

01;04

Пучковые неустойчивости при коллективном эффекте Черенкова и аномальном эффекте Доплера в пространственно ограниченной системе вблизи полосы непрозрачности

© И.Н. Карташов, М.В. Кузелев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991 Москва, Россия
e-mail: kartashov@ph-elec.phys.msu.ru

(Поступило в Редакцию 21 июня 2011 г.)

В линейном приближении рассмотрены пучковые неустойчивости типа коллективного вынужденного эффекта Черенкова и аномального эффекта Доплера, развивающиеся в продольно ограниченной электродинамической системе вблизи ее полосы непрозрачности, т.е. в условиях, когда возбуждаемая пучком электромагнитная волна имеет нулевую групповую скорость. Получено дисперсионное уравнение, определяющее инкременты развития неустойчивости с учетом выхода излучения из электродинамической системы. Исследованы решения дисперсионного уравнения для различных параметров электронного пучка и электродинамической системы.

Коллективный эффект Черенкова является одним из фундаментальных механизмов вынужденного излучения электронных пучков в средах с замедленными волнами. Физическая природа эффекта подробно рассмотрена в [1]. По классификации электродинамики плазмы и плазмоподобных сред коллективный эффект Черенкова относится к взаимодействиям типа волна–волна [2]. Причем энергия одной из взаимодействующих волн при коллективном эффекте Черенкова отрицательна. В работе [3] указано на аналогию вынужденного излучения пучка при отрицательной энергии одной из волн с еще одним фундаментальным механизмом излучения — аномальным эффектом Доплера. В литературе по физике плазмы коллективный эффект Черенкова часто рассматривают как одну из многочисленных пучковых неустойчивостей [4,5], что, конечно, верно, хотя при таком подходе фундаментальное значение коллективного эффекта оказывается несколько вне поля зрения. С другой стороны, применение методов и терминологии общей теории неустойчивостей, развитой в физике плазмы и родственных ей областях [6–8], при рассмотрении коллективного эффекта Черенкова и аномального эффекта Доплера весьма плодотворно. Методы общей теории неустойчивостей использованы и в настоящей работе для исследования линейной динамики коллективного вынужденного эффекта Черенкова в условиях, когда резонанс медленной волны пучка и некоторой электромагнитной волны имеет место при нулевой групповой скорости последней. Из-за полной аналогии математических моделей и уравнений полученные результаты полностью применимы к пучковым неустойчивостям при аномальном эффекте Доплера.

Исходим из следующих уравнений, описывающих в линейном приближении взаимодействие прямолинейного электронного пучка с некоторой электродинамиче-

ской системой волноводного типа [9]:

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + G_b(\hat{\omega}, \hat{k}) \omega_b^2 \right) A_b = -\omega_b^2 S_b(\hat{\omega}, \hat{k}) A_w,$$

$$D_w(\hat{\omega}, \hat{k}) A_w = -\omega_w^2 S_w(\hat{\omega}, \hat{k}) A_b. \quad (1)$$

Здесь $A_b(t, z)$ — функция, характеризующая состояние электронного пучка (например, возмущение плотности заряда электронов пучка), $A_w(t, z)$ характеризует состояние электродинамической системы, $D_w(\hat{\omega}, \hat{k})$ — дифференциальный оператор, описывающий динамику электродинамической системы, G_b , S_b и S_w — некоторые безразмерные операторы, ω_w — величина размерности частоты, ω_b — ленгмюровская частота электронов пучка, $\hat{\omega}$ и \hat{k} — операторы частоты и продольного волнового числа:

$$\hat{\omega} = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{k} = -i \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2)$$

При написании (1) предполагалось, что электронный пучок движется со скоростью U вдоль электродинамической системы, ориентированной по оси Oz . Например, если безграничный пучок движется в безграничной электронной плазме, то [5] $G_b = S_b = S_w = 1$, $\omega_w = \omega_p$, $D_w(\hat{\omega}, \hat{k}) = -\hat{\omega}^2 + \omega_p^2 + 3\hat{k}^2 V_{Te}^2$, ω_p — ленгмюровская частота электронов плазмы, а V_{Te} — их тепловая скорость.

