01;03

Модификация теории пограничного слоя для расчета осцилляций вязкой капли в однородном электростатическом поле

© А.И. Григорьев, А.Р. Паранин, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Россия, Ярославль
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 17 июня 2011 г.)

Проведен аналитический расчет капиллярных осцилляций свободной поверхности капли вязкой электропроводной жидкости в электростатическом поле, в котором капля в линейном по стационарной деформации приближении имеет равновесную форму вытянутого по полю сфероида. Исходная задача в линейном по амплитуде осцилляций и квадратичном по эксцентриситету капли приближении модифицирована и упрощена в рамках представлений теории пограничного слоя с последовательной оценкой относительной погрешности замены точного решения приближенным. Показано, что с ростом напряженности электростатического поля (с ростом эксцентриситета капли) и вязкости жидкости толщина пограничного слоя у свободной поверхности капли увеличивается.

Введение

В последние несколько лет выполнен цикл работ, посвященных равзитию теории пограничного слоя, связанного с плоской, цилиндрической или сферической заряженной свободной поверхностью электропроводной несжимаемой жидкости, совершающей периодические движения [1–7]. Во всех рассмотренных ситуациях форма равновесной поверхности жидкости не изменялась при варьировании внешних условий. В то же время имеется целый класс задач о расчете осцилляций конечных объемов вязкой жидкости, равновесная форма которых изменяется при изменении внешнего силового воздействия. Речь идет о задачах расчета осцилляций капель во внешних силовых полях: электростатических [8–10], магнитостатических [11–12], инерционных [13,14]. Хорошо известно, что капля во внешнем однородном электростатическом поле принимает форму, близкую к вытянутому по полю сфероиду [15,16]. Естественно встает вопрос о возможности расчета капиллярных осцилляций сфероидальной капли вязкой жидкости с использованием представлений пограничного слоя. В более общем случае представляет интерес проблема расчета в рамках теории пограничного слоя осцилляций капли с произвольной, отличной от сферической, равновесной формой. Например, воздействием интенсивного акустического или магнитного полей в акустическом или магнитном подвесах капле могут быть приданы равновесные формы, далекие от сферической [12]. В этой связи представляется целесообразным проанализировать вопрос о тенденциях изменения пограничного слоя у поверхности осциллирующей капли при изменении ее равновесной формы.

Формулировка задачи и ее решение

Пусть сферическая капля радиуса R вязкой несжимаемой электропроводной жидкости с массовой плотностью ρ, коэффициентом кинематической вязкости ν и коэффициентом поверхностного натяжения σ помещена в однородное электростатическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0$. Равновесная форма такой капли в линейном по стационарной деформации приближении имеет равновесную форму вытянутого по полю сфероида с эксцентриситетом $e \equiv \sqrt{9E_0^2R/16\pi\sigma}$ [15,16]. Примем, что капля совершает осцилляции в окрестности равновесной сфероидальной формы вследствие создания в начальный момент времени виртуальной осесимметричной деформации $\xi = \xi(\vartheta, t)$ так, что ее форма в произвольный момент времени определится соотношением

$$F(r, \vartheta, t) = r - r(\vartheta) - \xi(\vartheta, t) = 0, \qquad \left|\frac{|\max \xi(\vartheta, t)|}{R}\right| \ll 1,$$

где $r = r(\vartheta)$ — равновесная форма капли в сферических координатах.

Нижеследующий анализ проведем в рамках теории возмущений путем разложения по малым независимым параметрам e^2 и ξ с точностью до членов, имеющих порядок малости $\propto e^2$, ξ и $e^2\xi$, т. е. в приближении по каждому из них (в квадратичном приближении при $\xi \propto e^2$). Соотношение между параметрами e^2 и ξ нуждается в отдельном комментарии. Если считать $\xi \ll e^2$, как это было сделано в [8,17,18], то необходимо было бы учитывать и слагаемые $e^4\xi$, $e^6\xi$ и т. д., но как показано в [19–20], это привело бы к резкому увеличению громоздкости проводимых расчетов без получения качественно новой физики. Поэтому в нижеследующем изложении будем полагать $\xi \propto e^2$, как это было принято в нелинейном исследовании [10]. Зависимости поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, поля давлений $P^{\mathrm{in}}(U, t)$ внутри жидкости и возмущения $\xi(\vartheta, t)$ от времени будем принимать экспоненциальными: $\propto \exp(St)$. В расчетах будем использовать безразмерные переменные, в которых $R = \rho = \sigma = 1$. Уравнение сфероида, вытянутого вдоль поля, если полярный угол отсчитывать от $\mathbf{E}_0$, имеет вид

$$r(\vartheta) \equiv \frac{(1-e^2)^{1/6}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\vartheta}} \approx 1 + e^2\frac{1}{3}P_2(\eta), \quad \eta \equiv \cos\vartheta,$$

где $P_2(\eta)$ — полином Лежандра.

Будем исследовать движение вязкой жидкости в капле, вызванное начальным возмущением формы ее равновесной поверхности $\xi(\vartheta, t)$ и поэтому характеризуемое полем скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, имеющим в безразмерных переменных тот же порядок малости, что и $\max|\xi(\vartheta, t)|$. Математическая формулировка задачи расчета линейных осцилляций вязкой капли в электростатическом поле имеет вид

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla P^{\mathrm{in}} - \nu\Delta\mathbf{U} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{U} = 0, \quad \Delta\Phi = 0, \quad (1)$$

$$r = r(\vartheta) + \xi: \ \frac{dF}{dt} = 0, \ \mathbf{n}(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\cdot\mathbf{U} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}\cdot\nabla)\cdot\mathbf{U} = 0,$$

$$-P^{\mathrm{in}}(\mathbf{U}, t) + 2\nu\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla)\cdot\mathbf{U} + P^{\mathrm{ex}} - P_E + P_\sigma = 0,$$

$$r \to 0: \quad \mathbf{U} = 0, \qquad r \to \infty: \quad -\nabla\Phi \to E_0\mathbf{e}_z,$$

$$t = 0: \quad \xi(\vartheta) \equiv Z_j P_j(\eta), \quad \partial_t\xi(\vartheta) = 0, \quad \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

В выписанных выражениях $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы касательной и нормали к свободной поверхности жидкости, $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = U_r(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_r + U_\vartheta(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_\vartheta$ — поле скоростей течения жидкости в капле, связанного с осцилляциями ее свободной поверхности, $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\vartheta$ — орты сферической системы координат, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал электростатического поля, P^{ex}, $P_E = E_0^2/8\pi$ и $P_\sigma = \mathrm{div}\,\mathbf{n}$ — внешнее давление, давления электрического поля и сил поверхностного натяжения соответственно, Z_j — амплитуда j-й моды колебаний, возбужденной в начальный момент времени.

Сформулированная задача дополняется естественными условиями сохранения объема жидкого слоя и неподвижности его центра масс при осцилляциях

$$\int_V r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{4}{3}\pi, \qquad \int_V \mathbf{r} r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = 0.$$

Здесь интегрирование выполняется по всему объему капли.

Решение сформулированной задачи и может быть найдено методом скаляризации [21] и записано в виде [13]

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n^{(1)}(t) r^n P_n(\eta),$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n^{(3)}(t) i_n(xr) P_n(\eta), \quad (2)$$

где $x \equiv \sqrt{s/\nu}$, s — комплексная частота, $i_n(xr)$ — модифицированная сферическая функция Бесселя первого рода [22], а коэффициенты разложения $C_n^{(1)}$, $C_n^{(3)}$ приведены в Приложении А, скалярные функции $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$ связаны с компонентами поля скоростей течения жидкости соотношениями [21]

$$U_r(\mathbf{r}, t) = \partial_r\varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{r}\Delta_\Omega\psi(\mathbf{r}, t),$$

$$U_\vartheta(\mathbf{r}, t) = \partial_\vartheta\left(\frac{\varphi(\mathbf{r}, t)}{r}\right) + \partial_\vartheta\left[\frac{1}{r}\partial_r\left(r\psi(\mathbf{r}, t)\right)\right],$$

$$\Delta_\Omega \equiv \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right).$$

Аналитическое выражение для ротора поля скоростей, характеризующего вихревую компоненту течения жидкости в капле, через скалярные функции $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$ имеет вид

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \mathrm{rot}\mathbf{U} \equiv \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)\right]\right\}\mathbf{e}_\varphi.$$

Видно, что вихревое течение, порождаемое осцилляциями свободной поверхности, описывается только функцией $\psi(\mathbf{r}, t)$, радиальная зависимость которой определяется быстро убывающей с уменьшением аргумента функцией $i_n(xr)$. Поэтому интенсивность вихревого течения затухает по мере удаления от свободной поверхности гораздо быстрее, чем потенциальная часть решения, являющаяся, согласно (2), лишь степенной функцией r. На рис. 1 приведен график зависимости модуля ротора поля скоростей от радиальной переменной, из которого видно, что вихревая компонента течения сосредоточена в приповерхностном слое. Этот факт дает основание говорить о разделении полного поля скоростей течения жидкости на две компоненты: потенциальную, охватывающую весь объем капли, и приповерхностную вихревую, быстро затухающую с глубиной, как показано на рис. 1. Сказанное позволяет сформулировать модельную задачу, в которой принимается искусственно, что вихревая компонента полностью

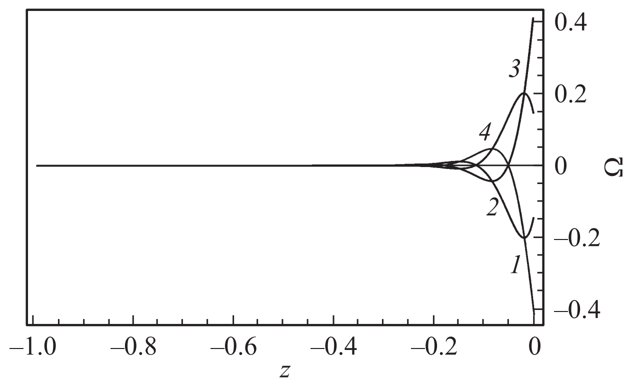

Рис. 1. Распределение модуля ротора поля скоростей вдоль радиальной переменной $r = r(\theta)(z+1)$, $-1 \le z \le 0$ для разных моментов времени t. *1* — 0.025, *2* — 0.5, *3* — 0.75, *4* — $t = T$. Графики построены при значениях параметров: $n = 2$, $e^2 = 0.27$, $W = 0.06 \approx 0.3W_{\mathrm{cr}}$, $\vartheta = \pi/4$, $\nu = 0.002$, $Z_2 = 0.1$.

