

01;07

О возможности безынервного усиления света дихроичными молекулами во внешнем ориентирующем поле

© В.В. Слабко, И.А. Кузоватов, А.В. Шамшури

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования „Сибирский федеральный университет“

660041 Красноярск, Россия

e-mail: shamshurin.alex@mail.ru

(Поступило в Редакцию 13 апреля 2011 г.)

Проанализирована возможность безынервного усиления света дихроичными молекулами, которые могут быть ориентированы селективно по состояниям путем наложения внешнего поля. На основе связанной системы уравнений Больцмана для основного и возбужденного состояний, имеющих разную энергию взаимодействия с ориентирующим полем, численно рассмотрено влияние соотношения между временем жизни возбужденного состояния и временем установления ориентационного равновесия на показатель усиления.

Введение

Для усиления излучения обычно предполагается необходимость создания инверсии заселенностей уровней резонансного перехода. Однако мощность индуцированного и поглощенного излучения определяется не только заселенностями уровней частиц, но и вероятностями индуцированных переходов, а также числом вырожденных по энергии состояний. Поэтому инверсия заселенности является, вообще говоря, лишь частным случаем, в котором мощность испускания преобладает над поглощением и, следовательно, происходит усиление света. Возможны различные случаи, когда для усиления не требуется инверсии заселенностей. Они связаны либо с разницей числа вырожденных по энергии состояний и распределения по ним поглощающих и излучающих частиц, либо с различием вероятностей поглощения и излучения фотонов [1]. К безынервному усилению могут, например, приводить разница в распределении по скоростям возбужденных и невозбужденных атомов [2], разница вероятностей переходов с поглощением и испусканием за счет нелинейных интерференционных эффектов [3–5], на переходах между дискретными уровнями и с участием континуума [3,6]. В работах [7,8] была рассмотрена возможность безынервного усиления света в системе селективно по состояниям ориентированных во внешнем поле дихроичных молекул. При этом предполагалось, что время жизни возбужденного состояния τ_2^{eff} много больше времени установления ориентационного равновесия τ_0 (см. также [9]). Последнее позволяло авторам получить аналитические решения для показателя усиления, выраженные через функции Ланжевена, и найти условия, при которых возможно безынервное усиление, в предположении о больцмановском характере функций распределения молекул по ориентациям в основном и возбужденном состояниях. Очевидно, что соотношение между временем жизни возбужденного состояния и временем установления ори-

ентационного равновесия может меняться в широких пределах в зависимости от вязкости и температуры среды, ее агрегатного состояния (жидкость, газ), в которые помещены рассматриваемые молекулы, а также от параметров самих молекул.

В настоящей работе на основе связанной системы кинетических уравнений Больцмана для основного и возбужденного состояний, имеющих разную энергию взаимодействия с ориентирующим полем, рассматривается возможность безынервного усиления света и численно анализируется влияние соотношения между τ_2^{eff} и τ_0 на показатель усиления α .

Используемая физическая модель

Как известно, вероятность индуцированных переходов в электродипольном приближении определяется проекцией матричного элемента электродипольного момента перехода \mathbf{d}_{21} на направление вектора пробного электрического поля \mathbf{E} . В молекулярных средах направление \mathbf{d}_{21} задается симметрией молекулы и связано с ее ориентацией в пространстве. Поэтому ориентированные молекулы поглощают и испускают свет селективно по поляризациям. Это свойство получило название дихроизма и широко используется при создании пленочных поляризаторов.

