

01;03

## Нелинейное резонансное взаимодействие мод осцилляций сферического слоя жидкости на поверхности тающей градины

© А.И. Григорьев, Д.О. Корниенко, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 9 июня 2011 г.)

В аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости по малой безразмерной амплитуде капиллярных осцилляций заряженного слоя электропроводной жидкости на поверхности твердого ядра выведены и решены эволюционные уравнения для описания временной зависимости амплитуд мод осцилляций жидкого слоя при многомодовой начальной деформации. Исследованы закономерности реализации внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия мод осцилляций жидкого слоя и обмена энергией между модами как в вырожденном, так и во вторичном комбинационном резонансах. Выяснилось, что в вырожденном резонансном взаимодействии мод осцилляций энергия может переноситься не только от низких мод к высоким, но и в обратном направлении, если в начальный момент времени высокая мода была возбуждена. Последний вывод справедлив не только для слоя жидкости на поверхности твердого ядра, но и для капли.

### Введение

Задача аналитического асимптотического расчета линейных и нелинейных осцилляций поверхностного заряженного слоя несжимаемой электропроводной жидкости на поверхности твердого ядра при различных осложняющих физических условиях неоднократно решалась в связи с проблемами грозового электричества [1–6] и научного аналитического приборостроения [7,8]. В некоторых из проделанных исследований указывалось на возможность реализации внутреннего нелинейного резонансного обмена энергией между модами осцилляций (см., например, [6]), тем не менее особенности нелинейного резонансного взаимодействия мод в описанной колебательной системе пока никем не исследовались. Этой проблеме и посвящена настоящая работа.

### 1. Формулировка проблемы

Пусть на поверхности твердого сферического ядра радиусом  $R_0$  находится смачивающий ее сферически симметричный слой идеальной несжимаемой идеальной проводящей жидкости с внешним радиусом  $R$ , плотностью  $\rho$  и коэффициентом поверхности натяжения  $\gamma$ . Будем считать, что на свободной поверхности жидкости распределен заряд  $Q$ . Примем, что в начальный момент времени  $t = 0$  равновесная сферическая форма свободной поверхности слоя жидкости претерпела виртуальную осесимметричную деформацию  $\xi(\vartheta, t)$ , пропорциональную суперпозиции нескольких осесимметричных мод капиллярных осцилляций слоя жидкости, амплитуда которой существенно меньше радиуса  $R$  и меньше толщины слоя жидкости  $\max |\xi| < R - R_0 \ll R$ . Будем исследовать нелинейные осцилляции слоя жидкости, порожденные начальной деформацией, при  $t > 0$ .

Рассмотрение проведем в безразмерных переменных при  $R = \gamma = \rho = 1$  в сферической системе координат  $\{r, \vartheta, \varphi\}$  с началом в центре масс системы. Тогда уравнение свободной поверхности жидкости запишется в виде

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t), \quad \max |\xi| < 1 - R_0 \ll 1.$$

Очевидно, что в силу осевой симметрии начальных условий деформация свободной поверхности в любой момент времени будет зависеть только от полярного угла  $\vartheta$  и времени  $t$ . Такое ограничение не снизит существенным образом общности проводимого анализа, но позволит избежать излишней громоздкости необходимых математических выкладок.

Течение жидкости будем полагать потенциальным, т. е. примем, что после скорости волнового движения в жидком слое полностью определяется функцией потенциала скорости  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla\psi(\mathbf{r}, t)$ . Учтем, что скорости гидродинамических движений жидкости много меньше скорости света в вакууме, и электрическое поле собственного заряда системы в окрестности системы будем считать электростатическим с потенциалом  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ .

Задача расчета нелинейных осцилляций жидкого слоя на поверхности твердого сферического слоя состоит из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей течения жидкости, связанного с осцилляциями свободной поверхности  $\psi(\mathbf{r}, t)$  и электростатического потенциала  $\Phi(\mathbf{r}, t)$

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1)$$

и граничных условий к ним:

на свободной поверхности слоя жидкости

$$r = 1 + \xi : \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta},$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t), \quad (2)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \psi)^2 + \Delta p + p_q - p_\gamma = 0,$$

$$p_q \equiv \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi}, \quad p_\gamma \equiv \text{div } \mathbf{n},$$

на бесконечности

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0,$$

на поверхности твердого ядра

$$r \rightarrow R_0: \quad \nabla \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3)$$

В выписанных соотношениях  $\Delta p$  — перепад постоянных давлений внутри и вне слоя жидкости в состоянии равновесия,  $p_q$  — давление электрического поля собственного заряда на поверхности жидкого слоя,  $p_\gamma$  — лапласовское давление,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к свободной поверхности жидкого слоя,  $\Phi_S(t)$  — постоянный вдоль свободной поверхности электрический потенциал.

Кроме перечисленных граничных условий следует учесть также условия неизменности собственного электрического заряда системы

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}, \nabla \Phi) dS = Q,$$

неизменности объема слоя жидкости

$$\int_{V_1} r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{4}{3} \pi (1 - R_0^3),$$

$$V_1 = \begin{cases} R_0 \leq r \leq 1 + \xi(\vartheta, t), \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (4)$$

и неподвижности центра масс системы

$$\frac{\int_{V_1} \mathbf{r} dV_1 + \rho_* \int_{V_2} \mathbf{r} dV_2}{\int_{V_1} dV_1 + \rho_* \int_{V_2} dV_2} = 0, \quad V_2 = \begin{cases} 0 \leq r \leq R_0, \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $\rho_*$  — безразмерная плотность твердого ядра.

Начальные условия к поставленной задаче сформулируем в виде задания начальной осесимметричной деформации равновесной сферической формы свободной поверхности и равенства нулю начальной скорости ее движения

$$t = 0: \quad \xi(\vartheta, t) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} \xi_j P_j(\mu),$$

$$\sum_{j \in \Xi} \xi_j = 1, \quad \frac{\partial \xi(\vartheta, t)}{\partial t} = 0, \quad \mu \equiv \cos \vartheta. \quad (6)$$

Здесь  $\varepsilon$  — безразмерная амплитуда начальной деформации, являющаяся малым параметром задачи,  $\xi_j$  — парциальные амплитуды отдельных мод,  $P_j(\mu)$  — полином Лежандра  $j$ -го порядка,  $\Xi$  — множество значений

номеров мод осцилляций, определяющих начальную деформацию свободной поверхности,  $\xi_0$  и  $\xi_1$  — константы, определяемые условиями (4) и (5) соответственно.