затухает в приповерхностном слое толщиной δ и представляющую собой (согласно идеалогии, изложенной в [1]) промежуточный этап перед введением упрощений теории пограничного слоя.

Формулировка и решение модельной задачи

На основании представленной о погранслойном строении реального течения маловязкой жидкости в приповерхностном ее слое [1–7,23] сформулируем модельную задачу, которой будем аппроксимировать точное решение задачи, как это делалось в работах [1–7]. Для этого, согласно сказанному выше, будем исходить из предположения, что потенциальное течение охватывает весь объем капли и обращается в нуль в центре капли, а вихревая часть течения сосредоточена только в пограничном приповерхностном слое (в пограничном слое) толщиной δ, и ротор скорости течения Ω обращается в нуль на нижней границе этого слоя

$$r \to 0: \qquad U_r^{(p)} \to 0, \quad U_\vartheta^{(p)} \to 0,$$

$$r = r(\vartheta) - \delta: \qquad \Omega = 0,$$

или в терминах функций $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$

$$r \to 0: \qquad \partial_r \varphi(\mathbf{r}, t) \to 0, \quad \partial_\vartheta \left(\frac{\varphi(\mathbf{r}, t)}{r}\right) \to 0,$$

$$r = r(\vartheta) - \delta: \qquad \partial_\vartheta \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{3}$$

Остальные граничные условия, а также решаемые уравнения для отыскания функций $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$ и $P(\mathbf{r}, t)$ оставим прежними. В итоге математическая формулировка модельной задачи, выписанная в линейном по малой амплитуде осцилляций и квадрату эксцентриситета приближении, в терминах функций $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$ [13] имеет вид

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta\psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0,$$

$$p^{\text{in}}(\mathbf{U}, t) = -\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

с условиями (3) и граничными условиями на невозмущенной свободной поверхности жидкости:

— кинематическим

$$s\xi - \left[\partial_r\varphi - \Delta_\Omega\left(\frac{\psi}{r}\right)\right]\Big|_{r=1+e^2h(\vartheta)} - e^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\partial_\vartheta\left[\frac{\varphi}{r} + \frac{1}{r}\,\partial_r(r\psi)\right]\Big|_{r=1} = 0,$$

— касательной проекцией динамического граничного условия

$$\Delta_\Omega\left[2\partial_r\left(\frac{\varphi}{r}\right) + \partial_{r,r}\psi - (2+\Delta_\Omega)\frac{\psi}{r^2}\right]\Big|_{r=1+e^2h(\vartheta)}$$
$$- 2e^2\Big\{(3\cos^2\vartheta - 1)\left[\partial_{r,r}\varphi - \frac{1}{r}\,\partial_r\varphi\right]$$
$$- (2\cos^2\vartheta - 1)\Delta_\Omega\left(\frac{\varphi}{r^2}\right) - (5\cos^2\vartheta - 2)\Delta_\Omega\left(\frac{1}{r}\,\partial_r\varphi\right)$$
$$+ (4\cos^2\vartheta - 1)\Delta_\Omega\left(\frac{\varphi}{r^2}\right) + \sin\vartheta\cos\vartheta\,\partial_\vartheta\Big[\partial_{r,r}\varphi - \frac{1}{r}\,\partial_r\varphi$$
$$- (2+\Delta_\Omega)\left(\frac{\varphi}{r^2}\right) - 2(1+\Delta_\Omega)\left(\frac{1}{r}\,\partial_r\psi\right)$$
$$- (2-\Delta_\Omega)\left(\frac{\varphi}{r^2}\right)\Big]\Big\}\Big|_{r=1} = 0,$$

— и его нормальной проекцией

$$s\varphi\big|_{r=1+e^2h(\vartheta)} + 2\nu\Big\{\left[\partial_{r,r}\varphi - \Delta_\Omega\left(\partial_r\left(\frac{\psi}{r}\right)\right)\right]\Big|_{r=1+e^2h(\vartheta)}$$
$$+ e^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\partial_\vartheta\Big[\frac{2}{r}\,\partial_r\varphi - \frac{\varphi}{r^2} + \partial_{r,r}\psi + \partial_r\left(\frac{\psi}{r}\right)$$
$$- \Delta_\Omega\left(\frac{\psi}{r^2}\right)\Big]\Big|_{r=1}\Big\} - p_E(\xi)\big|_{r=1+e^2h(\vartheta)}$$
$$+ p_\sigma(\xi)\big|_{r=1+e^2h(\vartheta)} = 0. \tag{4}$$

Начальные условия останутся неизменными. В (4) $p^{\text{in}}(\mathbf{U}, t)$ — добавка к давлению внутри жидкости, порождаемая движениями жидкости, имеющая первый порядок малости по $\mathbf{U}$ (т.е. по ξ), $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал электростатического поля (в расчетах первого порядка малости полагается, что $\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv \Phi_0 + \phi(\mathbf{r}, t)$, где Φ_0 — потенциал электрического поля вблизи невозмущенной сфероидальной поверхности, $\phi(\mathbf{r}, t)$ — поправка к Φ_0 первого порядка малости по ξ), $p_E(\xi)$ и $p_\sigma(\xi)$ — добавки к давлению электрического поля и давлению сил поверхностного натяжения, имеющие первый порядок малости по ξ.

Уравнения для потенциальной составляющей течения будем решать во всей области $0 \le r \le r(\vartheta)$, а для погранслойной вихревой составляющей только в узком приповерхностном слое: $\mu \le r \le r(\vartheta)$, где $\mu \equiv r(\vartheta) - \delta$. Толщину пограничного слоя δ будем считать пропорциональной $\sqrt{2\nu/\omega}$, определенной с точностью до постоянного множителя G и малой по сравнению с радиусом капли $\delta \equiv G\sqrt{2\nu/\omega} \ll 1$. В этом выражении ω — вещественная часть комплексной частоты s, радикал $\sqrt{2\nu/\omega}$ определяет расстояние от поверхности, на котором интенсивность вихревого движения убывает в ~ 2.7 раза.

Решение модельной задачи ищется в следующем виде:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(1)}(t)r^{(n)}P_n(\eta),$$

$$\phi(\mathbf{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(t)r^{-(n+1)}P_n(\eta), \qquad (5)$$

$$\psi(\mathbf{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n^{(3)}(t)i_n(xr)+C_n^2(t)k_n(xr)\right]P_n(\eta)$$

$$\xi(\vartheta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}M_n(t)P_n(\eta),$$

где функции времени $C_n^{(j)}$, Φ_n, M_n являются коэффициентами разложений, $k_n(xr)$ — модифицированные сферические функции Бесселя третьего рода.

Подставляя решения (5) в систему скаляризованных граничных условий (4), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $M_n(t)$, $C_n^{(1)}(t)$, $C_n^{(2)}(t)$, $C_n^{(3)}(t)$, $\Phi(t)$, из которой можно выразить коэффициенты $C_n^{(1)}(t)$, $C_n^{(2)}(t)$, $C_n^{(3)}(t)$, $\Phi(t)$ через амплитуды осцилляций $M_n(t)$ (аналитические выражения для коэффициентов приведены в Приложении B). В итоге придем к бесконечной системе связанных дифференциальных уравнений относительно амплитуд осцилляций свободной поверхности M_n:

$$\begin{aligned}&M_n''(t)+\nu M_n'(t)\left(\varepsilon_n^{(0)}+e^2\varepsilon_n^{(2)}\right)+M_n\left(\tau_n^{(0)}+e^2\tau_n^{(2)}\right)\\&+e^2M_{n-2}''(t)\gamma_{n-2}+\nu e^2M_{n-2}'(t)\varepsilon_{n-2}+e^2M_{n-2}\tau_{n-2}\\&+e^2M_{n+2}''(t)\gamma_{n+2}+\nu e^2M_{n+2}'(t)\varepsilon_{n+2}+e^2M_{n+2}\tau_{n+2}=0,\end{aligned} \qquad (6)$$

где коэффициенты ε_n, γ_n, τ_n приведены в Приложении C.