При коллективном вынужденном эффекте Черенкова первое уравнение системы (1) описывает волны плотности заряда пучка, возбуждаемые электромагнитной волной. В случае пучковой неустойчивости при аномальном эффекте Доплера для описания динамики пучка может быть использовано такое же уравнение, в которое вместо величины $G_b \omega_b^2$ входит Ω_b^2 — квадрат собственной частоты колебаний электрона пучка в некоторых внешних полях. Например, при аномальном эффекте

Доплера в постоянном продольном внешнем магнитном поле Ω_b есть электронная циклотронная частота, а $A_b(t, z)$ определяется поперечной гидродинамической скоростью электронов пучка [5].

Резонансное взаимодействие электронного пучка с электродинамической системой возможно только при наличии решения у следующей системы:

$$(\omega - kU)^2 - G_b(\omega, k)\omega_b^2 = 0, \quad D_w(\omega, k) = 0, \quad (3)$$

где ω и k — частота и волновое число. Предположим, что система уравнений (3), определяющая на плоскости k, ω резонансную точку, имеет решения $k = k_0, \omega = \omega_0$. Интересуясь только резонансным взаимодействием электронного пучка и электродинамической системы, представим решение уравнений (1) в виде

$$A_b(t, z) = \tilde{A}_b(t, z) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z), \quad A_w(t, z) = \tilde{A}_w(t, z) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z). \quad (4)$$

Здесь $\tilde{A}_w(t, z)$ — амплитуда собственной волны электродинамической системы. Считаем, что выполнены неравенства

$$\left| \frac{\partial \tilde{A}_w}{\partial t} \right| \ll |\omega_0 \tilde{A}_w|, \quad \left| \frac{\partial \tilde{A}_w}{\partial z} \right| \ll |k_0 \tilde{A}_w|, \quad (5)$$

означающие медленность амплитуды $\tilde{A}_w(t, z)$. Что касается амплитуды пучковой волны $\tilde{A}_b(t, z)$, то каких-либо предположений о ее медленности пока не делается. Подставляя функции (4) в уравнения (1), учитывая, что в резонансной точке $(\omega_0 - k_0 U)^2 - G_b(\omega_0, k_0)\omega_b^2 = 0$ и $D_w(\omega_0, k_0) = 0$, и используя неравенства (5), получим следующую систему уравнений для амплитуд $\tilde{A}_b(t, z)$ и $\tilde{A}_w(t, z)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \tilde{A}_b \mp 2i\sqrt{G_b(\omega_0, k_0)}\omega_b \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{A}_b \\ = -\omega_b^2 S_b(\omega_0, k_0) \tilde{A}_w, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_g \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{A}_w = -i\omega_w^2 S_w(\omega_0, k_0) \left| \frac{\partial D_w(\omega_0, k_0)}{\partial \omega} \right|^{-1} \tilde{A}_b. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь V_g — групповая скорость волны в электродинамической системе, невозмущенной электронным пучком. Уравнения (6), являясь довольно общими, описывают два предельных режима вынужденного излучения электронным пучком собственных волн электродинамической системы: режим коллективного эффекта Черенкова и режим одночастичного эффекта [1] (а также и режим, переходный между названными эффектами). В режиме коллективного эффекта, который нас здесь только и интересует, выполнено неравенство

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{A}_b \right| \ll |\sqrt{G_b}\omega_b \tilde{A}_b| \quad (7)$$

и уравнения (6) записываются в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{A}_b = \mp \frac{1}{2} i\omega_b \frac{S_b(\omega_0, k_0)}{\sqrt{G_b(\omega_0, k_0)}} \tilde{A}_w,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_g \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{A}_w = -i\omega_w^2 S_w(\omega_0, k_0) \left| \frac{\partial D_w(\omega_0, k_0)}{\partial \omega} \right|^{-1} \tilde{A}_b \quad (8)$$

Верхний знак здесь берется при резонансе электродинамической волны с быстрой волной пучка, а нижний — в случае резонанса между электродинамической и медленной пучковой волнами. Коллективный эффект Черенкова есть резонансное взаимодействие электродинамической волны именно с медленной волной пучка, энергия которой отрицательна.¹ Поэтому, выбирая в (8) нижний знак (плюс) и переопределяя амплитуду \tilde{A}_b , запишем уравнения (8) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{A}_b = ia^2 \tilde{A}_w, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_g \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{A}_w = -i\tilde{A}_b, \quad (10)$$