При воздействии на молекулярную среду внешних полей \mathbf{E}_0 молекулы ориентируются в направлении, соответствующем минимуму потенциальной энергии их взаимодействия с этим полем [10,11]. При этом направление ориентации определяется как направлением внешнего поля \mathbf{E}_0 , так и симметрией молекулы. Степень ориентации среды в целом зависит от параметра ориентации, представляющего собой отношение энергии взаимодействия молекулы с полем U к энергии теплового движения kT , оказывающего дезориентирующее влияние. Энергия взаимодействия U , а следовательно, и

степень ориентации для молекул, находящихся в основном и в возбужденном состояниях, могут быть различны. Поэтому степень ориентации внешним полем возбужденных и невозбужденных молекул может различаться. В этом случае вероятности индуцированных переходов с поглощением и усилением поляризованного света, определяющиеся ориентацией молекул относительно направления электрического поля пробной волны, могут быть также не равны. Отсюда следует принципиальная возможность — управляя степенью ориентации в основном и возбужденном состояниях, реализовать условия усиления света с определенной поляризацией в отсутствие инверсии населенностей.

Выражение для поперечного сечения поглощения пробного излучения, распространяющегося через среду пробного электромагнитного поля \mathbf{E} , имеет вид [12]

$$\sigma = 8\pi\hbar\omega \frac{\tilde{B}}{c} F(\omega) = \sigma_0 \cos^2 \vartheta, \quad (1)$$

где $\sigma_0 = ((8\pi)^2/c\hbar)\omega d_{21}^2 F(\omega)$ — сечение поглощения-испускания для молекулы, электродипольный момент перехода которой ориентирован параллельно плоскости поляризации \mathbf{E} , d_{21} — матричный элемент электродипольного момента перехода в системе координат, связанной с молекулой, $F(\omega)$ — частотный форм-фактор, ω — частота излучения, ϑ — угол между направлением электродипольного момента перехода и вектором пробного электрического поля.

Тогда показатель усиления $\alpha > 0$ (поглощения $\alpha < 0$), определяющийся соотношением $I = I_0 \exp(\alpha z)$ (закон Бугера) для случая ориентированных во внешнем поле E_0 молекул и плоскополяризованного пробного излучения \mathbf{E} , будет иметь вид

$$\alpha = N\sigma_0 \int_{\Omega} [n_2 f_2(\Omega, E_0) - n_1 f_1(\Omega, E_0)] \cos^2 \vartheta d\Omega. \quad (2)$$

Здесь $n_1 = N_1/N$ и $n_2 = N_2/N$, N_1 и N_2 — населенности нижнего 1-го и верхнего 2-го состояний, N — концентрация частиц, обусловленная внешним источником накачки, тип которой здесь не конкретизируется соответственно, $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ — элемент телесного угла, $f_1(\Omega, E_0)$ и $f_2(\Omega, E_0)$ — нормированные на единицу функции статистического распределения ориентации молекул в 1-м и 2-м состояниях, определяющиеся энергией их взаимодействий $U(\Omega, E_0)$ с внешним полем E_0 .

Потенциальная энергия анизотропно поляризуемых в электрическом поле молекул может быть записана следующим образом [11]:

$$U_j(\Omega, E_0) = -\mu_i^{(j)} E_{0i} - \frac{1}{2} \alpha_{ik}^{(j)} E_{0i} E_{0k}, \quad (3)$$

где $\mu_i^{(j)}$ — составляющая вектора постоянного дипольного момента, α_{ik} — компоненты тензора электрической поляризации молекулы, находящиеся в j -м энергетическом состоянии. Первый член формулы описывает

ориентацию молекул, имеющих постоянный дипольный момент, в постоянном электрическом поле. Второй член соответствует энергии взаимодействия дипольного момента, наведенного полем \mathbf{E}_0 , которое может быть переменным, с этим полем.

В работах [7,8] рассматривались аксиально-симметричные молекулы, в которых направление постоянного дипольного момента μ совпадало с направлением оси симметрии молекулы, составляющей угол ϑ_0 с электрическим полем \mathbf{E}_0 . Последнее позволило существенно упростить задачу вычисления показателя усиления (2) в предположении малости времени установления ориентационного равновесия τ_0 по сравнению со временем жизни возбужденного состояния τ_2^{eff} . В этом случае функции распределения в (2) могут быть представлены в виде функций Больцмана, в которых потенциальная энергия взаимодействия U выражается только через угол ϑ_0 .