Решение системы (6), удовлетворяющее начальным условиям задачи, ищется с помощью метода последовательных приближений по e^2. В первом порядке малости получается

$$\begin{aligned}M_n(t)=Z_j=\Bigg\{&\exp\left(ib_n^{(0)}\right)\Bigg(a_n^{(0)}\delta_{nj}+\frac{1}{a_n^{(0)}}e^2\Big[q_{n-2}^{(1)}\delta_{(n-2)j}\\&+q_n^{(2)}\delta_{nj}+q_{n+2}^{(1)}\delta_{(n+2)j}\Big]\Bigg)\exp\left[\left(s_n^{(0)}+e^2s_n^{(1)}\right)t\right]\\&-e^2\alpha_{n-2}a_{n-2}^{(0)}\exp\left(ib_{n-2}^{(0)}\right)\exp\left(s_{n-2}^{(0)}t\right)\delta_{(n-2)j}\\&-e^2\alpha_{n+2}a_{n+2}^{(0)}\exp\left(ib_{n+2}^{(0)}\right)\exp\left(s_{n+2}^{(0)}t\right)\delta_{(n+2)j}\Bigg\},\end{aligned} \qquad (7)$$

$$s_n^{(o)}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_n^{(0)}+\sqrt{\left(\varepsilon_n^{(0)}\right)^2-4\tau_n^{(0)}}\right),$$

где δ_{nj} — символ Кронекера, $s_n^{(0)}$ и $s_n^{(1)}$ — составляющие решения $s_n\equiv s_n^{(0)}+e^2s_n^{(1)}$ дисперсионного уравнения, которое несложно получить из системы (6), полагая $M_n(t)\sim A_n\exp(st)$ и приравнивая коэффициент при комплексной амплитуде A_n к нулю. При этом $s_n^{(0)}$ является решением этого дисперсионного уравнения в нулевом по e^2 порядке малости, $s_n^{(1)}$ — поправка к решению $s_n^{(0)}$, пропорциональная e^2. Выражения для коэффициентов $a_n^{(0)}$, $b_n^{(0)}$, $s_n^{(0)}$, a_n, b_n, s_n, $\alpha_{n\pm2}$ приведены в Приложении D.

В пределе малой вязкости $\nu\ll1$ и $\delta\to r(\vartheta)$, означающем, что вихревое движение заполняет весь объем капли, полученное из системы (6) дисперсионное уравнение полностью совпадает с дисперсионным уравнением точной задачи. (Оба дисперсионных уравнения в первом порядке малости по e^2 в пределе малой вязкости приведены в Приложении E).

Упрощение модельной задачи в рамках теории пограничного слоя и ее решение

Математическая формулировка модельной задачи в пределе малой вязкости может быть упрощена с помощью построений, аналогичных тем, что используется в традиционной теории пограничных слоев, связанных с наличием свободной поверхности или твердой стенки [1–7,23].

Выделим наиболее существенные свойства точного решения задачи вблизи свободной поверхности. Течение состоит из главной (потенциальной) и добавочной погранслойной (вихревой) частей $U(\mathbf{r},t)=U^{(p)}(\mathbf{r},t)+U^{(e)}(\mathbf{r},t)$, где $U^{(p)}(\mathbf{r},t)$ — потенциальная часть поля скоростей, а $U^{(e)}(\mathbf{r},t)$ — вихревая. Для основной части движения характерный линейный масштаб l, на котором изменяются компоненты скорости, определяется по порядку величины перпендикулярно свободной поверхности и вдоль нее радиусом капли $l\approx R$ и $l\approx\pi R$ соответственно. Для вихревой части течения характерный линейный масштаб, на котором изменяются компоненты скорости в направлении, перпендикулярном пограничному слою, равен толщине слоя $l=\delta$, а в продольном направлении определяется радиусом капли $l\approx\pi R$.

На основании вышеизложенного введем правила оценки производных от искомых величин по пространственным координатам. Для производных от потенциальной части течения $U^{(p)}(\mathbf{r},t)$ будем пользоваться следующим формальным правилом построения оценки: операторы дифференцирования ∂_r и $\frac{1}{r}\partial_\vartheta$ переходят в оператор умножения на $1/R$ и $1/\pi R$ соответственно. Для вихревой части $U^{(e)}(\mathbf{r},t)$, определенной в пограничном слое, правило оценки производных другое — оператор дифференцирования ∂_r переходит в оператор умножения на $1/\delta$, а оператор $1/r\partial_\vartheta$ в оператор умножения на $1/\pi R$.

Воспользуемся малостью значений толщины приповерхностного пограничного слоя δ по сравнению с радиусом капли и в суммах вида $A+B$, будем пренебрегать слагаемым B, если $B/A\propto O\left(\delta^2/(\pi R)^2\right)$.

Пусть V — характерное значение скорости потенциального течения, т.е. $U_r^{(p)}(\mathbf{r},t)\propto U_\vartheta^{(p)}(\mathbf{r},t)\propto V$. Тогда из уравнения неразрывности несложно получить следующую оценку: $U_r^{(e)}/U_\vartheta^{(e)} \propto \delta/\pi R$, а из проекции динамического граничного условия на касательное к свободной поверхности направления следует

$$U_\vartheta^{(e)} \propto \left(\frac{V}{\pi R}\right)\delta, \quad U_r^{(e)} \propto V\left(\frac{\delta}{\pi R}\right)^2.$$

Учитывая все приведенные выше оценки, модифицируем математическую формулировку модельной задачи к упрощенному виду, в котором граничные условия принимают следующий вид:

$$r = r(\vartheta): \qquad \partial_t \xi = U_r - e^2 U_\vartheta \frac{1}{3}\partial_\vartheta P_2(\eta),$$

$$\left\{2\partial_r U_\vartheta^{(p)} + r\partial_r\left(\frac{1}{r}U_\theta^{(e)}\right) + e^2 2\sin\vartheta\cos\vartheta\left[\frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r}\partial_\vartheta U_\vartheta - \partial_r U_r^{(p)}\right]\right\}\Big|_{r=r(\vartheta)} = 0,$$

$$\left\{-p^{\text{in}}(\mathbf{U}, t) + 2\nu\left[\partial_r U_r^{(p)} + e^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\partial_r U_\vartheta + \frac{1}{r}\partial_\vartheta U_r^{(p)} - \frac{U_\vartheta}{r}\right)\right] - p_E(\xi) + p_\sigma(\xi)\right\}\Big|_{r=r(\vartheta)} = 0,$$

$$r = r(\vartheta) - \delta: \qquad \Omega = 0, \tag{8}$$

а остальные уравнения гидродинамики остаются без изменений. Решение этой задачи будет иметь вид (5), но с другими коэффициентами $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $C_n^{(3)}$, приведенными в Приложении F. Рассуждая, как и при решении модельной задачи, и подставляя эти решения, выраженные через амплитуду осцилляций $M_n(t)$, в динамическое граничное условие (8), получим бесконечную систему связанных дифференциальных уравнений относительно амплитуды отклонения свободной поверхности $M_n(t)$ для модельной упрощенной задачи:

$$M_n''(t) + \nu M_n'(t)\left(\varepsilon_n^{(0)} + e^2\varepsilon_n^{(2)}\right) + M_n\left(\tau_n^{(0)} + e^2\tau_n^{(2)}\right) + e^2 M_{n-2}''(t)\gamma_{n-2} + \nu e^2 M_{n-2}'(t)\varepsilon_{n-2} + e^2 M_{n-2}\tau_{n-2} + e^2 M_{n+2}''(t)\gamma_{n+2} + \nu e^2 M_{n+2}'(t)\varepsilon_{n+2} + e^2 M_{n+2}\tau_{n+2} = 0, \tag{9}$$

где коэффициенты ε_n, γ_n, τ_n приведены в Приложении G.

Решение системы (9), удовлетворяющее начальным условиям (2), имеет качественный вид, совпадающий с (7), но с иными коэффициентами, приведенными в Приложении D.

Анализ полученных соотношений

На рис. 2 и 3 приведены зависимости радиальной U_r и угловой U_θ компонент поля скоростей течения жидкости, рассчитанные при различных значениях множителя G, от расстояния до свободной поверхности (в пределах толщины пограничного слоя), учитываемого через переменную z, вводимую соотношениями $z = (r-1)/\delta$. При изменении координаты r в диапазоне $1-\delta \le r \le 1$ переменная z изменяется в пределах $-1 \le z \le 0$. Значение $z = 0$ соответствует свободной поверхности капли, а $z = -1$ нижней границе пограничного слоя, образующегося вблизи свободной поверхности. Несложно видеть, что при $G = 5$ совпадение точного и приближенного модельных решений для обеих компонент поля скоростей весьма хорошее (абсолютная погрешность находится в пределах толщины линий).

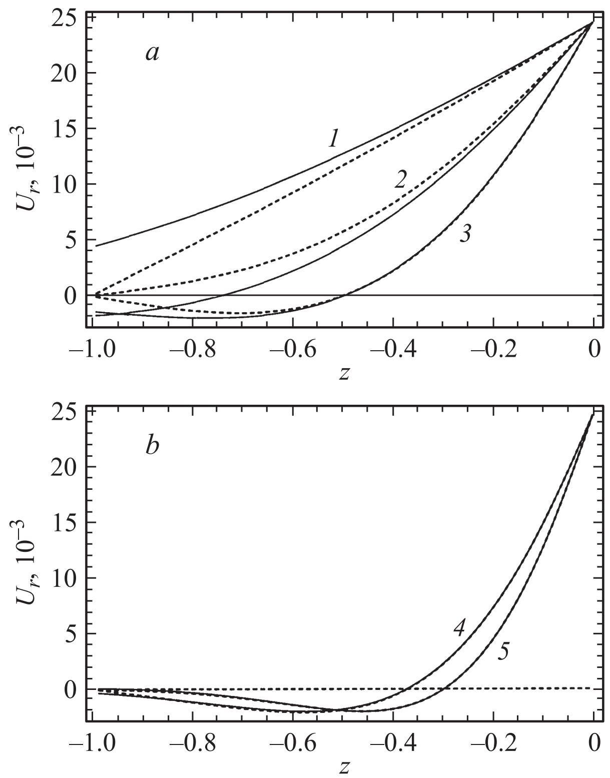

Рис. 2. Зависимости радиальной компоненты поля скоростей U_r от расстояния до свободной поверхности в пределах пограничного слоя, рассчитанные для различных значений коэффициентов приближения G и построенные при $t = 0.5T$, $n = 2$, $e^2 = 0.3$, $W = 0.066$, $\vartheta = \pi/4$, $\nu = 0.002$, $Z_2 = 0.1$. Номер пары кривых соответствует значению коэффициента G. Сплошная линия соответствует точному решению, штриховая — решению в теории пограничного слоя.