Следует отметить, что условия (4), (5) должны выполняться в любой момент времени, в том числе и начальный. Несложно показать, что если в начальный момент времени возбужден некоторый набор мод, то условия неизменности объема жидкого слоя (4) и неподвижности центра масс системы жидкость–ядро (5) дают следующие значения констант  $\xi_0$  и  $\xi_1$  из (6):

$$\xi_0 = -\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{1}{2j+1} \xi_j^2,$$

$$\xi_1 = -9\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{j}{(2j-1)(2j+1)} \xi_j \xi_{j-1}.$$

## 2. Описание процедуры отыскания решения

Будем решать задачу (1)–(5) известным методом многих временных масштабов [4–6,9,10] в квадратичном по  $\varepsilon$  приближении. Искомые функции  $\xi(\vartheta, t)$ ,  $\psi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  представляются в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра  $\varepsilon$  и считаются зависящими не просто от времени  $t$ , но от разных его масштабов  $T_m$ , определенных как  $T_m = \varepsilon^m t$ :

$$\xi(\vartheta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\vartheta, T_0, T_1, \dots),$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \psi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, \dots), \quad (7)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Phi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, \dots).$$

Производные по времени при этом вычисляются с учетом полного набора различных его масштабов по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3). \quad (8)$$

### 2.1. Лапласовское давление

Согласно общей идеологии асимптотического разложения, давление сил поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкого слоя следует представить в виде

$$p_\gamma = p_\gamma^{(0)} + \varepsilon p_\gamma^{(1)} + \varepsilon^2 p_\gamma^{(2)}. \quad (9)$$

Выражения для компонент лапласовского давления  $p_\gamma^{(m)}$  выписываются [5,6,10] как

$$p_\gamma^{(0)} = 2, \quad p_\gamma^{(1)} = -(2 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)},$$

$$p_\gamma^{(2)} = 2(\xi^{(1)})^2 + 2\xi^{(1)} \Delta_\Omega \xi^{(1)} - (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(2)}.$$

### 2.2. Электрическое давление

В виде асимптотического разложения представим и давление электрического поля  $p_q$  [5,6,10]

$$p_q = p_q^{(0)} + \varepsilon p_q^{(1)} + \varepsilon^2 p_q^{(2)}, \quad (10)$$

в котором отдельные компоненты вычисляются путем разложения выражения  $(\nabla\Phi)^2$  с учетом (7) в ряд по малому параметру  $\varepsilon$  на поверхности, возмущенной волновым движением, с сохранением слагаемых до второго порядка малости включительно

$$p_q^{(0)} = \frac{1}{8\pi} (\nabla\Phi^{(0)})^2 \Big|_{r=1},$$

$$p_q^{(1)} = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{\partial(\nabla\Phi^{(0)})^2}{\partial r} \xi^{(1)} + 2(\nabla\Phi^{(0)}, \nabla\Phi^{(1)}) \right]_{r=1},$$

$$p_q^{(2)} = \frac{1}{8\pi} \left[ (\nabla\Phi^{(1)})^2 + 2(\nabla\Phi^{(0)}, \nabla\Phi^{(2)}) + \frac{\partial[(\nabla\Phi^{(0)})^2]}{\partial r} \xi^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2[(\nabla\Phi^{(0)})^2]}{\partial r^2} (\xi^{(1)})^2 + 2 \frac{\partial(\nabla\Phi^{(0)}, \nabla\Phi^{(1)})}{\partial r} \xi^{(1)} \right]_{r=1}.$$

Рассмотрение поставленной задачи ограничим квадратичным приближением по малому параметру, в рамках которого искомые величины зависят от двух временных масштабов  $T_0$  и  $T_1$ .

Подставляя разложения (7), (8) в систему граничных и начальных условий (2)–(6), с учетом (9), (10) и выделяя слагаемые, содержащие одинаковые степени малого параметра  $\varepsilon$ , получим набор линейных краевых задач для определения функций  $\xi^{(m)}(\vartheta, t)$ ,  $\psi^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Phi^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ , отыскание решений которых не представляет заметных трудностей кроме некоторой громоздкости.

Решение уравнений Лапласа (1) в сферической системе координат для потенциала скоростей и потенциала электрического поля собственного заряда имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_n^{(m)}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(m)}(T_1, T_2, \dots) r^n P_n(\mu) \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} B_n^{(m)}(T_1, T_2, \dots) r^{-(n+1)} P_n(\mu), \\ \Phi^{(m)}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} C_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-(n+1)} P_n(\mu). \end{aligned} \quad (11)$$

Возмущение свободной поверхности слоя жидкости  $\xi^{(m)}$  также ищется в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\xi^{(m)}(\vartheta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} M_n^{(m)}(T_1, T_2, \dots) P_n(\mu). \quad (12)$$

### 3. Получение эволюционных дифференциальных уравнений для амплитуд осцилляций

В нулевом порядке малости получим выражения для описания равновесного состояния системы: электростатического потенциала собственного заряда системы  $Q$ , равномерно распределенного по поверхности жидкого слоя  $\Phi^{(0)} = Q/r$ , и постоянного гидродинамического давления под равновесной сферической свободной поверхностью жидкого слоя  $P = 2 - (Q^2/8\pi)$ .

В первом порядке малости, подставляя проекты решений (11), (12) при  $m = 1$  в систему граничных условий первого порядка малости, полученную из (2), (3), после соответствующих преобразований получим эволюционное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестных амплитуд  $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$ , имеющее вид

$$\frac{\partial^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1) = 0, \quad (13)$$

$$\omega_n^2 = n\chi_n(n-1)(2+n-W), \quad \chi_n = \frac{(n+1)(1-R_0^{2n+1})}{1+n(1+R_0^{2n+1})},$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{4\pi}.$$

Его решение легко выписывается:

$$M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = D_n^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_n T_0) + c.c.,$$

$$D_n^{(1)}(T_1) \equiv d_n^{(1)}(T_1) \exp(ib_n^{(1)}(T_1)T_0).$$

В случае ограничения проводимого рассмотрения первым порядком малости вещественные функции  $d_n^{(1)}(T_1)$  и  $b_n^{(1)}(T_1)$  не зависят от временного масштаба  $T_1$  и являются константами, значения которых определяются из начальных условий (6) и имеют вид

$$d_n^{(1)} = 0.5\delta_{nj}\xi_j, \quad b_n^{(1)} = 0.$$

Множитель 0.5 появляется из-за перехода от экспонент с мнимыми показателями к косинусу вещественного аргумента. Аббревиатура „с.с.“ означает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным;  $\delta_{nj}$  — символ Кронекера. Зависимости функций  $d_n$  и  $b_n$  от времени  $T_1$  определяются при решении задачи второго порядка малости.