Очевидно, что принятые допущения сильно ограничивают область применения полученных в [7,8] соотношений, что делает необходимым разработку модели, позволяющей вычислять значения функций распределения в (2). Для этого рассмотрим модель, основанную на системе кинетических уравнений Больцмана, позволяющую решить поставленную задачу [11]. Так же как и в цитируемых работах, будем рассматривать аксиально-симметричные молекулы, в которых направление постоянного дипольного момента μ совпадает с направлением оси симметрии молекулы. Ограничимся в выражении (3) только первым членом, имея в виду, что обобщение полученных здесь результатов на случай недипольных молекул не представляет трудности.

Пусть молекулы с уровнями энергии W_1, W_2 находятся в термодинамическом равновесии с полем накачки, обеспечивающим относительные населенности уровней n_1, n_2 соответственно, и $W_1 < W_2$. В этом случае $n_1 > n_2$, инверсия населенностей отсутствует, и времена жизни нижнего τ_1^{eff} - и верхнего τ_2^{eff} -уровней определяются следующим образом:

$$\frac{1}{\tau_1^{\text{eff}}} = w_{12}^{\text{ind}}, \quad \frac{1}{\tau_2^{\text{eff}}} = w_{21}^{\text{ind}} + w_{21}^{\text{sp}} \quad \text{и} \quad \frac{\tau_2^{\text{eff}}}{\tau_1^{\text{eff}}} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (4)$$

где $w_{12}^{\text{ind}} = w_{21}^{\text{ind}}$ — вероятность индуцированных и w_{21}^{sp} — спонтанного переходов.

При наложении на среду внешнего поля напряженности E_0 ориентация молекул описывается функцией распределения по ориентациям $f(\Omega, E_0)$, которая в общем случае определяется временами жизни τ_1^{eff} и τ_2^{eff} и временем ориентации τ_0 , зависящих как от параметров молекул, так и от параметров среды, в которую они помещены. В рассматриваемом случае энергия U , а также функции распределения $f_1(\Omega, E_0)$ и $f_2(\Omega, E_0)$ зависят только от угла ϑ_0 (угол между осью симметрии молекулы и внешним ориентирующим полем \mathbf{E}_0). Кинетическое уравнение, которое определяет $f(\Omega, E_0)$

в виде функции от t и ϑ , будет выглядеть следующим образом [12,13]:

$$\frac{w}{kT} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \left[\frac{\partial f}{\partial \vartheta} + f \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{U}{kT} \right) \right] \right\}, \quad (5)$$

где $w = 6kT\tau_0$.

Согласно [11], введем безразмерный параметр ориентации электрического диполя

$$p_j = \frac{\mu^{(j)} E_0}{kT}. \quad (6)$$

В рассматриваемом случае двухуровневой молекулы для учета влияния переходов между уровнями 1 и 2 необходимо записать связанную систему уравнений для функций f_1 и f_2 с учетом вероятностей переходов между уровнями. Тогда для стационарного случая, вводя обозначения в соответствии с соотношениями (4), (5), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \sin \vartheta \left[\frac{df_1}{d\vartheta} + f_1 \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{U}{kT} \right) \right] \right\} + \\ \quad + \frac{6\tau_0}{\tau_1^{\text{eff}}} f_1 - \frac{6\tau_0}{\tau_2^{\text{eff}}} f_2 = 0, \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \sin \vartheta \left[\frac{df_2}{d\vartheta} + f_2 \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{U}{kT} \right) \right] \right\} + \\ \quad + \frac{6\tau_0}{\tau_2^{\text{eff}}} f_2 - \frac{6\tau_0}{\tau_1^{\text{eff}}} f_1 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Данная система с граничными условиями

$$\left. \frac{df_1}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=0} = \left. \frac{df_2}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=0} = 0, \quad \left. \frac{df_1}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=\pi} = \left. \frac{df_2}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=\pi} = 0 \quad (8)$$

и условием нормировки

$$2\pi \int_0^\pi [f_1(\vartheta) + f_2(\vartheta)] \sin \vartheta d\vartheta = 1 \quad (9)$$

совместно с (2) позволяет решить поставленную выше задачу о расчете показателя усиления. Для этого рассмотрим два случая, в которых эффект безынервного усиления может проявляться наиболее сильно [7,8].