На рис. 4 приведены аналогичные зависимости для распределения модуля ротора поля скоростей Ω вдоль пограничного слоя, из которых также следует, что оптимальным, дающим наилучшее совпадение результатов расчетов обеих задач, является значение параметра $G = 5$.

Увеличение напряженности внешнего электрического поля, приводя к увеличению эксцентриситета сфероидальной формы капли, влияет на интенсивность вихревого движения жидкости. Согласно расчетам, представленным на рис. 5, с ростом e^2 абсолютное значение ротора Ω уменьшается, однако одновременно увеличивается глубина проникновения вихревого движения в толщу жидкости. Это иллюстрирует рис. 6, на котором изображена зависимость толщины пограничного слоя δ от квадрата эксцентриситета e^2. Величина δ связана с e^2 через частоту капиллярных осцилляций поверхности ω, которая является решением соответствующего дисперсионного уравнения. Согласно рис. 6, даже при сильной деформации равновесной формы капли ($e^2 \approx 0.65$) погранслойный характер движения сохраняется, так как толщина пограничного слоя составляет сотые доли радиуса капли.

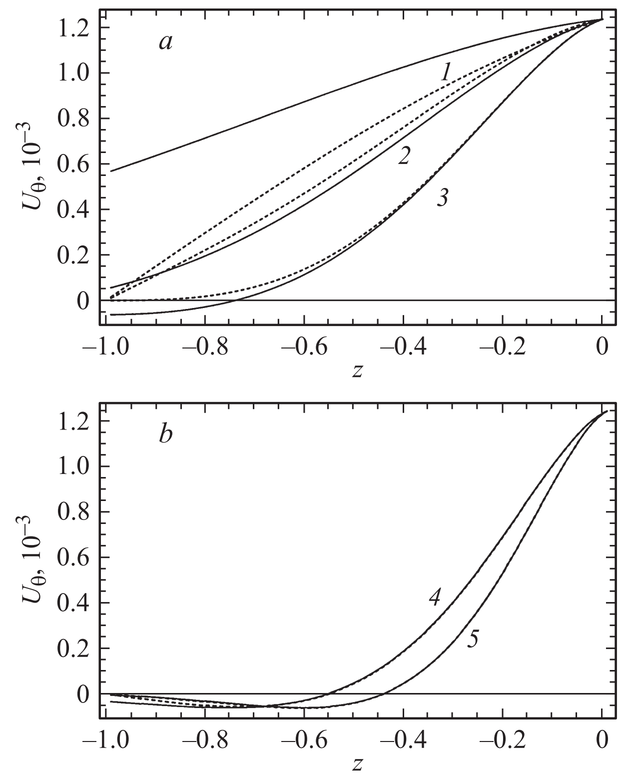

Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для угловой компоненты поля скоростей U_ϑ.

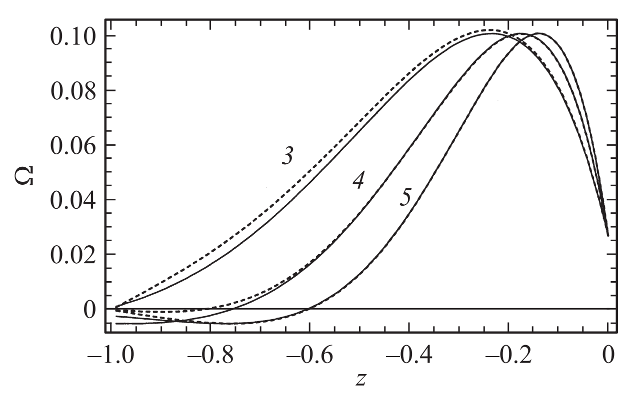

Рис. 4. Распределение вдоль пограничного слоя модуля ротора поля скоростей Ω, рассчитанное при $t = T$, $n = 2$, $e = 0.3$, $W = 0.066$, $\vartheta = \pi/4$, $\nu = 0.002$, $Z_2 = 0.1$ для различных значений коэффициента приближения G. Номер пары кривых соответствует значению коэффициента G. Сплошная линия — решение точной задачи, штриховая — модельной упрощенной.

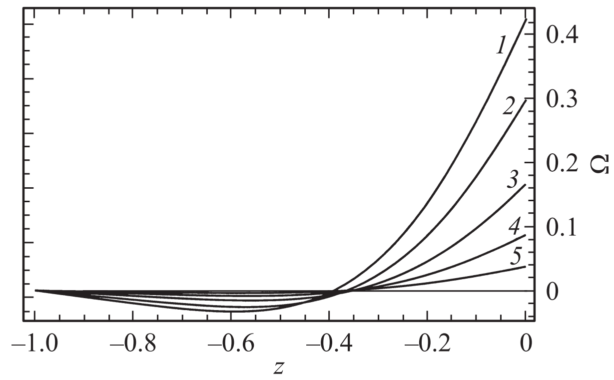

Рис. 5. Распределение вдоль пограничного слоя модуля ротора поля скоростей Ω, рассчитанное при $t = 0.75T$, $n = 2$, $G = 5$, $\vartheta = \pi/4$, $\nu = 0.002$, $Z_2 = 0.1$ для различных значений квадрата эксцентриситета e^2. *1* — 0, *2* — 0.3, *3* — 0.5, *4* — 0.6, *5* — 0.63.

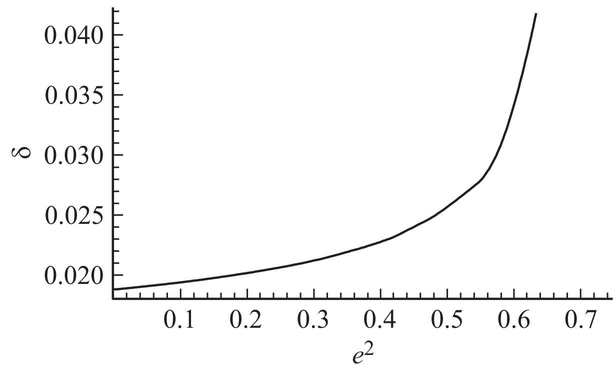

Рис. 6. График зависимости толщины пограничного слоя δ от значения параметра e^2, построенный при $\nu = 0.002$.

Значительно большее влияние на величину δ оказывает вязкость жидкости. Поскольку $\delta \propto \sqrt{\nu}$, то рост безразмерной вязкости приводит к тому, что вихревое движение охватывает весь объем капли. Такая ситуация характерна либо для капель сильновязких жидкостей, либо для мелких капель.

Заключение

В результате аналитического расчета капиллярных осцилляций свободной поверхности капли вязкой электропроводной жидкости в электростатическом поле показано, что в широком диапазоне значений физических параметров движение жидкости в капле имеет погранслойный характер. Толщина пограничного слоя примерно в 5 раз превышает оценочную величину, соответствующую формуле Лонгетта–Хиггинса $\delta_L \propto \sqrt{2\nu/\omega}$. Увеличение напряженности внешнего электростатического поля (увеличение эксцентриситета капли), уменьшая абсолютную величину интенсивности вихревого движения, одновременно увеличивает толщину пограничного слоя.

Приложение A. Аналитические выражения для коэффициентов $C_n^{(1)}(t)$, $C_n^{(3)}$ точной задачи

$$C_n^{(1)}(t) \equiv c_{n-2}e^2M'_{n-2}(t) + \left(c_n^{(2)}e^2 + c_n^{(0)}e^0\right)M'_n(t)$$

$$+ c_{n+2}e^2M'_{n+2}(t),$$

$$c_{n-2} \equiv \frac{(1-n)}{2(n-2)(3-8n+4n^2)x^2[x-2\tau_{n-2}(x)][x-2\tau_n(x)]}$$

$$\times \Big[2x\tau_{n-2}(x)\big(44n^3 - 10n^4 + n^2(x^2-34) - 8(x^2-5)$$

$$- n(48+x^2) + 2(8-2n-3n^2+n^3)x\tau_n(x)\big)$$

$$+ (n-2)\big(48 - 46x^2 - x^4 + 6n^2(-8+x^2) + 2n^3(8+x^2)$$

$$+ n(-16-10x^2+x^4) - 2x\left[-24 - x^2 + n(8+x^2)\right]\tau_n(x)\big)\Big],$$

$$\tau_n(x) \equiv i_{n+1}(x)/i_n(x),$$

$$c_n^{(2)} \equiv \frac{-(n+1)}{3n(4n+4n^2-3)x^2 \times \left[x - 2\tau_n(x)\right]^2}$$

$$\times \left[n^4x^2 - 2n^3(12+x^2) + n^2(24 - 32x^2 + x^4)\right.$$

$$- 3(8 - 12x^2 + x^4) - n(16x^2 + x^4 - 24)$$

$$+ 2x\big(34n^3 + 2n^4 - 2n^2(x^2-11) + 3(x^2-4)$$

$$\left.+ n(-34+5x^2)\big)\tau_n(x) + 4n(n+n^2-5)x^2\tau_n(x)^2\right],$$

$$c_n^{(0)} \equiv \frac{2n^2 + x^2 - 2x\tau_n(x) - 2}{nx[x - 2\tau_n(x)]},$$

$$c_{n+2} \equiv \frac{-(n+1)}{2n(15+16n+4n^2)x^2[x-2\tau_n(x)][x-2\tau_{n+2}(x)]}$$

$$\times [48 + 64n - 32n^2 - 64n^3 - 16n^4 + 2\big(3n^2 + 5n^3$$

$$+ n^4 - 8 - 11n\big)x^2 + \big(n + n^2 - 4\big)x^4 - 2x\big(8 + 16n^3 + 2n^4$$

$$- 4x^2 + 3n(8+x^2) + n^2(34+3x^2)\big)\tau_{n+2}(x) + 2x\tau_n(x)$$

$$\times \big(n(32-x^2) - n^2(-8+x^2) + 4(6+x^2)$$

$$+ 2(-4 + 4n + 5n^2 + n^3)x\tau_{n+2}(x)\big)\big],$$

$$C_n^{(3)}(t) \equiv \left[d_{n\pm2}e^2M'_{n\pm2}(t) + \left(d_n^{(2)}e^2 + d_n^{(0)}e^0\right)M'_n(t)\right]/i_n(x),$$