Из условий (4), (5), записанных в линейном по  $\varepsilon$  приближении, следует, что

$$M_0^{(1)}(T_0, T_1) = 0, \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1) = 0.$$

Подставляя решения первого порядка малости (13) и проекты решений (11), (12) при  $m = 2$  в систему граничных условий второго порядка малости, полученную из (2), (3) при асимптотическом разделении по порядкам малости, выведем эволюционное дифференциальное уравнение второго порядка для функции

$M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$ , которое с учетом полученного решения для  $M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \\ &= -2i\omega_n \exp(iT_0\omega_n) \frac{\partial D_n(T_1)}{\partial T_1} \\ &+ \sum_{g \in \Xi} \sum_{h \in \Xi} \{ (\gamma_{hgn} + \eta_{hgn}\omega_h\omega_g) \\ &\times \exp(i(\omega_g + \omega_h)T_0) D_h(T_1) D_g(T_1) \\ &+ (\gamma_{hgn} - \eta_{hgn}\omega_h\omega_g) \\ &\times \exp(i(\omega_g - \omega_h)T_0) D_h(T_1) \bar{D}_g(T_1) \}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{hgn} &= \left\{ \frac{1}{2} n\chi_n [4(g(1+g) - 1) + (3 - h(2h - 2n + 7) \right. \\ &+ (1+h)g)W] + (n\chi_n - \nu_h)\omega_h^2 \Big\} K_{hgn} \\ &+ \left( \frac{1}{2} nW\chi_n + \frac{\omega_h^2}{h\chi_h} \right) \alpha_{hgn}, \\ \eta_{hgn} &= \left( -\nu_h + \frac{n\chi_n}{2} \right) K_{hgn} + \left( \frac{1}{h\chi_h} + \frac{n\chi_n}{2gh\chi_g\chi_h} \right) \alpha_{hgn}, \end{aligned}$$

а коэффициенты  $K_{hgn}$  и  $\alpha_{hgn}$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} K_{hgn} &\equiv [C_{h0g0}^{n0}]^2, \\ \alpha_{hgn} &\equiv -\sqrt{h(h+1)g(g+1)} C_{h0g0}^{n0} C_{h(-1)g1}^{n0}. \end{aligned}$$

Здесь  $C_{h0g0}^{n0}$  и  $C_{h(-1)g1}^{n0}$  — коэффициенты Клебша–Гордана, которые отличны от нуля, только если индексы удовлетворяют условиям

$$|h - g| \leq n \leq |h + g|, \quad h + g + n \text{ — четное.}$$

Поэтому во втором порядке малости будут возбуждаться колебания только тех мод, номера которых удовлетворяют этому условию.

#### 4. Решение эволюционных уравнений

##### 4.1. Отсутствие резонансного взаимодействия мод

Для того чтобы уравнение (14) не содержало секулярных слагаемых, необходимо из его правой части исключить слагаемые, зависимость которых от времени  $T_0$  определяется выражением  $\exp(i\omega_n T_0)$ . Это требование позволяет выяснить зависимость функций  $D_n^{(1)}(T_1)$  (или  $d_n^{(1)}(T_1)$  и  $b_n^{(1)}(T_1)$ ) от временного масштаба  $T_1$ . В простейшем случае такое условие имеет вид

$$\frac{\partial D_n^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} = 0.$$

Из этого равенства, выражая  $D_n^{(1)}(T_1)$  через  $d_n^{(1)}(T_1)$  и  $b_n^{(1)}(T_1)$ , получим

$$\frac{\partial d_n^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} = \frac{\partial b_n^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} = 0.$$

Это означает, что  $d_n^{(1)}(T_1)$  и  $b_n^{(1)}(T_1)$  не зависят от медленного времени  $T_1$ , и в рамках рассмотрения задачи второго порядка малости их можно считать константами, равными своим начальным значениям.

Решение дифференциального уравнения (13) запишется в виде

$$M_n^{(1)}(T_0) = \delta_{nj} \xi_j \cos \omega_j t, \quad j \in \Xi.$$

Решение уравнения (14) после исключения секулярных членов запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= D_n^{(2)}(T_1) \exp(i\omega_n T_0) \\ &+ \sum_{h,g \in \Xi} \{ \lambda_{hgn}^+ D_g^{(1)} D_h^{(1)} \exp[i(\omega_g + \omega_h)T_0] \\ &+ \lambda_{hgn}^- D_g^{(1)} \bar{D}_h^{(1)} \exp[i(\omega_g - \omega_h)T_0] \} + c.c. \quad (15) \end{aligned}$$

Из начальных условий (6) определяются неизвестные константы

$$D_n^{(2)} = d_n^{(2)} \exp(ib_n^{(2)}), \quad b_n^{(2)} = 0,$$

$$d_n^{(2)} = \sum_{i,j \in \Xi} (\lambda_{ijn}^+ + \lambda_{ijn}^-) \xi_i \xi_j,$$

$$\lambda_{hgn}^\pm \equiv \frac{\gamma_{hgn} \pm \omega_g \omega_h}{(\omega_n)^2 - (\omega_g \pm \omega_h)^2},$$

и для формы поверхности, возмущенной волновым движением, получим выражение

$$\begin{aligned} \xi(\vartheta, t) &= \varepsilon \sum_{j \in \Xi} \cos(\omega_j t) \xi_j P_j(\mu) + \varepsilon^2 \\ &\times \left\{ - \sum_{j \in \Xi} \frac{1}{2j+1} (\xi_j \cos(\omega_j t))^2 - \sum_{j \in \Xi} \frac{9j}{(2j-1)(2j+1)} \right. \\ &\times \cos(\omega_j t) \cos(\omega_{j-1} t) \xi_j \xi_{j-1} P_1(\mu) \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} \frac{1}{2} \xi_i \xi_j \{ \lambda_{ijn}^+ (\cos[(\omega_i + \omega_j)t] - \cos(\omega_n t)) \\ &\left. + \lambda_{ijn}^- (\cos[(\omega_i - \omega_j)t] - \cos(\omega_n t)) \} P_n(\mu) \right\}. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что в рассмотренной ситуации осцилляции имеют обычный периодический вид, и их амплитуда не изменяется от периода к периоду.