1. Пусть постоянный дипольный момент в основном состоянии μ_1 меньше, чем в возбужденном μ_2 . Тогда эффект безынервного усиления может проявляться при параллельных полях E и E_0 . В этом случае $\vartheta = \vartheta_0$ и показатель усиления α описывается формулой

$$\alpha = \sigma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi [n_2 f_2(\vartheta) - n_1 f_1(\vartheta)] \cos^2 \varphi \sin \varphi d\vartheta. \quad (10)$$

2. В случае, если $\mu_2 < \mu_1$, в большей степени ориентируются вдоль поля E_0 молекулы, находящиеся в

основном состоянии. Поэтому для подавления поглощения целесообразно ориентировать поле E ортогонально полю E_0 . При этом показатель усиления α , усредненный по ориентациям молекул, будет иметь вид

$$\alpha = \sigma_0 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi^2 d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \vartheta [n_2 f_2(\vartheta) - n_1 f_1(\vartheta)] d\vartheta. \quad (11)$$

Как отмечалось выше, соотношения (10) и (11) могут быть выражены через функции Ланжевена при $\tau^{\text{eff}} \gg \tau_0$, поскольку функции распределения по ориентациям в этих выражениях с хорошей степенью точности аппроксимируются функциями распределения Больцмана. Действительно, при $\tau^{\text{eff}} \gg \tau_0$ за время жизни молекулы в возбужденном состоянии равновесное распределение по ориентациям успевает установиться. В случае невыполнения этого неравенства характер функций распределения по ориентациям в состояниях 1 и 2 будет определяться комбинацией функций распределения в обоих состояниях, которые могут существенно отличаться ввиду отличия μ_1 от μ_2 .

Вычислительный эксперимент

Вначале рассмотрим влияние соотношения $b_1 = 6\tau_0/\tau_1^{\text{eff}}$ и $b_2 = 6\tau_0/\tau_2^{\text{eff}}$ на вид функции распределения молекул по ориентации. Задача (7)–(9) численно решалась при помощи метода экспоненциальной подгонки, хорошо себя зарекомендовавшего при решении краевых задач для диффузионно-конвективных уравнений [14]. На рис. 1, *a* изображены нормированные на единицу функции статистического распределения ориентаций молекул в основном (1) и возбужденном (2) состояниях в зависимости от угла ϑ , выраженного в единицах π . Графики получены при соотношении $\tau_2^{\text{eff}}/\tau_1^{\text{eff}} = n_2/n_1 = 1$ и параметрах ориентации $p_1 = 8$, $p_2 = 2$ при $b_1 = b_2 = 0.01$, т.е. при значениях τ_1^{eff} и τ_2^{eff} , значительно больших времени установления ориентационного взаимодействия τ_0 . Из рис. 1, *a* видно, что f_1 и f_2 сильно различаются и соответствуют равновесным функциям распределения Больцмана, принятым в работах [7,8]. Обратную картину демонстрирует рис. 1, *b*, на котором приведены функции распределения f_1 и f_2 , полученные при значениях $b_1 = b_2 = 100$. Очевидно, что в этом случае функции распределения не являются равновесными для данного состояния, поскольку их вид в состояниях 1 и 2 практически совпадает.