$$d_n^{(0)} \equiv \frac{2-2n}{nx[x-2\tau_n(x)]},$$

$$d_{n-2} \equiv \frac{(n-1)}{(19n - 16n^2 + 4n^3 - 6)x^2[x - 2\tau_{n-2}][x - 2\tau_n(x)]}$$

$$\times \left[(n-2)\big(24 - 11x^2 + 2n(-16+x^2) + n^2(8+x^2)\big)\right.$$

$$\left.+ x\big(40 - 10n^3 + n^2(54+x^2) - n(88+3x^2)\big)\tau_{n-2}(x)\right],$$

$$d_n^{(1)} \equiv \frac{2(n-1)}{3(3-7n+4n^3)x^2[x-2\tau_n(x)]^2n}$$

$$\times \left[(1+n)\big(n^3x^2 + n(24-14x^2) + 12(x^2-1)\right.$$

$$- 2n^2(6+x^2)\big) + nx\big(-46 + 22n + 2n^3 - x^2$$

$$\left.+ n^2(34+x^2)\big)\tau_n(x)\right],$$

$$d_{n+2} \equiv \frac{1-n}{(12n^2 + 4n^3 - 15 - n)nx^2[x - 2\tau_n(x)][x - 2\tau_{n+2}(x)]}$$

$$\times \left[n^4(-8+x^2) + 4(6+x^2) + n^3(5x^2-32) + n(32+5x^2)\right.$$

$$+ n^2(7x^2-16) + x\big(n(x^2-24) + 2n^2(x^2-17)$$

$$\left.- 8 - 2n^4 + n^3(-16+x^2)\big)\tau_{n+2}(x)\right].$$

Приложение B. Выражение для коэффициентов $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$ и $C_n^{(3)}$ модельной задачи

$$C_n^{(1)} = c_{n-2}e^2M'_{n-2} + \big(c_n^{(2)}e^2 + c_n^{(0)}e^0\big)M'_n + c_{n+2}e^2M'_{n+2},$$

$$c_{n-2} \equiv \beta_n^{(2)}\Big(-\beta_{n-2}^{(1)} - 2(n-3)\beta_{n-2}^{(2)}\lambda_n^3\rho_n\rho_{2+n}\eta_{-1(n-2)}$$

$$\times \Lambda_{(n-2)n} - \beta_{n-2}^{(2)}(1-\Lambda_n)\rho_{2+n}\Big[-2(n-2)\lambda_{n-2}^{(3)}(4 - 5n + n^2$$

$$+\rho_n)\eta_{-1(n-2)} + 2(n-3)\Big\{\lambda_{(n-2)}^{(2)} + \eta_{-1(n-2)}\Big[2(n-1)\lambda_{n-2}^{(4)}$$

$$- \rho_n(2\lambda_{n-2}^{(1)} + K_n^{(3)}\Lambda_{(n-2)n})\Big]\Big\} - \frac{2}{3}\lambda_{n-2}^{(3)}\rho_{n-2}K_{2(n-2)n}\Big]\Big)$$

$$\beta_n^{(2)} \equiv \frac{1}{n\lambda_n^{(2)} + 2(n-1)(\Lambda_n - 1)\rho_{2+n}},$$

$$\beta_l^{(1)} \equiv \frac{\lambda_n^{(3)}}{3}\,\frac{\lambda_l^{(3)}\alpha_{l,-1}^{(1)} - 2(l-1)\lambda_l^{(1)}\alpha_{l,1}^{(1)}}{\lambda_l^{(3)} + 2(l-1)(\Lambda_l - 1)\rho_{2+l}},$$

$$\lambda_n^{(l)} \equiv I_n^{(l)} - K_n^{(l)}\Lambda_n, \quad \Lambda_n \equiv \frac{i_n(x\mu)k_n(x)}{i_n(x)k_n(x\mu)},$$

$$\Lambda_{lj} \equiv 2x[\tau_l(x\mu) + \chi_l(x\mu)]\,\frac{i_l(x\mu)k_j(x)}{i_l(x)k_j(x\mu)}, \ \ \chi_l(x) \equiv \frac{k_{l+1}(x)}{k_l(x)},$$

$$\alpha_{ij}^{(1)} \equiv l(j+l)K_{2ln} - \alpha_{2ln}, \quad K_{mkn} = \left[C_{m0k0}^{n0}\right]^2,$$

$$\alpha_{mkn} = -\sqrt{m(m+1)k(k+1)}\,C_{m0k0}^{n0}C_{m(-1)k1}^{n0},$$

$$\rho_n \equiv (n-2)(n-1),$$

$$\eta_{lj} \equiv \frac{2(l+j)+1}{(2j+1)(2j+3)(2j-1)}, \quad I_n^{(1)} \equiv \tau_n(x) + (n+1),$$

$$K_n^{(1)} \equiv -\chi_n(x) + (n+1),$$

$$I_l^{(2)} \equiv \frac{1}{3}\big[(l-2)\{2(l^2+1)+x^2\}$$
$$+x\{4+2l(l+1)+x^2\}\tau_n(x)\big]K_{2ln},$$
$$K_l^{(2)} \equiv \frac{1}{3}\big[(l-2)\{2(l^2+1)+x^2\}$$
$$-x\{4+2l(l+1)+x^2\}\chi_l\big]K_{2ln},$$
$$I_n^{(3)} \equiv 2(n^2-1)+x^2-2x\tau_n(x),$$
$$K_n^{(3)} \equiv 2(n^2-1)+x^2+2x\chi_n(x),$$
$$I_n^{(4)} \equiv n(n+1)(2n+2x\tau_n(x)-1),$$
$$K_n^{(4)} \equiv n(n+1)(2n-2x\chi_n(x)-1),$$
$$c_n^0 \equiv \beta_n^{(2)}\lambda_n^{(3)},$$
$$c_n^{(2)} \equiv \beta_n^{(2)}\bigg(-\beta_n^{(1)}+\frac{2}{3}(n-1)\beta_n^{(2)}\lambda_n^{(3)}\rho_{2+n}\big[(9-6\rho_{2+n})$$
$$\times\eta_{0n}-1\big]\Lambda_{nn}-\beta_n^{(2)}(1-\Lambda_n)\rho_{2+n}\bigg\{-2\lambda_n^{(3)}(3-2n+n^2$$
$$-\rho_{2+n})\eta_{0n}+2(n-1)\bigg[\lambda_n^{(2)}+2\lambda_n^{(4)}\eta_{0n}+2\lambda_n^{(1)}(2\rho_{2+n}-3)$$
$$\times\eta_{0n}-\frac{1}{3}K_n^{(3)}(1+(6\rho_{2+n}-9)\eta_{0n})\Lambda_{nn}\bigg]-\frac{2}{3}\lambda_n^{(3)}\rho_nK_{2nn}\bigg\}\bigg),$$
$$c_{n+2}\equiv\beta_n^{(2)}\bigg(-\beta_{n+2}^{(1)}-2(1+n)\beta_{n+2}^{(2)}\lambda_n^{(3)}\rho_{2+n}\rho_{4+n}\eta_{1(2+n)}\Lambda_{(2+n)n}$$
$$-\beta_{n+2}^{(2)}(1-\Lambda_n)\rho_{2+n}\bigg\{2\lambda_{n+2}^{(3)}\big[n(2+n)^2+(3+n)\rho_{4+n}\big]$$
$$\times\eta_{1(2+n)}+2(1+n)\big[\lambda_{n+2}^{(2)}-\eta_{1(2+n)}\{2(2+n)\lambda_{n+2}^{(4)}$$
$$+\rho_{4+n}(K_n^{(3)}\Lambda_{(2+n)n}+2\lambda_{n+2}^{(1)})\}\big]-\frac{2}{3}\lambda_{n+2}^{(3)}\rho_{2+n}K_{2(2+n)n}\bigg\}\bigg),$$
$$C_n^{(3)}=\frac{D_n^{(3)}}{i_n(x)},\ \ D_n^{(3)}=d_{n\pm2}e^2M'_{n\pm2}+\big(d_n^{(2)}e^2+d_n^{(0)}\big)M'_n,$$
$$d_{n-2}\equiv\frac{1}{\lambda_n^{(3)}}\bigg(\beta_{n-2}^{(2)}\bigg\{-2(n-2)(4-5n+n^2+\rho_n)\lambda_{n-2}^{(3)}\eta_{-1(n-2)}$$
$$+2(n-3)\big[\lambda_{n-2}^{(2)}+\eta_{-1(n-2)}\big(2(n-1)\lambda_{n-2}^{(4)}-\rho_n\big(2\lambda_{n-2}^{(1)}$$
$$+K_n^{(3)}\Lambda_{(n-2)n}\big)\big)\big]-\frac{2}{3}\rho_{n-2}\lambda_{n-2}^{(3)}K_{2(n-2)n}\bigg\}\big(1+2(n-1)\beta_n^{(2)}$$
$$\times(1-\Lambda_n)\rho_{2+n}\big)+2(n-1)\beta_n^{(2)}\big[\beta_{n-2}^{(1)}+2(n-3)$$
$$\times\beta_{n-2}^{(2)}\lambda_n^{(3)}\rho_n\rho_{2+n}\eta_{-1(n-2)}\Lambda_{(n-2)n}\big]\bigg),$$
$$d_n^{(0)}\equiv-2(n-1)\beta_n^{(2)},$$
$$d_n^{(2)}\equiv\beta_n^{(2)}\bigg(\bigg\{-2(3-2n+n^2-\rho_{2+n})\eta_{0n}+\frac{1}{\lambda_n^{(3)}}2(n-1)$$
$$\times\big[\lambda_n^{(2)}+2\lambda_n^{(2)}+2\lambda_n^{(4)}+2\lambda_n^{(1)}(2\rho_{2+n}-1)\eta_{0n}$$
$$-\frac{1}{3}K_n^{(3)}(1+(6\rho_{2+n}-9)\eta_{0n})\Lambda_{nn}\big]-\frac{2}{3}\rho_nK_{2nn}\bigg\}$$
$$\times\big[1+2(n-1)\beta_n^{(2)}(1-\Lambda_n)\rho_{2+n}\big]-2(n-1)$$
$$\times\bigg\{\frac{2}{3}(n-1)\beta_n^{(2)}\rho_{2+n}[(9-6\rho_{2+n})\eta_{0n}-1]\Lambda_{nn}-\frac{\beta_n^{(1)}}{\lambda_n^{(3)}}\bigg\}\bigg),$$
$$d_{n+2}\equiv\frac{1}{\lambda_n^{(3)}}\bigg(\beta_{n+2}^{(2)}\bigg\{2\Big[n(2+n)^2+(3+n)\rho_{4+n}\Big]\lambda_{n+2}^{(3)}\eta_{1(2+n)}$$
$$+2(1+n)\bigg[\lambda_{n+2}^{(2)}-\eta_{1(2+n)}\bigg\{2(2+n)\lambda_{n+2}^{(4)}+\rho_{4+n}\big(2\lambda_{n+2}^{(1)}$$
$$+K_n^{(3)}\Lambda_{(2+n)n}\big)\bigg\}\bigg]-\frac{2}{3}\rho_{2+n}\lambda_{n+2}^{(3)}K_{2(2+n)n}\bigg\}\bigg\{1+2(n-1)$$
$$\times\beta_n^{(2)}(1-\Lambda_n)\rho_{2+n}\bigg\}+2(n-1)\beta_n^{(2)}\bigg[\beta_{n+2}^{(1)}+2(1+n)$$
$$\times\beta_{n+2}^{(2)}\lambda_n^{(3)}\rho_{2+n}\rho_{4+n}\eta_{1(2+n)}\Lambda_{(2+n)n}\bigg]\bigg),$$
$$C_n^{(2)}(t)=\frac{D_n^{(2)}(t)}{k_n(x)},$$
$$D_2^{(n)}(t)=-D_n^{(3)}(t)\Lambda_n-e^2\bigg[\rho_n\eta_{-1(n-2)}\Lambda_{(n-2)n}D_{n-2}^{(3)}(t)$$
$$+\frac{1}{3}\bigg[1+(6\rho_{n+2}-9)\eta_{0n}\bigg]\Lambda_{nn}D_n^{(3)}(t)+\rho_{n+4}\eta_{1(n+2)}$$
$$\times\Lambda_{(n+2)n}D_{n+2}^{(3)}(t)\bigg].$$

