоторых случаях вычисление модуля вектора намагниченности $M(\rho)$ сводится к квадратурам (например, если магнитная восприимчивость χ зависит только от массовой плотности ρ и энтропии s). Если $\chi = \chi(\rho, s)$, то уравнения (20) имеют интеграл

$$\operatorname{tg}\psi = C(1 + 4\pi\chi),$$

где C — постоянная интегрирования, а уравнение (21) интегрируется в квадратурах.

Нетрудно видеть, что рассматриваемые волны Римана для малых возмущений определяющих параметров совпадают с рассмотренными выше магнитозвуковыми волнами.

Список литературы

[1] *Тарапов И.Е.* // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 5. С. 813–821.
[2] *Parsons J.D.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1975. Vol. 8. P. 1219–1226.
[3] *Желнорович В.А.* // МГ. 1979. № 1. С. 3–8.
[4] *Полунин В.М.* Акустические эффекты в магнитных жидкостях. М.: Физматлит, 2008. 207 с.
[5] *Полунин В.М., Рослякова Л.И.* // МГ. 1985. № 4. С. 59–65.
[6] *Налетова В.А.* Лекции по феррогидродинамике. М.: МГУ, 2005. 151 с.
[7] *Neuringer J.L., Rosensweig R.E.* // Phys. Fluids. 1964. Vol. 7. N 12. P. 1927–1937.
[8] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
[9] *Желнорович В.А.* Модели материальных сплошных сред, обладающих внутренним электромагнитным и механическим моментами. М.: МГУ, 1980. 175 с.
[10] *Желнорович В.А.* Теория спиноров и ее применения. М.: Август–Принт, 2001. 400 с.
[11] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
[12] *Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В.* Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.