#### 4.2. Вторичное комбинационное взаимодействие мод осцилляций

В решениях (15) множители  $\sim \lambda_{hgn}^{\pm}$  содержат знаменатели, принимающие при определенных комбинациях физических параметров нулевые значения. В частности, для любых трех мод с номерами  $p, q, k$  условие обращения в нуль знаменателя в  $\lambda_{pqk}^{\pm}$  выглядит как

$$\omega_k = \omega_p \pm \omega_q. \quad (16)$$

Для таких комбинаций мод реализуется внутреннее нелинейное резонансное межмодовое взаимодействие, именуемое вторичным комбинационным.

Заметим, что, согласно (13), значения частот  $\omega_n$  зависят от величины заряда (от параметра  $W$ ). Причем при значении параметра  $W_{cr} = 4$  частота колебаний основной моды (с  $n = 2$ ) обращается в нуль, дальнейшее же увеличение  $W$  приводит к тому, что свободная поверхность слоя жидкости становится неустойчивой по отношению к собственному заряду. Поэтому вторичные резонансы оказывают влияние на нелинейные осцилляции слоя жидкости и их имеет смысл исследовать только в том случае, если соотношения (16) выполняются при  $W < W_{cr}$ .

Рассмотрим случай, когда  $n$  принимает одно из значений ( $k, p, q$ ), т.е. когда имеет место комбинационный межмодовый резонанс. Для того чтобы получить решения вблизи указанных резонансов, введем так называемый параметр расстройки (в соответствии с методикой, изложенной в [9])

$$\omega_p - \omega_q = \omega_k(1 + \varepsilon\sigma).$$

Подставим это выражение в функции неоднородности системы трех дифференциальных уравнений вида (14), записанных для каждой из взаимодействующих мод (т.е. когда индексы  $h, q, n$  принимают последовательно значения ( $p, q, k$ )). В правых частях уравнений появятся слагаемые, пропорциональные

$$\exp(iT_0(\omega_p - \omega_q)) = \exp(iT_0\omega_k) \exp(iT_1\omega_k\sigma),$$

$$\exp(iT_0(\omega_p - \omega_k)) = \exp(iT_0\omega_q) \exp(iT_1\omega_k\sigma),$$

$$\exp(iT_0(\omega_q + \omega_k)) = \exp(iT_0\omega_p) \exp(-iT_1\omega_k\sigma),$$

а условия исключения секулярных членов в каждом из трех уравнений запишутся в виде

$$\begin{aligned} & -2i\omega_k \frac{\partial D_k^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} \\ & + \sum_{q \in \Xi} \sum_{p \in \Xi} \exp(iT_1\omega_k\sigma) D_p^{(1)}(T_1) \bar{D}_q^{(1)}(T_1) \Lambda_{kpq}^{(-)} = 0, \\ & -2i\omega_q \frac{\partial D_q^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} \\ & + \sum_{k \in \Xi} \sum_{p \in \Xi} \exp(iT_1\omega_k\sigma) D_p^{(1)}(T_1) \bar{D}_k^{(1)}(T_1) \Lambda_{qpq}^{(-)} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2i\omega_p \frac{\partial D_p^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} \\ & + \sum_{q \in \Xi} \sum_{k \in \Xi} \exp(iT_1\omega_k\sigma) D_p^{(1)}(T_1) \bar{D}_k^{(1)}(T_1) \Lambda_{pqk}^{(+)} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{nhq}^{(\pm)} &= \gamma_{ghn} + \gamma_{hgn} \pm (\eta_{ghn} + \eta_{hgn}) \omega_g \omega_h, \\ & h, g, n, \in \{p, q, k\}. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю действительную и мнимую части этих уравнений и вводя вместо  $b_k^{(1)}(T_1)$  новую функцию, выраженную через параметр расстройки  $\sigma$

$$\beta_k^{(1)}(T_1) \equiv \sigma \omega_k T_1 - b_k^{(1)}(T_1),$$

получим систему дифференциальных уравнений для определения вещественных функций  $d_k^{(1)}(T_1)$ ,  $\beta_k^{(1)}(T_1)$ ,  $d_p^{(1)}(T_1)$ ,  $b_p^{(1)}(T_1)$ ,  $d_q^{(1)}(T_1)$ ,  $b_q^{(1)}(T_1)$ :

$$\begin{aligned} & -2\omega_k \frac{\partial d_k^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} \\ & + \sum_{p \in \Xi} \sum_{q \in \Xi} \sin \phi(T_1) d_q^{(1)}(T_1) d_p^{(1)}(T_1) \Lambda_{kpq}^{(-)} = 0, \\ & -2\omega_k d_k(T_1) \frac{\partial \beta_k^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} \\ & + \sum_{p \in \Xi} \sum_{q \in \Xi} \left( 2\sigma \omega_k^2 d_k^{(1)}(T_1) + \cos \phi(T_1) d_q^{(1)}(T_1) d_p^{(1)}(T_1) \Lambda_{kpq}^{(-)} \right) = 0, \\ & -2\omega_q \frac{\partial d_q^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} \\ & + \sum_{p \in \Xi} \sum_{k \in \Xi} \sin \phi(T_1) d_p^{(1)}(T_1) d_k^{(1)}(T_1) \Lambda_{qpq}^{(-)} = 0, \\ & 2\omega_q d_q(T_1) \frac{\partial b_q^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} \\ & + \sum_{p \in \Xi} \sum_{k \in \Xi} \cos \phi(T_1) d_p^{(1)}(T_1) d_k^{(1)}(T_1) \Lambda_{qpq}^{(-)} = 0, \quad (17) \\ & -2\omega_p \frac{\partial d_p^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} \\ & + \sum_{k \in \Xi} \sum_{q \in \Xi} \sin \phi(T_1) d_q^{(1)}(T_1) d_k^{(1)}(T_1) \Lambda_{pqk}^{(+)} = 0, \\ & 2\omega_p d_p(T_1) \frac{\partial b_p^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} \\ & + \sum_{k \in \Xi} \sum_{q \in \Xi} \cos \phi(T_1) d_q^{(1)}(T_1) d_k^{(1)}(T_1) \Lambda_{pqk}^{(+)} = 0, \\ & \phi(T_1) = \beta_k^{(1)}(T_1) + b_p^{(1)}(T_1) - b_q^{(1)}(T_1). \end{aligned}$$

Рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда спектр мод, определяющих начальную деформацию, состоит

только из трех резонансно взаимодействующих мод  $(q, p, k)$  либо из любых двух из них. Начальными условиями для данных уравнений являются соотношения (6). Из требования непротиворечивости этой системы при  $t = 0$  получаем, что если какая-либо из мод  $k, p, q$  отсутствует в спектре изначально возбужденных мод  $\Xi$ , т.е. ее амплитуда в начальный момент равна нулю, то ее фаза при  $t = 0$  не произвольна, а равна  $\pi/2$ . Таким образом, начальные условия можно записать в виде

$$d_j^{(1)}(0) = \frac{\delta_{ij}\xi_j}{2}, \quad b_j^{(1)}(0) = (1 + \delta_{ij})\frac{\pi}{2},$$

$$i \in \Xi, \quad j = k, p, q.$$

Решения для коэффициентов  $M_j^{(1)}(T_0, T_1)$  с  $j = p, q, k$  в первом порядке малости имеют вид

$$M_k^{(1)}(T_0, T_1) = 2d_k^{(1)}(T_1) \cos((\omega_p - \omega_q)T_0 - \beta_k^{(1)}(T_1)),$$

$$M_q^{(1)}(T_0, T_1) = 2d_q^{(1)}(T_1) \cos(\omega_q T_0 + b_q^{(1)}(T_1)),$$

$$M_p^{(1)}(T_0, T_1) = 2d_p^{(1)}(T_1) \cos(\omega_p T_0 + b_p^{(1)}(T_1)),$$

где коэффициенты  $d_k^{(1)}(T_1)$ ,  $\beta_k^{(1)}(T_1)$ ,  $d_p^{(1)}(T_1)$ ,  $b_p^{(1)}(T_1)$ ,  $d_q^{(1)}(T_1)$ ,  $b_q^{(1)}(T_1)$  определяются из системы (17). Выражение для формы поверхности в случае, когда начальный спектр состоит из трех резонансно взаимодействующих мод  $\Xi = \{k, p, q\}$ , запишется в виде

$$\xi(\vartheta, t) = \varepsilon \left\{ 2d_k^{(1)}(T_1) \cos((\omega_p - \omega_q)T_0 - \beta_k^{(1)}(T_1)) P_k(\mu) \right.$$

$$+ 2d_p^{(1)}(T_1) \cos(\omega_p T_0 + b_p^{(1)}(T_1)) P_p(\mu)$$

$$+ 2d_q^{(1)}(T_1) \cos(\omega_q T_0 + b_q^{(1)}(T_1)) P_p(\mu) \left. \right\}$$

$$+ \varepsilon^2 \left\{ - \sum_{j \in \Xi} \frac{1}{2j+1} (\xi_j \cos(\omega_j t))^2 \right.$$

$$- \sum_{j \in \Xi} \frac{9j}{(2j-1)(2j+1)} \cos(\omega_j t) \cos(\omega_{j-1} t) \xi_j \xi_{j-1} P_1(\mu)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} \xi_i \xi_j \left\{ \sum_{n \notin \Xi} \lambda_{ijn}^+ (\cos[(\omega_i + \omega_j)T_0] - \cos[\omega_n T_0]) \right.$$

$$+ \lambda_{ijn}^- (\cos[(\omega_i - \omega_j)T_0] - \cos[\omega_n T_0]) \left. \right\} P_n(\mu)$$

$$+ \left\{ \lambda_{ijk}^+ (\cos[(\omega_i + \omega_j)T_0] - \cos[(\omega_p - \omega_q)T_0]) \right.$$

$$+ (1 - \delta_{ip}\delta_{jq})(1 - \delta_{iq}\delta_{jp}) \lambda_{ijk}^- (\cos[(\omega_i - \omega_j)T_0]$$

$$- \cos[(\omega_p - \omega_q)T_0]) \left. \right\} P_k(\mu) + \left\{ (1 - \delta_{ik}\delta_{jq})(1 - \delta_{iq}\delta_{jk}) \right.$$

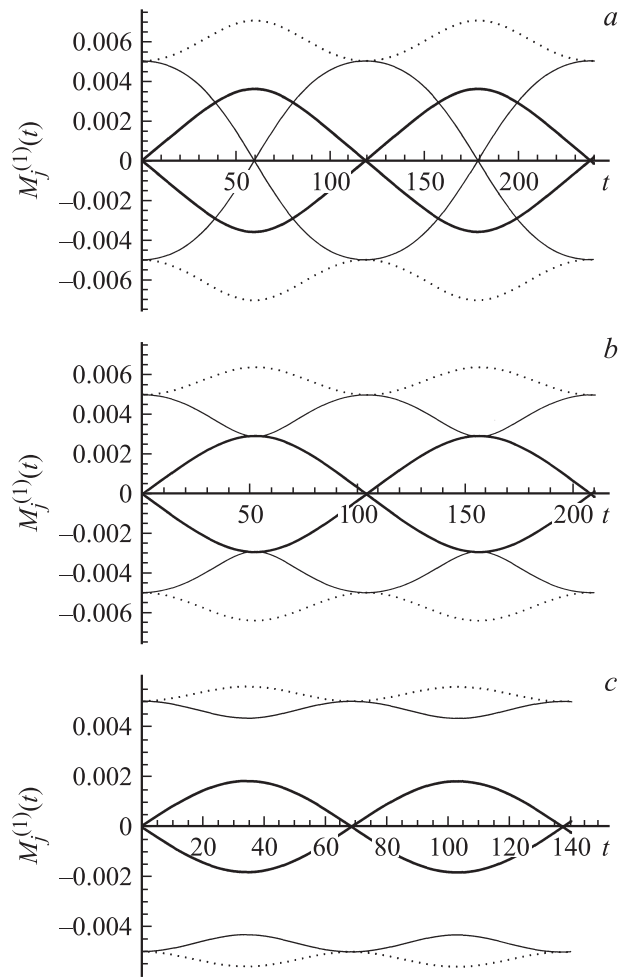
$$\times \lambda_{ijp}^+ (\cos[(\omega_i + \omega_j)T_0] - \cos[\omega_p T_0]) + \lambda_{ijp}^-$$

$$\times (\cos[(\omega_i - \omega_j)T_0] - \cos[\omega_p T_0]) \left. \right\} P_p(\mu)$$