Приложение С. Система связанных дифференциальных уравнений модельной задачи

$$M''_n(t)+\nu M''_n(t)\Big(\varepsilon_n^{(n)}+e^2\varepsilon_n^{(2)}\Big)+M_n\Big(\tau_n^{(0)}+e^2\tau_n^{(2)}\Big)$$
$$+e^2M''_{n-2}(t)\gamma_{n-2}+\nu e^2M'_{n-2}(t)\varepsilon_{n-2}+e^2M_{n-2}\tau_{n-2}$$
$$+e^2M''_{n+2}(t)\gamma_{n+2}+\nu e^2M'_{n+2}(t)\varepsilon_{n+2}+e^2M_{n+2}\tau_{n+2}=0,$$
$$\varepsilon_n^{(0)}\equiv\frac{2\big[\lambda_n^{(3)}\rho_{1+n}-2(n-1)\lambda_n^{(6)}\rho_{2+n}\big]}{\lambda_n^{(3)}},$$

$$\varepsilon_n^{(2)} \equiv -\frac{2}{3}\Big\{-3\alpha_n^{(2)} - 2(n-1)\,\frac{\lambda_n^6}{\left(\lambda_n^{(3)}\right)^2}\,\rho_{2+n}\Big[\lambda_n^{(2)} + 6\lambda_n^{(4)}\eta_{0n}$$

$$+ 6\lambda_n^{(1)}(2\rho_{2+n} - 3)\eta_{0n} + K_n^{(3)}\big((9 - 6\rho_{2+n})\eta_{0n} - 1\big)\Lambda_{nn}\Big]$$

$$+ n\rho_{1+n}K_{2nn} + \frac{2}{\lambda_n^{(3)}}\Big[3(n-1)\lambda_n^{(5)}$$

$$+ \rho_{2+n}\Big(\lambda_n^{(6)}\Big(3[3 - 2n + n^2 - \rho_{2+n}]\eta_{on} - (n-1)K_n^{(6)}$$

$$\times\big[1 + (6\rho_{2+n} - 9)\eta_{0n}\big]\Lambda_{nn} + \big(n - n^2 + \rho_n\big)K_{2nn}\Big)\Big)\Big]\Big\},$$

$$I_l^{(5)} \equiv \frac{1}{3}\Big[l(1+l)\big\{(l-2)(l-1) + x^2 - 4x\tau_n(x)\big\}K_{2ln}$$

$$- I_l^{(3)}\alpha_{2ln},\Big],$$

$$K_l^{(5)} \equiv \frac{1}{3}\Big[l(1+l)\Big\{(l-2)(l-1) + x^2 - 4\chi_n(x)\Big\}K_{2ln}$$

$$- K_l^{(3)}\alpha_{2ln}\Big],$$

$$\alpha_l^{(2)} \equiv \frac{1}{3}\Big[l\rho_l K_{2ln} - 2(l-1)\alpha_{2ln}\Big], \quad \tau_n^{(0)} \equiv \frac{\mu_{n0}}{\beta_n^{(2)}\lambda_n^{(3)}},$$

$$\tau_n^{(2)} \equiv \frac{1}{3\beta_n^{(2)}\lambda 3_n^2}\Big(\lambda_n^{(3)}\mu_n^{(2)} - \frac{1}{3}\mu_n^{(0)}\Big\{n\lambda_n^{(3)}K_{2nn} + 3\Big[-\beta_n^{(1)}$$

$$+ \frac{2}{3}(n-1)\beta_n^{(2)}\lambda_n^{(3)}\rho_{2+n}[(9 - 6\rho_{2+n})\eta_{0n} - 1]\Lambda_{nn}$$

$$- \beta_n^{(2)}(1 - \Lambda_n)\rho_{2+n}\big(-2\lambda_n^{(3)}(3 - 2n + n^2 - \rho_{2+n})\eta_{0n}$$

$$+ 2(n-1)\big(\lambda_n^{(2)} + 2\lambda_n^{(4)}\eta_{0n} + 2\lambda_n^{(1)}(2\rho_{2+n} - 3)\eta_{0n}$$

$$- \frac{1}{3}K_n^{(3)}[1 + (6\rho_{2+n} - 9)\eta_{0n}]\Lambda_{nn}\big) - \frac{2}{3}\lambda_n^{(3)}\rho_n K_{2nn}\big)\Big]\Big\}\Big),$$

$$\mu_n^{(0)} \equiv (n-1)(2+n),$$

$$\mu_n^{(2)} \equiv \frac{2n\big(66n^2 + 113n^3 + 2n^4 - 23 - 149n\big)}{9 + 6n - 36n^2 - 24n^3},$$

$$\gamma_{n-2} \equiv \frac{\beta_{n-2}^{(2)}}{\beta_n^{(2)}\lambda_n^{(3)}}\Big(\frac{1}{3}(n-2)\lambda_{n-2}^{(3)}K_{2(n-2)n} - \frac{\beta_n^{(2)}}{\beta_{n-2}^{(2)}}\Big\{\beta_{n-2}^{(1)}$$

$$+ 2(n-3)\beta_{n-2}^{(2)}\lambda_n^{(3)}\rho_n\rho_{2+n}\eta_{-1(n-2)}\Lambda_{(-2+n)n} - \beta_{n-2}^{(2)}$$

$$\times(1 - \Lambda_n)\rho_{2+n}\Big[-2(n-2)\lambda_{n-2}^{(3)}\big(4 - 5n + n^2 + \rho_n\big)\eta_{-1(n-2)}$$

$$+ 2(n-3)\big(\lambda_{n-2}^{(2)} + \eta_{-1(n-2)}\big[2(n-1)\lambda_{n-2}^{(4)}$$

$$- \rho_n\big(2\lambda_{n-2}^{(1)} + K_n^{(3)}\Lambda_{(n-2)n}\big)\big]\big) - \frac{2}{3}\lambda_{n-2}^{(3)}\rho_{n-2}K_{2(n-2)n}\Big]\Big\}\Big),$$

$$\varepsilon_{n-2} \equiv \frac{2}{\beta_n^{(2)}\lambda_n^{(3)}}\Big(\alpha_{n-2}^{(2)}\beta_{n-2}^{(2)}\lambda_{n-2}^{(3)} - 2(n-3)\beta_{n-2}^{(2)}\Big[\lambda_{n-2}^{(5)}$$

$$- K_n^{(6)}\rho_n\rho_{2+n}\eta_{-1(n-2)}\Lambda_{(n-2)n}\Big]$$

$$+ \beta_n^{(2)}\rho_{1+n}\Big\{-\beta_{n-2}^{(1)}$$

$$- 2(n-3)\beta_{n-2}^{(2)}\lambda_n^{(3)}\rho_n\rho_{2+n}\eta_{-1(n-2)}\Lambda_{(n-2)n} - \beta_{n-2}^{(2)}(1 - \Lambda_n)$$

$$\times\rho_{2+n}\big(-2(n-2)\lambda_{n-2}^{(3)}\big)\big(4 - 5n + n^2 + \rho_n\big)\eta_{-1(n-2)}$$