где

$$a^2 = \frac{1}{2} \omega_b \omega_w^2 \frac{S_b(\omega_0, k_0) S_w(\omega_0, k_0)}{\sqrt{G_b(\omega_0, k_0)}} \left| \frac{\partial D_w(\omega_0, k_0)}{\partial \omega} \right|^{-1} > 0 \quad (11)$$

— параметр плотности пучка, содержащий всю информацию о конкретной физической природе рассматриваемой системы (вывод уравнений (9) для различных вакуумных и плазменных систем см. в [5]). Физический смысл величины (11) состоит в том, что максимальный инкремент пучковой неустойчивости при коллективном вынужденном эффекте Черенкова в пространственно-безграничной системе равен a .

Уравнения (9), (10) описывают конвективную неустойчивость, если скорости U и V_g имеют одинаковый знак (неустойчивость на попутной электромагнитной волне), и абсолютную неустойчивость, если знаки скоростей U и V_g противоположны (неустойчивость на обратной волне). Обе эти неустойчивости в режиме коллективного эффекта Черенкова в продольно ограниченной системе исследовались в [10]. Менее изученным остается вопрос о возбуждении волны электродинамической системы, когда ее групповая скорость V_g обращается в нуль. При $V_g = 0$ дисперсионная кривая $\omega(k)$ электромагнитной волны имеет максимум или минимум (см. далее формулу (13)), что реализуется вблизи полосы непрозрачности электродинамической системы, т.е. на частоте отсечки. В работах [11,12] на основе дисперсионного уравнения продольно безграничной системы определены инкременты и

¹ Строго говоря, в первое уравнение (8) вместо U входит групповая скорость медленной волны пучка, которая обычно близка к скорости пучка U .

характер неустойчивости в условиях, когда электронный пучок возбуждает электромагнитную волну вблизи полосы непрозрачности. В работах [13,14] исследовалось самовозбуждение пространственно-ограниченной системы на частоте отсечки с учетом отражения волн на границах в режиме одночастичного эффекта Черенкова, проводилось численное моделирование нелинейных уравнений, описывающих динамику электронного пучка в электродинамической системе вблизи полосы непрозрачности. Рассмотрение проводилось в случае, когда производной $\partial/\partial t$ в уравнении динамики электронного пучка пренебрежено. В настоящей работе в линейном приближении рассмотрим возбуждение волн вблизи полосы непрозрачности в ограниченной области пространства при коллективном эффекте Черенкова, не делая никаких предположений относительно частоты возбуждаемой волны и не пренебрегая производной $\partial/\partial t$ в уравнении динамики пучка (9).

Вблизи полосы непрозрачности, когда $V_g = 0$, необходимо учесть следующего члена (со второй пространственной производной) в укороченном уравнении для медленной амплитуды A_w . В результате вместо уравнения (10) имеем следующее:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\alpha \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\tilde{A}_w = -i\tilde{A}_b. \quad (12)$$

Здесь α — некоторый параметр, определяемый только структурой электродинамической системы. Обращение групповой скорости в нуль означает, что дисперсионная зависимость волны электродинамической системы вблизи точки (ω_0, k_0) представима в виде

$$\omega - \omega_0 = \alpha(k - k_0)^2, \quad (13)$$

а сама точка (ω_0, k_0) является экстремумом на дисперсионной кривой.

Решение системы уравнений (9), (12) для зависимости от времени вида $\sim \exp(-i\delta\omega t)$ запишется следующим образом:

$$\tilde{A}_w = A e^{i\delta k_1 z} + B e^{i\delta k_2 z} + C e^{i\delta k_3 z}, \quad (14)$$

$$\tilde{A}_b = A \frac{-a^2}{\delta\omega - \delta k_1 U} e^{i\delta k_1 z} + B \frac{-a^2}{\delta\omega - \delta k_2 U} e^{i\delta k_2 z} + C \frac{-a^2}{\delta\omega - \delta k_3 U} e^{i\delta k_3 z}. \quad (15)$$

Здесь и далее множитель $\exp(-i\delta\omega t)$ опускается, $\delta k_{1,2,3}$ — решения дисперсионного уравнения для безграничной системы

$$(\delta\omega - \alpha\delta k^2)(\delta\omega - \delta k U) = -a^2. \quad (16)$$

Дисперсионное уравнение (16) исследовано в [12], где показано, что описываемая им неустойчивость является абсолютной (см. также [15,16]).