Наглядно это утверждение демонстрирует рис. 2, на котором параметр ориентации возбужденного состояния принят равным нулю, что соответствует равновероятной ориентации молекул в этом состоянии. Кривая 1 получена при соотношении $\tau_2^{\text{eff}}/\tau_1^{\text{eff}} = n_2/n_1 = 0.8$ и параметрах ориентации $p_1 = 5$, $p_2 = 0$, $b_1 = 0.01$ и соответствует практически равновероятной функции распределения. При увеличении b_1 от 0.1 до 10 характер функции

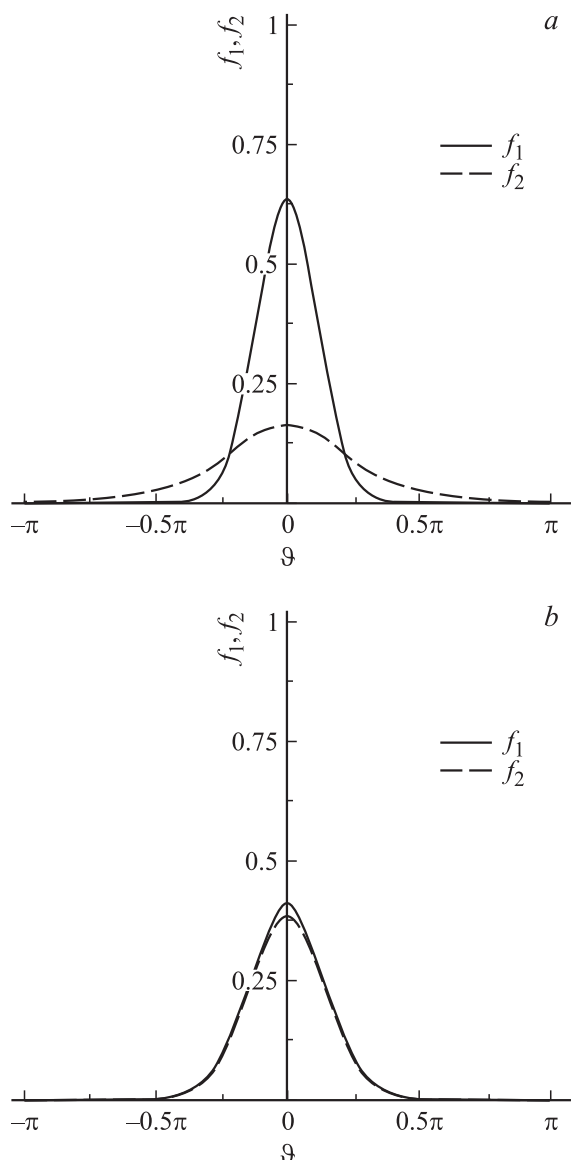


Рис. 1. Нормированное на единицу статистическое распределение ориентации молекул в основном (f_1) и возбужденном (f_2) состояниях при $b_1 = b_2 = 0.01$ (а) и $b_1 = b_2 = 100$ (б).

существенно изменяется и при значениях $b_1 = 10$ практически совпадает с функцией распределения основного состояния.

На рис. 3, а, б приведены рассчитанные зависимости показателя усиления от параметров ориентации для двух рассмотренных ранее случаев, полученных с использованием выражений (10) — рис. 3, а и (11) — рис. 3, б.

На рис. 3, а приведены зависимости безразмерного показателя усиления от параметра ориентации возбужденного состояния при различных значениях $b_1 = 6\tau_0/\tau_1^{\text{eff}}$. При этом кривая 1 соответствует ситуации, когда время жизни возбужденного состояния намного больше времени установления ориентационного равновесия ($b_1 = 0.05$). Эта ситуация соответствует приближению, принятому в работах [7,8], и кривая 1 полностью

совпадает с приведенными в этих работах кривыми. В этом случае в системе уравнений (7) можно пренебречь последними двумя членами и свести систему уравнений к двум независимым уравнениям, решением которых являются равновесные функции Больцмана, что и предполагалось в цитируемых выше работах. Кри-