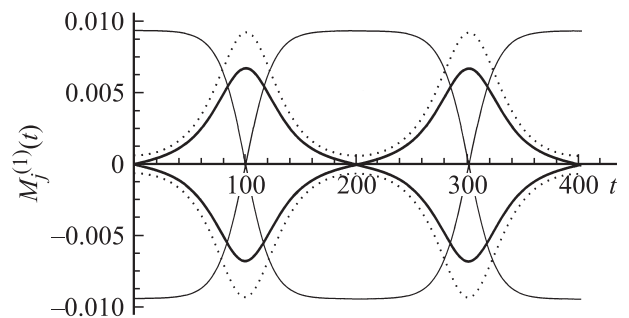
$$+ \left\{ \lambda_{ijq}^+ (\cos[(\omega_i + \omega_j)T_0] - \cos[\omega_q T_0]) \right.$$

$$+ (1 - \delta_{ik}\delta_{jp})(1 - \delta_{ip}\delta_{jk}) \lambda_{ijq}^- (\cos[(\omega_i - \omega_j)T_0]$$

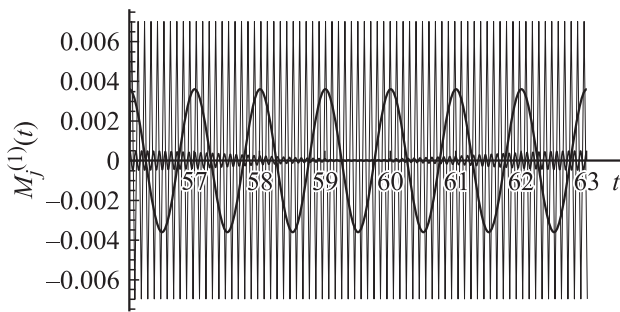
$$- \cos[\omega_q T_0]) \left. \right\} P_q(\mu) \left. \right\}.$$



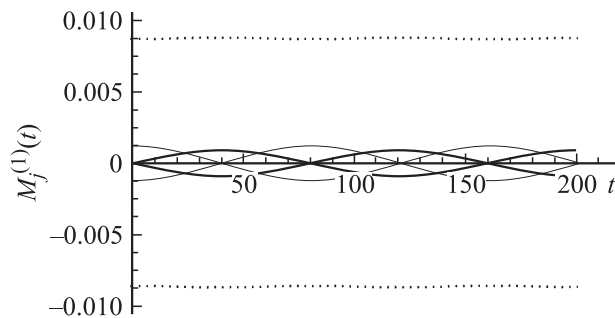
**Рис. 1.** *a* — огибающие быстро меняющихся во времени амплитуд резонансно-взаимодействующих мод с номерами  $k = 18$  — сплошная черная линия,  $q = 17$  — точечная линия,  $p = 5$  — жирная линия. Физические параметры:  $W = 3.3415$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ;  $R_0 = 0.9$ , что соответствует точному резонансу, рассчитанному при начальных условиях  $d_{18}^{(1)}(0) = 1/4$ ,  $d_{17}^{(1)}(0) = 1/4$ ,  $d_5^{(1)}(0) = 0$ ; *b* — то же, что на рис. 1, *a*, но рассчитанное при  $W = 3.393$ ; *c* — то же, что на рис. 1, *a*, но рассчитанное при  $W = 3.45$ .



**Рис. 2.** То же, что на рис. 1, *a*, но рассчитанное при начальных условиях  $d_{18}^{(1)}(0) = 15/32$ ,  $d_{17}^{(1)}(0) = 1/32$ ,  $d_5^{(1)}(0) = 0$ .



**Рис. 3.** То же, что на рис. 1, *a*, но рассчитанное в большем масштабе.



**Рис. 4.** То же, что и на рис. 1, *a*, но рассчитанное при начальных условиях:  $d_{18}^{(1)}(0) = 2/32$ ,  $d_{17}^{(1)}(0) = 14/32$ ,  $d_5^{(1)}(0) = 0$ .

На рис. 1 и 2 приведены огибающие быстро меняющихся во времени амплитуд первого порядка малости  $M_i^{(1)}(T_0, T_1)$ , когда реализуется вторичное комбинационное резонансное взаимодействие между модами осциллирующей с номерами  $k = 18$ ,  $q = 17$ ,  $p = 5$ , рассчитанные по (17). На рисунках приведены только огибающие потому, что частоты мод столь велики, что линии, соответствующие отдельным осцилляциям, сливаются. Для иллюстрации этого обстоятельства на рис. 3 приведен узкий участок рис. 1, *a* в окрестности точки  $t \approx 60$ , определяющей характерное время полной передачи исходной энергии 18-й модой к модам с меньшими номерами, на котором сохранены линии, соответствующие отдельным осцилляциям. Из проведенных расчетов (рис. 1 и 2) видно, что в анализируемом вторичном комбинационном резонансе взаимодействия энергию отдает только старшая мода, а остальные две моды только принимают энергию. Это обстоятельство наглядно иллюстрирует рис. 4, на котором приведены результаты расчета взаимодействия мод в обсуждаемом резонансе для ситуации, когда энергия начальной деформации в основном сосредоточена не в самой высокой 18-й моде, а в 17-й. Из рис. 4, *a* видно, что на взаимодействие расходуется энергия только 18-й моды, которая частично отдается невозбужденной в начальный момент 5-й моде и частично 17-й, которая своей начальной энергией с двумя другими не делится. Однако в ситуации, когда 18-я мода в начальный момент времени не возбуждена, а энергия начальной деформации распределена между

5-й и 17-й модами, 17-я мода, оказывающаяся старшей из возбужденных, полностью отдает свою энергию в резонансном обмене 18-й, не делаясь, однако с 5-й, которая отдает 18-й лишь часть своей энергии, как это видно из рис. 4, *b*.