Уравнения (10), (12) необходимо дополнить граничными условиями. Будем предполагать, что через границу

$z = 0$ в систему входит невозмущенный электронный пучок. В соответствии с этим предположением амплитуда \tilde{A}_b на входе удовлетворяет следующему условию:

$$\tilde{A}_b(0) = 0. \quad (17)$$

Кроме того, будем считать пучок малым возмущением, не изменяющим электродинамических свойств системы, и тогда отражение волны A_w от границ $z = 0$ и $z = L$ может быть описано условиями излучения в беспучковой системе. Получим условие излучения волны A_w на границе $z = L$. Предположим, что при $z > L$ расположен некоторый излучающий рупор и в этом рупоре возбуждается волна $A_2 = \tilde{A}_2 e^{-i\omega t + ik_2 z}$, бегущая вправо от границы $z = L$, где k_2 — волновое число в рупоре. Для такой волны в каждой точке $z \geq L$ выполняется условие излучения $\frac{\partial A_2}{\partial z} - ik_2 A_2 = 0$. Учитывая, что на границе $z = L$ должны выполняться соотношения $A_w = A_2$ и $dA_w/dz = dA_2/dz$ (непрерывность тангенциальных компонент электромагнитного поля), условие излучения в рабочей области на границе $z = L$ запишем в виде

$$\left(\frac{\partial A_w}{\partial z} - ik_2 A_w\right)\Big|_{z=L} = 0. \quad (18)$$

Подставляя (4) в (18), получим условие излучения для медленной амплитуды A_w

$$\left(\frac{\partial \tilde{A}_w}{\partial z} - i\Delta k_2 \tilde{A}_w\right)\Big|_{z=L} = 0, \quad (19)$$

где величина $\Delta k_2 = k_2 - k_0$ характеризует отражение и прохождение волны через границу $z = L$.

Далее необходимо различать два предельных режима отражения волны на границе. В первом случае излучающий рупор представляет собой электродинамическую систему, работающую вдали от полосы непрозрачности, разность Δk_2 будет оставаться конечной (не будет стремиться к нулю) при приближении частоты ω к частоте отсечки рабочей области ω_0 . Если речь идет о минимуме дисперсионной кривой (при этом в формуле (13) $\alpha > 0$), то волновое число в правом излучающем рупоре $k_2 > k_0$ соответствует волне, распространяющейся вправо, и величина $\Delta k_2 > 0$. В случае, когда дисперсионная кривая имеет максимум (а значит, $\alpha < 0$), величина $\Delta k_2 < 0$.

Повторяя аналогичные рассуждения для рупора, расположенного на левой границе $z = 0$, получим граничные условия в виде

$$\left(\frac{\partial \tilde{A}_w}{\partial z} + i\Delta k_1 \tilde{A}_w\right)\Big|_{z=0} = 0. \quad (20)$$

Во втором случае рупор является электродинамической системой, также работающей на границе полосы непрозрачности, т. е. дисперсионная зависимость рупора имеет вид, аналогичный (13).