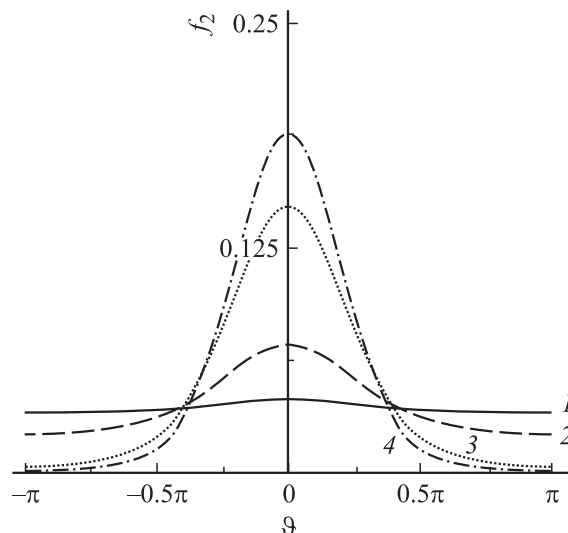


Рис. 2. Нормированное на единицу статистическое распределение ориентации молекул в возбужденном состоянии при различных значениях b_1 : 1 — 0.01; 2 — 0.1; 3 — 1; 4 — 10.

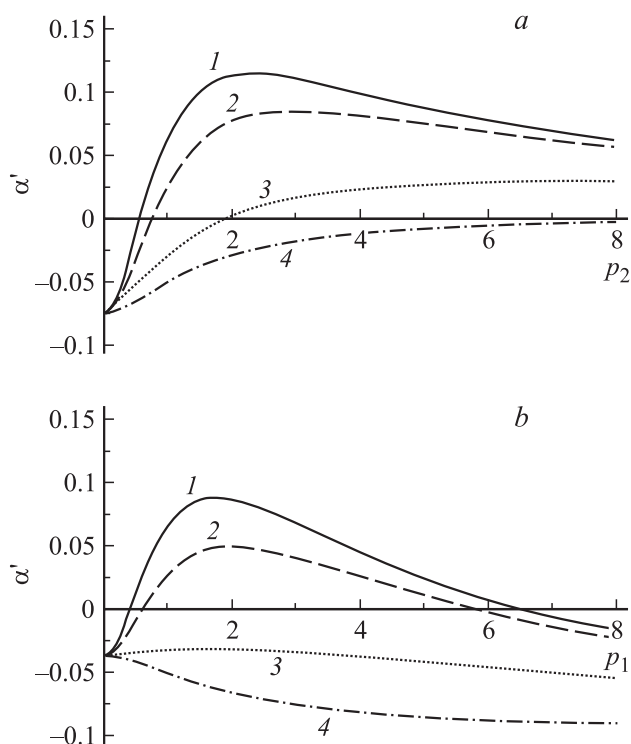


Рис. 3. Зависимости безразмерного показателя усиления $\alpha^1 = \alpha/\sigma_0$ от параметра ориентации p_2 (а) и p_1 (б), полученные при соотношениях $\mu_1/\mu_2 = 4$, $n_2/n_1 = 0.8$. Значения b_1 : 0.05 (1); 0.1 (2); 1 (3); 10 (4).

вые 2 и 3 при значениях $b_1 = 1$, $b_1 = 10$ соответственно демонстрируют возможность безынервного усиления излучения при параметре ориентации p_2 большем, чем на кривой 1. При значениях времени установления ориентационного равновесия много больших, чем время жизни возбужденного состояния ($b_1 = 100$), усиление ($\alpha' > 0$) меняется на поглощение ($\alpha' < 0$) в достаточно широкой области изменения параметра p_2 . Аналогичные выводы можно сделать и при рассмотрении случая, полученного с использованием выражения (11) — рис. 3, б.

Таким образом, приведенные выше результаты расчетов позволяют утверждать, что функции распределения молекул по ориентациям зависят как от параметра ориентации данного состояния, так и от соотношения τ_0/τ^{eff} . Поскольку показатель усиления будет тем больше, чем больше отличие между функциями распределения в состояниях 1 и 2, то, для того чтобы компенсировать уменьшение отличия этих функций из-за роста τ_0/τ^{eff} , необходимо увеличивать параметр ориентации, т. е. величину ориентирующего поля.