Из рис. 1 видно, что резонансное взаимодействие мод осциллирующей слоя жидкости на поверхности твердого ядра (как вторичное комбинационное, обсуждаемое в данном разделе, так и вырожденное, как будет показано ниже) весьма чувствительно к отклонению величины зарядового параметра  $W$  от резонансного значения  $W_{\text{рез}}$  (т.е. к отклонению физических условий, при которых исследуется взаимодействие, от соответствующих положению точного резонанса). Это обстоятельство удивительно, так как аналогичные расчеты для заряженной капли [11,12] показали малую чувствительность к отклонениям  $W$  от  $W_{\text{рез}}$  для вырожденного резонанса 6-й и 4-й мод. При отклонении  $W$  от  $W_{\text{рез}}$  в сторону уменьшения соответствующие огибающие изменяются так же, как и при отклонении  $W$  в сторону увеличения, симметричным образом. Из рис. 1, *a*, 2 и 4 видно, что характерное время нахождения энергии в фиксированной моде  $\tau$  (характерное время обмена энергией) зависит от доли  $\Delta E$  полной энергии начальной деформации  $E$ , включенной в обмен между модами (от доли энергии начальной деформации, приходящейся на долю самой высокой 18-й моды), увеличиваясь с ростом  $\Delta E$ .

Из рис. 1 видно также, что доля энергии моды с максимальным номером, включаемой в резонансный обмен (18-й в рассматриваемом случае), быстро уменьшается с ростом отклонения  $\Delta W$  текущего значения зарядового параметра  $W$  от  $W_{\text{рез}}$ .

#### 4.3. Вырожденное резонансное взаимодействие мод осцилляций

Рассмотрим теперь случай вырожденного резонанса, т.е. когда для индексов взаимодействующих мод (см. (16) для знака „+“) выполняется равенство  $p = q$  (в нижеследующих рассуждениях эти индексы обозначим одной буквой  $h$ ), тогда выражение для параметра расстройки можно определить следующим образом:

$$2\omega_h = \omega_k(1 + \sigma\varepsilon),$$

а система дифференциальных уравнений для отыскания коэффициентов  $d_k^{(1)}(T_1)$ ,  $\beta_k^{(1)}(T_1)$ ,  $d_h^{(1)}(T_1)$ ,  $b_h^{(1)}(T_1)$  примет вид

$$4\omega_k d_k^{(1)}(T_1) \frac{\partial \beta_k^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} - \cos(\phi(T_1)) \Lambda_{hhk}^{(+)}(d_h^{(1)}(T_1))^2 = 4\omega_k^2 d_k^{(1)}(T_1) \sigma,$$

$$-4\omega_k \frac{\partial d_k^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} + \sin(\phi(T_1)) \Lambda_{hhk}^{(+)}(d_h^{(1)}(T_1))^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & 2\omega_h d_h^{(1)}(T_1) \frac{\partial \beta_k^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} \\
 & + \cos(\phi(T_1)) \Lambda_{khh}^{(-)} d_h^{(1)}(T_1) d_k^{(1)}(T_1) = 0, \\
 & -2\omega_h \frac{\partial d_h^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} - \sin(\phi(T_1)) \Lambda_{khh}^{(-)} d_h^{(1)}(T_1) d_k^{(1)}(T_1) = 0, \\
 & \phi(T_1) = \beta_k^{(1)}(T_1) + 2b_h^{(1)}(T_1).
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Амплитудные коэффициенты первого порядка малости для случая вырожденного резонанса будут иметь вид

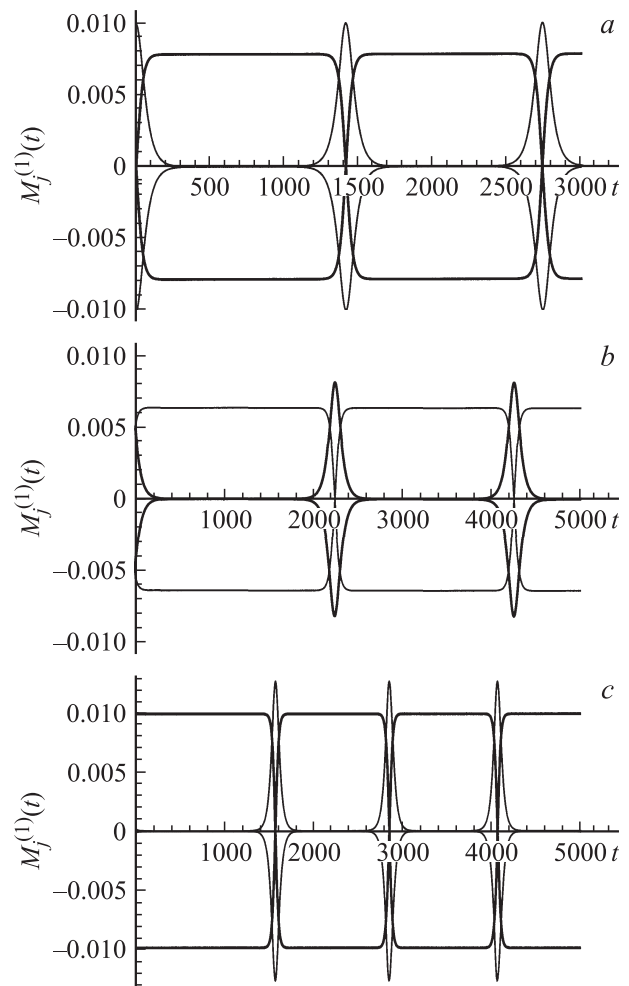
$$M_k^{(1)}(T_0, T_1) = 2d_k^{(1)}(T_1) \cos(2\omega_h T_0 - \beta_k^{(1)}(T_1)),$$

$$M_h^{(1)}(T_0, T_1) = 2d_h^{(1)}(T_1) \cos(\omega_h T_0 + b_h^{(1)}(T_1)).$$

Выражение для образующей формы свободной поверхности для случая вырожденного резонанса, когда начальный спектр состоит из двух резонансно-взаимодействующих мод  $\Xi = \{k, h\}$ , запишется в виде