$$\omega - \omega_0 = \alpha_2(k_2 - k_0)^2. \quad (21)$$

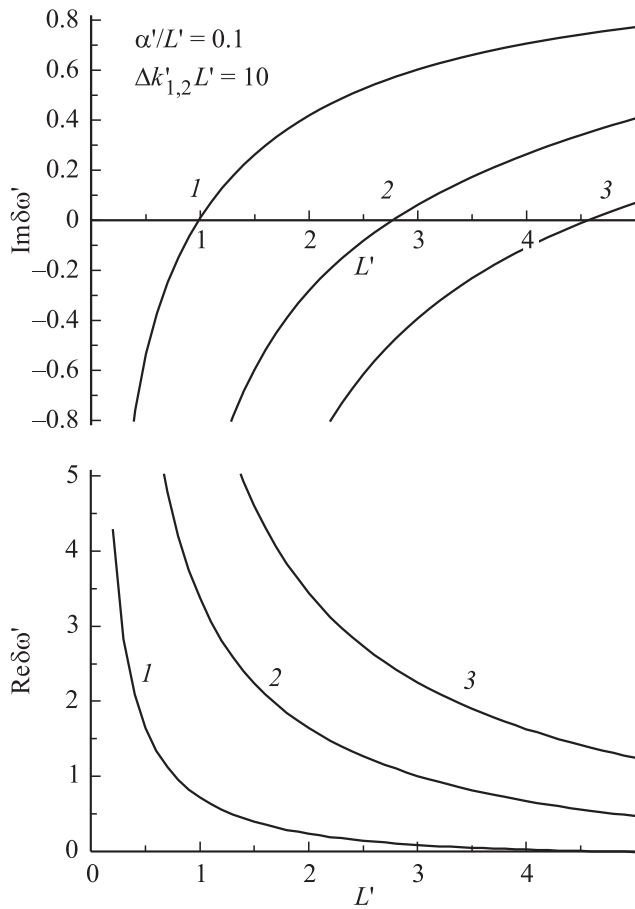


Рис. 1. Зависимости инкремента неустойчивости и частоты возбуждаемых электронным пучком волн электродинамической системы, работающей вблизи полосы непрозрачности, от параметра плотности пучка для $\alpha'/L' = 0.1$, $\Delta k'_{1,2}L' = 10$; номера кривых соответствуют номерам различных продольных мод.

В этом случае условие излучения (19) на границе $z = L$ будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial \tilde{A}_w}{\partial z} - i \sqrt{\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}} t_2 \tilde{A}_w \right) \Big|_{z=L} = 0, \quad (22)$$

где введенная величина $t_2 = (\alpha/\alpha_2)^{1/2}$ характеризует отличие электродинамических свойств рупора от рабочей области системы. При $t_2 = 1$ имеем идеальное согласование беспучковой электродинамической системы с рупором. И аналогично для границы $z = 0$

$$\left(\frac{\partial \tilde{A}_w}{\partial z} + i \sqrt{\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}} t_1 \tilde{A}_w \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (23)$$

Подставляя (14), (15) в граничные условия (17), (19), (21) или (17), (22), (23), получим однородную систему алгебраических уравнений для определения величин A, B и C , условие разрешимости которой дает

дисперсионное уравнение для ограниченной системы

$$\begin{aligned} & \frac{(\delta k_3 + \Delta k_1)(\delta k_2 - \Delta k_2)e^{i\delta k_2 L} - (\delta k_2 + \Delta k_1)(\delta k_3 - \Delta k_2)e^{i\delta k_3 L}}{\delta\omega - \delta k_1 U} \\ & + \frac{(\delta k_1 + \Delta k_1)(\delta k_3 - \Delta k_2)e^{i\delta k_3 L} - (\delta k_3 + \Delta k_1)(\delta k_1 - \Delta k_2)e^{i\delta k_1 L}}{\delta\omega - \delta k_2 U} \\ & = \frac{(\delta k_1 + \Delta k_1)(\delta k_2 - \Delta k_2)e^{i\delta k_2 L} - (\delta k_2 + \Delta k_1)(\delta k_1 - \Delta k_2)e^{i\delta k_1 L}}{\delta\omega - \delta k_3 U}. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнение (24) описывает оба предельных случая отражения волн от границ системы. В случае, когда рупор работает вблизи полосы непрозрачности, под $\Delta k_{1,2}$ следует подразумевать $\sqrt{\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}} t_{1,2}$. Следует отметить, что при перестановке любых двух из корней $\delta k_{1,2,3}$ уравнение (24) не меняется, соответственно различать решения $\delta k_1, \delta k_2$ и δk_3 по направлению распространения соответствующих им волн не нужно. Кроме того, уравнение (24) удовлетворяется в точках ветвления функции $k(\omega)$, т.е. при выполнении одного из условий $\delta k_1(\omega) = \delta k_2(\omega)$, $\delta k_2(\omega) = \delta k_3(\omega)$ или $\delta k_1(\omega) = \delta k_3(\omega)$. Однако такие решения соответствуют тривиальному случаю отсутствия возмущений в системе $\tilde{A}_w(z) = 0, \tilde{A}_b(z) = 0$.