$$+ 2(n-3)\Big[\lambda_{n-2}^{(2)} + {}+\eta_{-1(n-2)}\big[2(n-1)\lambda_{n-2}^{(4)} - \rho_n\big(2\lambda_{n-2}^{(1)}$$

$$+ K_n^{(3)}\Lambda_{(n-2)n}\big)\big] - \frac{2}{3}\lambda_{n-2}^{(3)}\rho_{n-2}K_{2(n-2)n}\Big]\Big\}$$

$$+ \frac{\lambda_n^{(6)}\rho_{2+n}}{\lambda_n^{(3)}}\big\{-2(n-1)\beta_n^{(2)}\big[-\beta_{n-2}^{(1)}$$

$$- 2(n-3)\beta_{n-2}^{(2)}\lambda_n^3\rho_n\rho_{2+n}$$

$$\times\eta_{-1(n-2)}\Lambda_{(n-2)n}\big] + \beta_{n-2}^{(2)}\big[1 - 2(n-1)\beta_n^{(2)}(\Lambda_n - 1)$$

$$\times\rho_{2+n}\big]\big[-2(n-2)\lambda_{n-2}^{(3)}\big(4 - 5n + n^2 + \rho_n\big)\eta_{-(n-2)}$$

$$+ 2(n-3)\big\{\lambda_{n-2}^{(2)} + \eta_{-1(n-2)}\big[2(n-1)\lambda_{n-2}^{(4)}$$

$$- \rho_n\big(2\lambda_{n-2}^{(1)} + K_n^{(3)}\Lambda_{(n-2)}\big)\big]\big\} - \frac{2}{3}\lambda_{n-2}^{(2)}\rho_{n-2}$$

$$\times K_{2(n-2)n}K_{2(n-2)}\big]\big\}\Big),$$

$$I_n^{(6)} \equiv (n-1) + x\tau_n(x), \quad K_n^6 \equiv (n-1) - x\chi_n(x),$$

$$\tau_{n-2} \equiv -\frac{n\big(30 - 45n + 14n^2 + n^3\big)}{(3 - 8n + 4n^2)\beta_n^{(2)}\lambda_n^{(3)}},$$

$$\gamma_{n+2} \equiv \frac{\beta_{n+2}^{(2)}}{\beta_n^{(2)}\lambda_n^{(3)}}\Big(\frac{1}{3}(n+2)\lambda_{n+2}^{(3)}K_{2(n+2)n}$$

$$- \frac{\beta_n^{(2)}}{\beta_{n+2}^{(2)}}\Big\{\beta_{n+2}^{(1)} + 2(n+1)\beta_{n+2}^{(2)}\lambda_n^{(3)}\rho_{n+2}\rho_{n+4}\eta_{-1(n+2)}\Lambda_{(2+n)n}$$

$$- (1 - \Lambda_n)\rho_{2+n}\Big[2\lambda_{n+2}^{(3)}\big[n(2+n)^2 + (3+n)\rho_{4+n}\big]\eta_{1(2+n)}$$

$$+ 2(n+1)\Big(\lambda_{n+2}^{(2)} + \eta_{-1(n+2)}\Big[2(n+2)\lambda_{n+2}^{(4)} + \rho_{n+4}\big(2\lambda_{n+2}^{(1)}$$

$$+ K_n^{(3)}\Lambda_{(n+2)n}\big)\Big]\Big) - \frac{2}{3}\lambda_{n+2}^{(3)}\rho_{n+2}K_{2(n+2)n}\Big]\Big\}\Big),$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n-2} \equiv{}& \frac{2}{\beta_n^{(2)}\lambda_n^{(3)}}\left(\alpha_{n+2}^{(2)}\beta_{n+2}^{(2)}\lambda_{n+2}^{(3)} - 2(n+1)\beta_{n+2}^{(2)}\left[\lambda_{n+2}^{(5)}\right.\right.\\
&\left. - K_n^{(6)}\rho_{n+2}\rho_{4+n}\eta_{1(n+2)}\Lambda_{(n+2)n}\right] + \beta_n^{(2)}\rho_{1+n}\left\{-\beta_{n+2}^{(1)}\right.\\
&- 2(n+1)\beta_{n+2}^{(2)}\lambda_n^{(3)}\rho_{n+2}\rho_{4+n}\eta_{1(n+2)}\Lambda_{(n+2)n} - \beta_{n+2}^{(2)}(1-\Lambda_n)\\
&\times \rho_{2+n}\left(2\lambda_{n+2}^{(3)}\left[n(2+n)^2 + (3+n)\rho_{4+n}\right]\eta_{1(2+n)} + 2(n+1)\right.\\
&\times \left[\lambda_{n+2}^{(2)} + \eta_{-1(n+2)}\left[2(n+2)\lambda_{n+2}^{(4)} + \rho_{n+4}\left(2\lambda_{n+2}^{(1)}\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.\left.+ K_n^{(3)}\Lambda_{(n+2)n}\right)\right]\right]\right) - \frac{2}{3}\lambda_{n+2}^{(3)}\rho_{n+2}K_{2(n+2)n}\bigg]\bigg\}\\
&+ \frac{\lambda_n^{(6)}\rho_{2+n}}{\lambda_n^{(3)}}\left\{-2(n+1)\beta_n^{(2)}\left[-\beta_{n+2}^{(1)} - 2(n+1)\right.\right.\\
&\left.\times \beta_{n+2}^{(2)}\lambda_n^{(3)}\rho_{n+2}\rho_{4+n}\eta_{1(n+2)}\Lambda_{(n+2)n}\right]\\
&+ \beta_{n+2}^{(2)}\left[1 - 2(n-1)\beta_n^{(2)}(\Lambda_n - 1)\rho_{2+n}\right]\\
&\times \left[2\lambda_{n+2}^{(3)}\left[n(2+n)^2 + (3+n)\rho_{4+n}\right]\eta_{1(2+n)}\right.\\
&+ 2(n+1)\left\{\lambda_{n+2}^{(2)} + \eta_{1(n+2)}\left[2(n+1)\lambda_{n+2}^{(4)}\right.\right.\\
&\left.\left.\left.\left.\left. - \rho_{n+4}(2\lambda_{n+2}^{(1)} + K_n^{(3)}\Lambda_{(n+2)n})\right]\right\} - \frac{2}{3}\lambda_{n+2}^{(3)}\rho_{n+2}K_{2(n+2)n}\right]\right\}\right),
\end{aligned}$$

$$\tau_{n+2} \equiv -\frac{\left(20 + 76n + 81n^2 + 26n^3 + n^4\right)}{\beta_n^{(2)}\lambda_n^{(3)}\left(15 + 16n + 4n^2\right)}.$$

Приложение D. Решение системы дифференциальных уравнений

а) нулевое приближение

$$M_n^0(t) = q_n^{(0)}\exp\left(ib_n^{(0)}\right)\exp\left(x_n^{(0)}t\right)\delta_{nj}Z_j,$$

$$a_n^{(0)} = \sqrt{1 + \left(\mathrm{Re}s_n^{(0)}/\mathrm{Im}s_n^{(0)}\right)^2},$$

где δ_{nj} — символ Кронекера, Z_j — начальная амплитуда осцилляций капли j-й моды. $b_n^{(0)} = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Re}s_n^{(0)}}{\mathrm{Im}s_n^{(0)}}\right)$, $s_n^{(0)}$ — частота, являющаяся решением дисперсионного уравнения $s_n^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_n^{(0)} + \sqrt{\left(\varepsilon_n^{0}\right)^2 - 4\tau_n^{(0)}}\right)$, $\varepsilon_n^{(0)}$, $\tau_n^{(0)}$ приведены в Приложении C для модельной задачи и в Приложении D для модельной упрощенной задачи;

б) первое приближение

$$\begin{aligned}
M_n(t) = Z_j\bigg\{&\exp\left(ib_n^{(0)}\right)\left(a_n^{(0)}\delta_{nj} + \frac{1}{a_n^{(0)}}e^2\right.\\
&\left.\times\left[q_{n-2}^{(1)}\delta_{(n-2)j} + q^{(2)}\delta_{nj} + q_{n+2}^{(1)}\delta_{(n+2)j}\right]\right)\\
&\times\exp\left(\left(s_n^{(0)} + e^2s_n^{(1)}\right)\cdot t\right) - e^2\alpha_{n-2}a_{n-2}^{(0)}\\
&\times\exp\left(ib_{n-2}^{(0)}\right)\exp\left(s_{n-2}^{(0)}t\right)\delta_{(n-2)j} - e^2\alpha_{n+2}a_{n+2}^{(0)}\\
&\times\exp\left(ib_{n+2}^{(0)}\right)\exp\left(s_{n+2}^{(0)}t\right)\delta_{(n+2)j}\bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{n\pm2}^{(1)} = a_{n\pm2}^{(0)}\alpha_{n+2}&\left(\cos\left(b_{n\pm2}^{(0)}\right)\left|s_{n\pm2}^{(0)}\right|^2\right.\\
&\left.- \left[\cos\left(b_{n\pm2}^{(0)}\right)\mathrm{Re}s_{n\pm2}^{(0)} - \mathrm{Im}s_{n\pm2}^{(0)}\sin\left(b_{n\pm2}^{(0)}\right)\right]s_{n\pm2}^{(0)}\right),
\end{aligned}$$

$$q^{(2)} = \left(\mathrm{Im}s_n^{(0)}\mathrm{Re}s_n^{(1)} - \mathrm{Im}s_n^{(1)}\mathrm{Re}s_n^{(0)}\right)\left(i + \frac{\mathrm{Re}s_n^{(0)}}{\mathrm{Im}s_n^{(0)}}\right),$$

$$s_n = s_n^{(0)} + e^2s_n^{(1)}, \quad s_n = -\lambda(s_n) + \sqrt{\lambda^2(s_n) - 4\omega(s_n)},$$

$$\lambda = \varepsilon_n^{(0)} + e^2\varepsilon_n^{(2)}, \quad \omega = \tau_n^{(0)} + e^2\tau_n^{(2)},$$

$$\alpha_{n\pm2} = \frac{\left(s_{n\pm2}^{(0)}\right)^2\gamma_{n\pm2} + s_{n\pm2}^{(0)}\varepsilon_{n\pm2} + \tau_{n\pm2}}{\left(s_{n\pm2}^{(0)}\right)^2 + \lambda s_{n\pm2}^{(0)} + \omega}.$$

Коэффициенты $\varepsilon_n^{(0)}$, $\tau_n^{(0)}$, $\varepsilon_n^{(2)}$, $\tau_n^{(2)}$, $\lambda_{n\pm2}$, $\varepsilon_{n\pm2}$, $\tau_{n\pm2}$ для модельной задачи приведены в Приложении C, для модельной упрощенной — в Приложении D.