На рис. 4 изображены зависимости b_1 от параметра ориентации (рассматриваемые случаи 1 и 2 соответственно), при котором безразмерный показатель усиления $\alpha^1 = 0$ (граница области усиления).

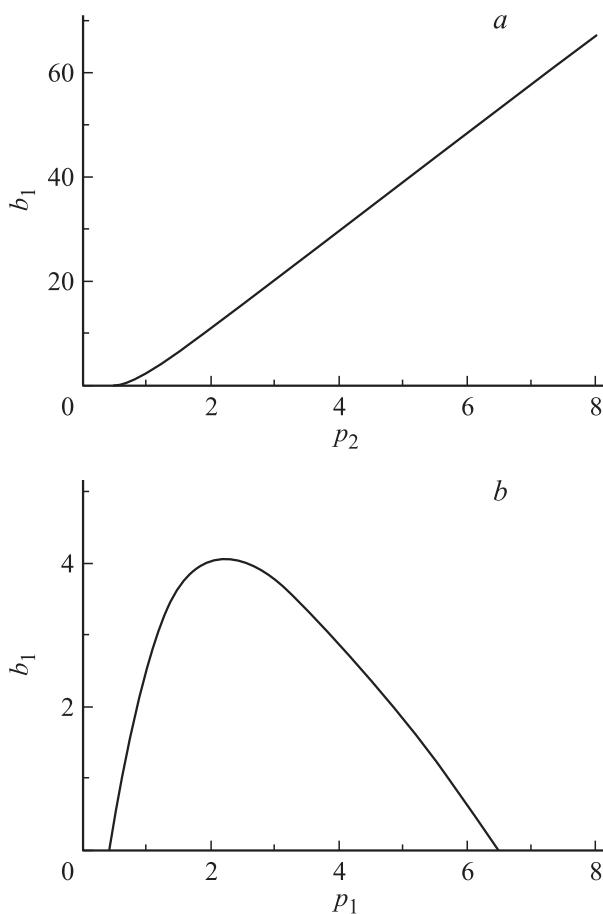


Рис. 4. Граница области усиления ($\alpha^1 = 0$) для случаев 1 (а) и 2 (б).

Переход от режима поглощения к режиму усиления может быть осуществлен (рис. 4, а) либо путем увеличения параметра ориентации верхнего состояния за счет увеличения ориентирующего поля, либо уменьшением соотношения τ_0/τ^{eff} . Для случая, изображенного на рис. 4, б, смена режимов поглощение–усиление может осуществляться в определенных пределах изменения параметра ориентации нижнего состояния. При этом увеличение τ_0/τ^{eff} приводит к уменьшению области изменения параметров ориентации, при которых усиление возможно. Усиление невозможно при любом параметре ориентации, если значение τ_0/τ^{eff} превышает значение, соответствующее максимуму кривой.

Заключение

Приведенное выше рассмотрение влияния соотношения τ_0/τ^{eff} позволяет расширить область поиска объектов для экспериментальной проверки возможности эффекта безынервного усиления. Наиболее вероятными претендентами на эту роль могут являться органические молекулы, и в частности молекулы красителей. Как правило, для электродипольных переходов время жизни возбужденного состояния составляет величину порядка 10^{-8} – 10^{-9} . Время ориентации может меняться в широких пределах в зависимости от различных параметров, в частности от вязкости среды и размеров молекул. Так, в растворах τ_0 лежит в пределах 10^{-10} – 10^{-12} и в газовой фазе 10^{-8} – 10^{-9} . Проведенное выше рассмотрение позволяет утверждать, что усиление возможно как в случае помещения молекул в раствор (τ_0/τ^{eff} порядка 10^{-4} – 10^{-1}), так и в буферный газ (τ_0/τ^{eff} порядка единицы). Естественно, что во втором случае усиление будет уменьшаться, однако эффект может быть зарегистрирован.