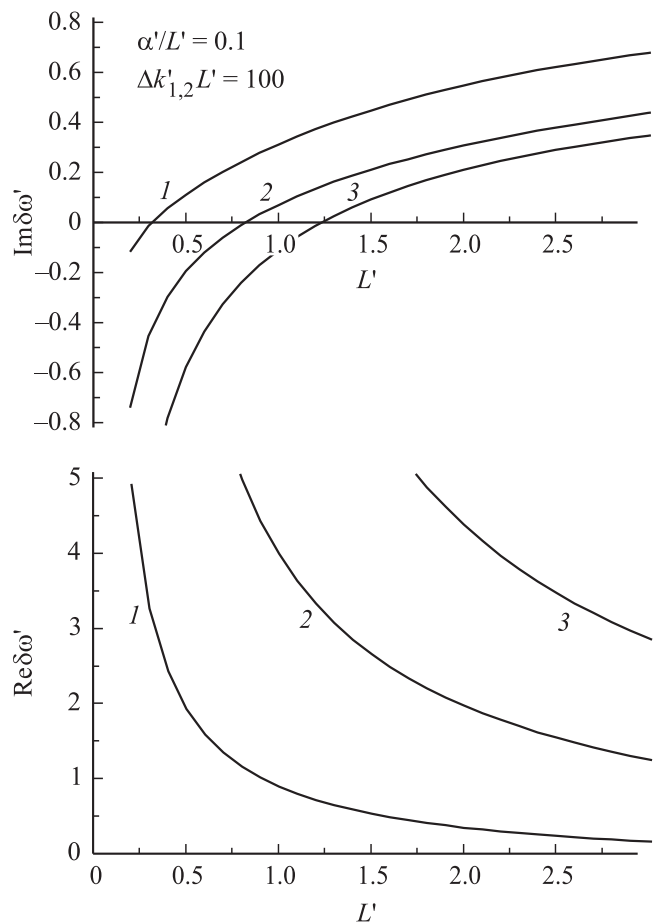


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, для $\alpha'/L' = 0.1$; $\Delta k'_{1,2}L' = 100$.

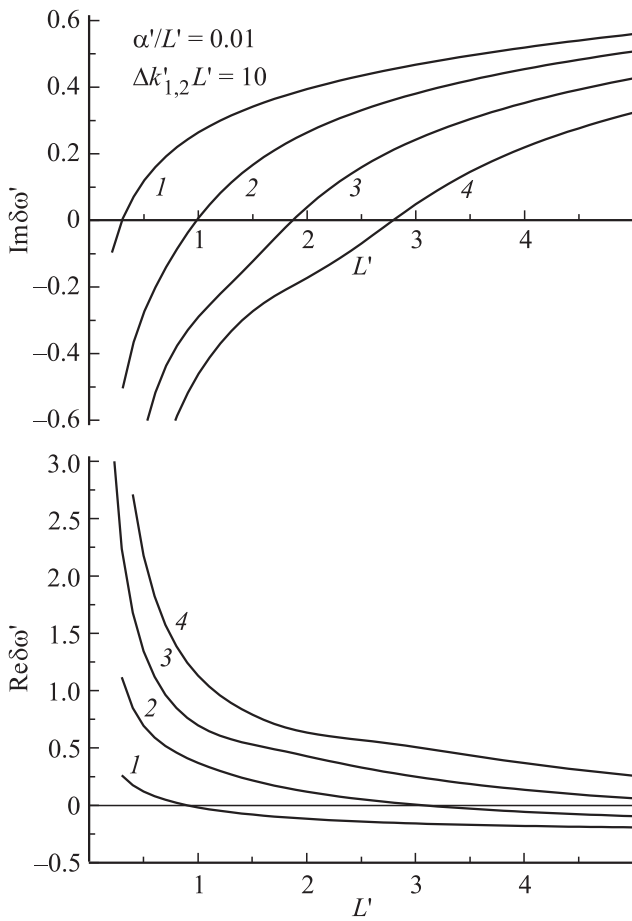


Рис. 3. То же, что и на рис. 1, для $\alpha'/L' = 0.01$; $\Delta k'_{1,2}L' = 10$.