Приложение E. Дисперсионное уравнение в первом и втором порядках малости в пределе малой вязкости

В первом порядке малости, учитывая, что $W \propto e^2$

$$4 + \frac{s^2}{2} - \frac{324W}{35} + 5s\nu + e^2\left[\frac{1}{42}\left(5s^2 - 80\right) - \frac{1}{7}s^{3/2}\sqrt{\nu} + \frac{2s\nu}{21}\right] = 0.$$

Во втором порядке малости

$$\begin{aligned}
&\frac{s^4}{8} + 8s^3\nu + s^2\left(10 - \frac{6151W}{385} + \frac{135\nu^2}{2}\right)\\
&+ s\nu\left(144 - \frac{100714W}{385}\right) + 72 - \frac{15176W}{55} + \frac{12960W^2}{77}\\
&+ e^2\left[\frac{15s^4}{308} + \frac{961s^3\nu}{462} + \frac{1}{77}s^2\left(299\nu^2 - 20\right) - \frac{228}{77}s^{3/2}\sqrt{\nu}\right.\\
&\left.- \frac{3288s\nu}{77} - \frac{186}{77}s^{5/2}\nu^{3/2} - \frac{13}{154}s^{7/2}\sqrt{\nu} - \frac{560}{11}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Приложение F. Выражения для коэффициентов $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$, $C_n^{(3)}$ модельной упрощенной задачи

Для получения полных выражений коэффициентов нужно взять выражения из Приложения B, но с обозначениями

$$I_l^{(2)} \equiv \frac{1}{3}\Big\{4-5l^2+l^3-2x^2+l\big(x^2-2\big) + \big(4+l+l^2+x^2\big)x\tau_n(x)\Big\}K_{2ln},$$

$$K_l^{(2)} \equiv \frac{1}{3}\Big\{4-5l^2+l^3-2x^2+l\big(x^2-2\big) - \big(4+l+l^2+x^2\big)x\chi_n(x)\Big\}K_{2ln},$$

$$I_n^{(3)} \equiv (n-1)(1+n)+n^2-2x\tau_n(x),$$

$$K_n^{(3)} \equiv (n-1)(1+n)+x^2+2x\chi_n(x),$$

$$I_n^{(4)} \equiv 2n(1+n)\big(n+x\tau_n(x)\big);$$

$$K_n^{(4)} \equiv 2n(1+n)\big(n-x\chi_n(x)\big).$$

Приложение G. Система связанных дифференциальных уравнений модельной упрощенной задачи

$$M_n''(t)+\nu M_n'(t)\big(\varepsilon_n^{(0)}+e^2\varepsilon_n^{(2)}\big) + M_n\big(\tau_n^{(0)}+e^2\tau_n^{(2)}\big) + e^2M_{n-2}''(t)\gamma_{n-2}+\nu e^2M_{n-2}'(t)\varepsilon_{n-2} + e^2M_{n-2}\tau_{n-2}+e^2M_{n+2}'(t)\gamma_{n+2}+\nu e^2M_{n+2}'(t)\varepsilon_{n+2} + e^2M_{n+2}\tau_{n+2}=0, \quad \varepsilon_n^{(0)}\equiv 2\rho_{1+n},$$

$$\varepsilon_n^{(2)} \equiv \frac{\lambda_n^{(3)}\big(3\alpha_n^{(2)}-n\rho_{1+n}K_{2nn}\big)-4(n-1)\lambda_n^{(5)}\alpha_{2nn}}{3\lambda_n^{(3)}},$$

$$I_n^{(5)} \equiv -\big[(n-2)(1+n)+x^2\big]+2x\tau_n(x),$$

$$K_n^{(5)} \equiv -\big[(n-2)(1+n)+x^2\big]-2x\chi_n(x),$$

$$\varepsilon_{n-2} \equiv \frac{2\beta_{n-2}^{(2)}}{\beta_n^{(2)}\lambda_n^{(3)}}\Bigg(\alpha_{n-2}^{(2)}\lambda_{n-2}^{(3)}+2\,\frac{\beta_n^{(2)}}{\beta_{n-2}^{(2)}}\,\rho_{1+n}\Big\{\beta_{n-2}^{(1)} + 2(n-3)\beta_{n-2}^{(2)}\lambda_n^{(3)}\rho_n\rho_{2+n}\eta_{-1(n-2)}\Lambda_{(n-2)n}+(1-\Lambda_n) \times\rho_{2+n}\Big[-2(n-2)\lambda_{n-2}^{(3)}\big(4-5n+n^2+\rho_n\big)\eta_{-1(n-2)} + 2(n-3)\Big(\lambda_{n-2}^{(2)}+\eta_{-1(n-2)}\Big[2(n-1)\lambda_{n-2}^{(4)}-\rho_n \times\big(2\lambda_{(n-2)}^{(1)}+K_n^{(3)}\Lambda_{(n-2)n}\big)\Big]\Big)-\frac{2}{3}\,\lambda_{n-2}^{(3)}\rho_{n-2}K_{2(n-2)n}\Big]\Big\} - \frac{4}{3}(n-3)\lambda_{n-2}^{(5)}\alpha_{2(n-2)n}\Bigg),$$

$$\varepsilon_{n-2} \equiv \frac{2\beta_{n+2}^{(2)}}{\beta_n^{(2)}\lambda_n^{(3)}}\Bigg(\alpha_{n+2}^{(2)}\lambda_{n+2}^{(3)}-2\,\frac{\beta_n^{(2)}}{\beta_{n+2}^{(2)}}\,\rho_{1+n}\Big\{\beta_{n+2}^{(1)} + 2(n+1)\beta_{n+2}^{(2)}\lambda_n^{(3)}\rho_{n+2}\rho_{4+n}\eta_{1(n+2)}\Lambda_{(n+2)n} + (1-\Lambda_n)\rho_{2+n}\big[2\lambda_{n+2}^{(3)}\Big[n(2+n)^2+(3+n)\rho_{4+n}\Big]\eta_{1(2+n)} + 2(n+1)\Big(\lambda_{n+2}^{(2)}+\eta_{1(n+2)}\Big[2(n+2)\lambda_{n+2}^{(4)}-\rho_{n+4} \times\big(2\lambda_{n+2}^{(1)}+K_n^{(3)}\Lambda_{(n+2)n}\big)\Big]\Big)-\frac{2}{3}\,\lambda_{n+2}^{(3)}\rho_{n+2}K_{2(n+2)n}\Big]\Big\} - \frac{4}{3}(n+1)\lambda_{n+2}^{(5)}\alpha_{2(n+2)n}\Bigg).$$

Выражения для $\tau_n^{(0)}$, $\tau_n^{(2)}$, $\gamma_{n\pm 2}$, $\tau_{n\pm 2}$ совпадают с соответствующими коэффициентами модельной задачи из Приложения C.

Работа выполнена при поддержке грантов Рособрнауки № РНП 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.

Список литературы

[1] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 8. С. 19–28.
[2] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 12. С. 12–20.
[3] *Григорьев А.И., Пожарницкий Д.М., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 5. С. 8–17.
[4] *Григорьев А.И., Пожарницкий Д.М., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 5. С. 15–26.
[5] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Жарова И.Г.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 5. С. 54–63.
[6] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Паранин А.Р.* // ЖТФ. Т. 80. Вып. 10. С. 30–36.
[7] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Паранин А.Р.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 2. С. 31–41.
[8] *Cheng K.J.* // Phys. Lett. 1985. Vol. A112. N 11. P. 392–396.
[9] *Inculett I.I., Floryan J.M., Haywood R.J.* // IEEE Trans. Ind. Appl. 1992. Vol. IA-28. N 5. P. 12 032–1209.
[10] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 93–95.

[11] *Snerwood J.D.* // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 188. P. 133–146.
[12] *Hill R.J.A., Eaves L.* // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 101. N 23. P. 234 501-4.
[13] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 6. С. 44–54.
[14] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 6. С. 33–42.
[15] *O'Konski C.T., Thacher H.C.* // J. Phys. Chem. 1953. Vol. 57. N 9. P. 955–958.
[16] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[17] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.
[18] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 4. С. 20–27.
[19] *Паранин А.Р., Григорьев А.И.* // Электронный журнал „Исследовано в России". 2009. Т. 114. С. 1500–1509. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009.114.pdf
[20] *Паранин А.Р., Григорьев А.И.* // Электронный журнал „Исследовано в России". 2009. Т. 119. С. 1545–1554. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/119.pdf
[21] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // Скаляризация векторных краевых задач гидродинамики. Ярославль: Изд-во ЯрГУ. 2010. 180 с.
[22] *Справочник по специальным функциям* / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
[23] *Бэтчелор Дж.К.* Введение в динамику жидкости. М., Ижевск: Изд-во НИЦ, РХД, 2004. 768 с.