Однако для этих соединений постоянный дипольный момент составляет в лучшем случае величину порядка 10 D [10,11,15]. Поэтому параметр ориентации в постоянном поле, величина которого близка к пробойному, вряд ли может превышать значение порядка единицы даже при использовании в качестве растворителя наиболее электрически стойких соединений [16]. Тем не менее использование импульсных ориентирующих полей позволяет увеличить значение пробойного напряжения на 1–2 порядка [17], что означает увеличение параметра ориентации также на 1–2 порядка. Кроме того, в случае оптической ориентации молекул при фокусировке излучения лазера мощностью 10^6 W параметр ориентации может также превышать значение 1.

Можно также рассмотреть в качестве объектов для экспериментальной проверки более крупные белковые макромолекулы. Значение их дипольных моментов может составлять величину порядка 10^2 – 10^3 D, что позволят снизить величину постоянного ориентирующего поля ниже пробойного для значений параметров ориентации больших единицы. Несмотря на то что τ_0

для этих молекул может составлять величину порядка 10^{-7} – 10^{-9} с и, следовательно, τ_0/τ^{eff} может быть больше единицы, эффект безынерционного усиления может быть зарегистрирован и при этих соотношениях, как было показано выше.

Таким образом, приведенные выше результаты численного эксперимента показывают, что в ряде случаев соотношения τ_0/τ^{eff} могут оказаться решающим фактором, приводящим к изменению знака показателя усиления α . Последнее необходимо учитывать как в случае использования достаточно легких молекул (до 10^3 а.е. и длиной порядка 10 \AA) при помещении их в газовую среду, в которой время установления ориентационного взаимодействия может быть больше времени жизни возбужденного состояния, так и в случае более крупных молекул в жидкости. Отметим также, что значение τ_0/τ^{eff} порядка единицы не приводит к значительному уменьшению усиления.

Список литературы

- [1] Раутиан Г., Рубин П.Л. // Опт. и спектр. 1965. Т. 18. Вып. 2. С. 326–333.
- [2] Сосинский М.Л., Морозов Е.Н. // Опт. и спектр. 1965. Т. 18. Вып. 3. С. 510–515.
- [3] Раутиан С.Г., Смирнов Г.И., Шалагин А.М. Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул. Новосибирск: Наука, 1979. 310 с.
- [4] Попов А.К. Введение в нелинейную спектроскопию. Новосибирск: Наука, 1983. 274 с.
- [5] Mak An., Chigir' N.A. // JETP. 1983. Vol. 58. N 2. P. 280–284.
- [6] Arkhipkin V.G., Heller Yu.I. // Phys. Lett. A. 1983. Vol. 98. N 12. P. 12–16.
- [7] Popov A.K., Slabko V.V. // Opt. Lett. 2005. Vol. 30. N 13. P. 1719–1721.
- [8] Popov A.K., Slabko V.V. // J. Phys. B. 2005. Vol. 38. N 11. P. 1787–1796.
- [9] Klimov A.B., Romero J.L. // J. Phys. A. 2008. Vol. 41. P. 055 303.
- [10] Бахшиев Н.Г. Спектроскопия межмолекулярных взаимодействий. Л.: Наука, 1972. 263 с.
- [11] Келих С. Молекулярная нелинейная оптика. М.: Наука, 1981. 671 с.
- [12] Дебай П. Полярные молекулы / Пер. с нем. М.-Л.: ГТТИ, 1931. 247 с.
- [13] Дебай П., Закк Г. Теория электрических свойств молекул. М.: Глав. ред. общетехнич. лит-ры, 1936. 144 с.
- [14] Кузоватов И.А., Миловидова Т.А., Славин В.С. // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12. № 4. С. 73–84.
- [15] Райхардт К. Растворители и эффекты среды в органической химии. М.: Мир, 1991. 763 с.
- [16] Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
- [17] Месяц Г.А. Импульсная энергетика и электроника. М.: Наука, 2004. 704 с.