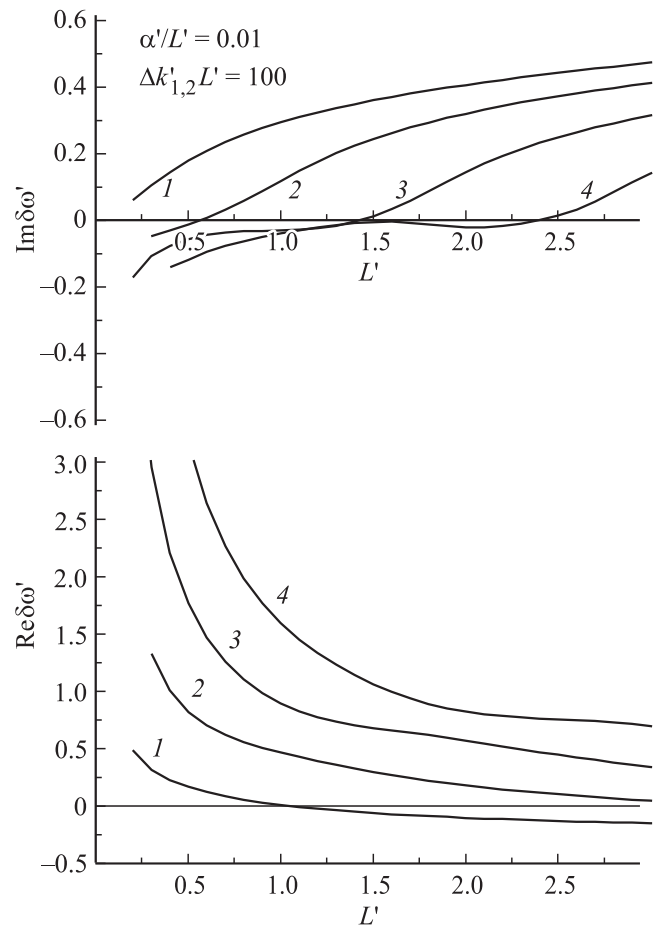


Рис. 4. То же, что и на рис. 1, для $\alpha'/L' = 0.01$; $\Delta k'_{1,2}L' = 100$.

Введем безразмерные параметры

$$L' = La/U, \quad \alpha' = \alpha a/U^2. \quad (25)$$

Обезразмеривая далее входящие в (24) и (16) величины по правилу $\delta\omega/a \rightarrow \delta\omega'$, $\delta k_{1,2,3}U/a \rightarrow \delta k'_{1,2,3}$, $\Delta k_{1,2}U/a \rightarrow \Delta k'_{1,2}$, замечаем, что уравнения (24) и (16) сохраняют свой вид и в безразмерных переменных (со штрихами), причем в этих уравнениях следует положить $U = 1$ и $a = 1$. Введенная безразмерная длина L' фактически также является параметром плотности пучка, поскольку, как видно из (25), зависит не только от длины резонатора L , но и от плотности электронного пучка. Кроме того, в новых безразмерных переменных $\Delta k'_{1,2} \sim \omega_b^{-1/2}$, а $\alpha' \sim \omega_b^{1/2}$, поэтому комбинации $\Delta k'_{1,2}L'$ и α'/L' не зависят от плотности пучка.

При проведении расчетов будем предполагать отражательные свойства рупоров на обеих границах одинаковыми, т.е. $\Delta k_1 = \Delta k_2$. Исходя из данных реальных экспериментов [9], выберем следующие значения параметров электродинамической системы: $\alpha'/L' = 0.1$ и 0.01 , $\Delta k'_{1,2}L' = 10$ и 100 . На рис. 1 и 2 для случая $\alpha'/L' = 0.1$ представлены зависимости мнимой $\text{Im } \omega'$ и вещественной $\text{Re } \omega'$ частей безразмерной частоты как функции параметров плотности пучка L' для различных условий отражения на концах электродинамической

системы $\Delta k'_{1,2}L' = 10$ (рис. 1) и $\Delta k'_{1,2}L' = 100$ (рис. 2). Номера кривых соответствуют различным продольным модам колебаний в ограниченной системе. Порог развития неустойчивости определяется условием $\text{Im } \omega' = 0$. С ростом отражения на концах электродинамической системы пороги развития неустойчивости смещаются в сторону меньших плотностей электронного пучка. На рис. 3 и 4 представлены аналогичные зависимости для случая $\alpha'/L' = 0.01$. Из этих рисунков видно, что, начиная с некоторой плотности электронного пучка, вещественная часть частоты возбуждаемой волны попадает в полосу непрозрачности электродинамической системы (кривые 1 и 2 на рис. 3 и кривая 1 на рис. 4).