$$\begin{aligned}
 \xi(\vartheta, t) = & \varepsilon \{ 2d_k^{(1)}(T_1) \cos(2\omega_h T_0 - \beta_k^{(1)}(T_1)) P_k(\mu) \\
 & + 2d_h^{(1)}(T_1) \cos(\omega_h T_0 + b_h^{(1)}(T_1)) P_h(\mu) \} \\
 & + \varepsilon^2 \left\{ - \sum_{j \in \Xi} \frac{1}{2j+1} (\xi_j \cos(\omega_j t))^2 \right. \\
 & - \sum_{j \in \Xi} \frac{9j}{(2j-1)(2j+1)} \cos(\omega_j t) \cos(\omega_{j-1} t) \xi_j \xi_{j-1} P_1(\mu) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} \xi_i \xi_j \left\{ \sum_{n \in \Xi} \{ \lambda_{ijn}^+ (\cos[(\omega_i + \omega_j)T_0] - \cos[\omega_n T_0]) \right. \\
 & + \lambda_{ijn}^- (\cos[(\omega_i - \omega_j)T_0] - \cos[\omega_n T_0]) \} P_n(\mu) \\
 & + \{ (1 - \delta_{ih} \delta_{jh}) \lambda_{ijk}^+ (\cos[(\omega_i + \omega_j)T_0] - \cos[2\omega_h T_0]) \} \\
 & + \lambda_{ijk}^- (\cos[(\omega_i - \omega_j)T_0] - 1) \} P_k(\mu) \\
 & + \{ \lambda_{ijh}^+ (\cos[(\omega_i + \omega_j)T_0] - \cos[\omega_h T_0]) + \\
 & + (1 - \delta_{ik} \delta_{jh}) (1 - \delta_{ih} \delta_{jk}) \lambda_{ijh}^- (\cos[(\omega_i - \omega_j)T_0] \\
 & \left. - \cos[\omega_h T_0]) \} P_h(\mu) \right\}.
 \end{aligned}$$

На рис. 5,а приведены огибающие быстро меняющихся во времени амплитуд первого порядка малости  $M_i^{(1)}(T_0, T_1)$ , когда реализуется вырожденное резонансное взаимодействие между модами осцилляций слоя идеальной жидкости на поверхности твердого сферического ядра с номерами  $k = 18, h = 12$ , рассчитанные по (18). Расчеты показывают, что рассматриваемое вырожденное резонансное взаимодействие, так же как и проанализированное выше вторичное комбинационное, весьма чувствительно к отклонению величины зарядового параметра  $W$  от резонансного значения  $W_{rez}$ , в противоречии с результатами [11,12], полученными для



**Рис. 5.** а — вырожденный резонанс  $k = 18, h = 12$ . Огибающие быстро меняющихся во времени амплитуд резонансно-взаимодействующих мод с номерами  $h = 12$  — тонкая линия,  $k = 18$  — жирная линия. Физические параметры:  $W = 3.335495, \varepsilon = 0.01, R_0 = 0.9$ , что соответствует точному резонансу, рассчитанному при начальных условиях  $d_{18}^{(1)}(0) = 0, d_{12}^{(1)}(0) = 1/2$ ; б — то же, что на рис. 5,а, но рассчитанное при начальных условиях  $d_{18}^{(1)}(0) = 8/32, d_{12}^{(1)}(0) = 8/32$ ; в — то же, что на рис. 5,а, но рассчитанное при начальных условиях  $d_{18}^{(1)}(0) = 0.49, d_{12}^{(1)}(0) = 10^{-2}$ .

капли без твердого ядра: интенсивность резонансного взаимодействия уменьшается примерно на порядок при  $(\Delta W/W_{rez}) \sim 0.07$ .

Ранее считалось (см. [13], с. 274, [14]), что в вырожденном резонансе энергия передается только от низких мод к высоким, а энергия, имеющаяся в высокой моде, в резонансный обмен не включается. Такой феномен наблюдается и в рассматриваемом случае осцилляций слоя идеальной жидкости на поверхности твердого сферического ядра, но лишь для некоторых из реализующихся вырожденных резонансов. Например, в вырожденном резонансе между 20-й и 13-й модами при  $R_0 = 0.9$  имеет место односторонняя перекачка энергии из низкой



моды в высокую и накопление ее там. В других же вырожденных резонансах, реализующихся при  $R_0 = 0.9$ : 12-8-8, 18-12-12, 28-18-18, отсутствие периодического обмена энергией имеет место только в ситуации, когда в начальный момент времени низкая мода совсем не возбуждена. Если же в начальный момент времени она имеет хоть незначительную энергию, а большая часть энергии начальной деформации сосредоточена в высокой моде, то в резонансный обмен включается вся энергия, имеющаяся в системе: вначале из низкой моды энергия перекачивается в высокую, а затем уже полная энергия системы возвращается в низкую моду и включается в периодический резонансный обмен. Это обстоятельство проиллюстрировано рис. 5.

Представляется целесообразным напомнить, что, согласно расчетам, подобным проведенным выше [11], одна мода может принимать участие в нескольких резонансных взаимодействиях одновременно, реализующихся с различными характерными временами обмена энергией. Это означает, что кроме очевидного перераспределения между модами поступающей в систему энергии (для градины, падающей в грозовом облаке, постоянным источником поступающей в систему энергии могут служить столкновения с мелкими облачными капельками [15,16]) возможно и быстрое ее накопление в одной из мод. Следствием этого будет рост амплитуды соответствующей моды и либо увеличение напряженности электрического поля у вершин стоячих волн, соответствующих данной моде, и зажигание коронного разряда у поверхности градины, либо отрыв потоком воздуха от вершин волн сильно заряженных капелек.

## Заключение

Во втором порядке малости по безразмерной амплитуде осцилляций получены численные решения для амплитудных коэффициентов первого порядка малости в выражении формы осциллирующей свободной поверхности слоя жидкости тающей градины. По результатам расчетов построены графики, иллюстрирующие механизм обмена энергией между модами. В зависимости от значения зарядового параметра перекачка энергии осуществляется либо полностью, когда соотношение частот соответствует точному резонансу, либо не полностью, когда значение зарядового параметра отлично от значения, соответствующего точному резонансу.

Работа выполнена при поддержке грантов Рособрнауки № РНП 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.

## Список литературы

- [1] Дорошенко Д.Н., Синкевич О.А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. № 3. С. 163–166.
- [2] Grigor'ev A.I., Munchiev M.I., Shiryayeva S.O. // J. Coll. Int. Sci. 1994. N 166. P. 267–274.
- [3] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 9. С. 8–13.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Крючков О.С. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 12. С. 1–9.
- [5] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2008. 535 с.
- [6] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 8. С. 22–31.
- [7] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 12. С. 9-20.
- [8] Григорьев А.И., Морозов В.В., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 10. С. 33–37.
- [9] Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
- [10] Tsatorpolous J.A., Brown R.A. // J. Fluid. Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
- [11] Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 2. С. 45–52.
- [12] Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 17. С. 28–35.
- [13] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
- [14] Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 2. С. 76–83.
- [15] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 11. С. 10–19.
- [16] Григорьев А.И., Корниенко Д.О., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 4. С. 47–51.