На рис. 5 представлена пространственная зависимость собственных функций волны электродинамической системы $\text{Re } A_w$ и пучковой волны $\text{Re } A_b$ для одного из рассмотренных выше случаев, а именно $\alpha'/L' = 0.1$, $\Delta k'_{1,2}L' = 10$. Номера кривых соответствуют различным продольным модам. Каждая из собственных функций посчитана вблизи порога развития неустойчивости соответствующей моды колебаний. Как видно из верхнего графика на рис. 5, первая мода соответствует распределению поля, когда по длине системы укладывается примерно одна полуволна, вторая мода — две полуволны, третья — три полуволны и т.д.

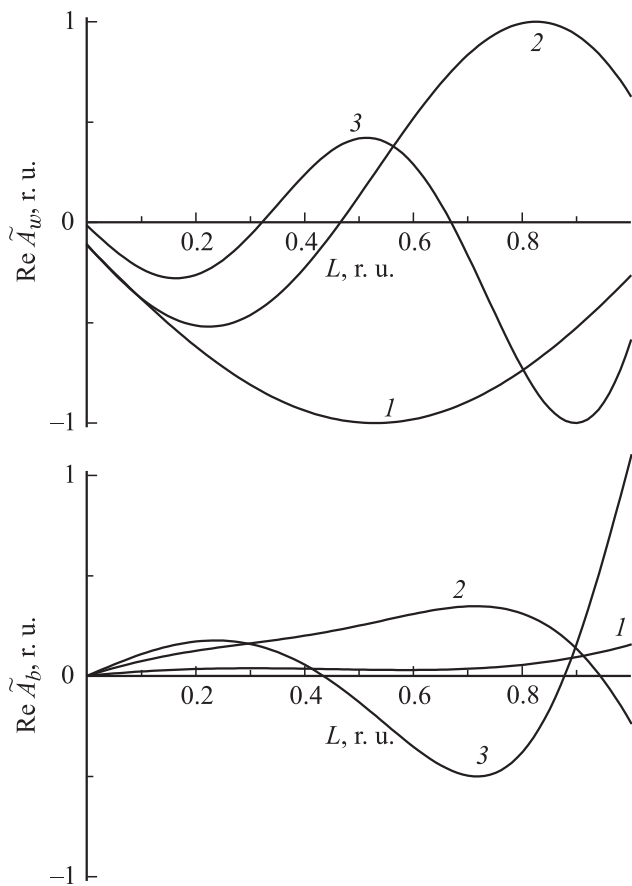


Рис. 5. Пространственное распределение $\text{Re } \tilde{A}_w$ и $\text{Re } \tilde{A}_b$ вблизи порога каждой из мод 1, 2, 3 для случая $\alpha'/L' = 0.1$, $\Delta k'_{1,2}L' = 10$.

Рассмотрим теперь второй из режимов отражения волн на границах рабочей области, а именно когда граничные условия имеют вид (22), (23), причем отражательные свойства границ будем считать одинаковыми, т.е. $t_1 = t_2$. Выберем значение $\alpha'/L' = 0.1$. На рис. 6 и 7 представлены зависимости мнимой $\text{Im } \omega'$ и вещественной $\text{Re } \omega'$ частей безразмерной частоты как функции параметра плотности пучка L' для различных условий отражения на концах электродинамической системы. Рис. 6 соответствует условиям идеального согласования, когда $t_{1,2} = 1$. Увеличение или уменьшение параметров $t_{1,2}$ означает переход к системам с отражением волн на концах электродинамической системы. Кривые 1–4 соответствуют различным продольным модам колебаний в ограниченной системе. С ростом отражения на концах электродинамической системы пороги развития неустойчивости понижаются. Как видно из рис. 6, в отличие от рис. 1–4 первая мода колебаний неустойчива при любом значении плотности пучка, т.е. имеет беспороговый характер. Используя разложение дисперсионного уравнения (24) вблизи $L' \approx 0$ и $\delta\omega' \approx 0$, можно получить аналитическую зависимость начального

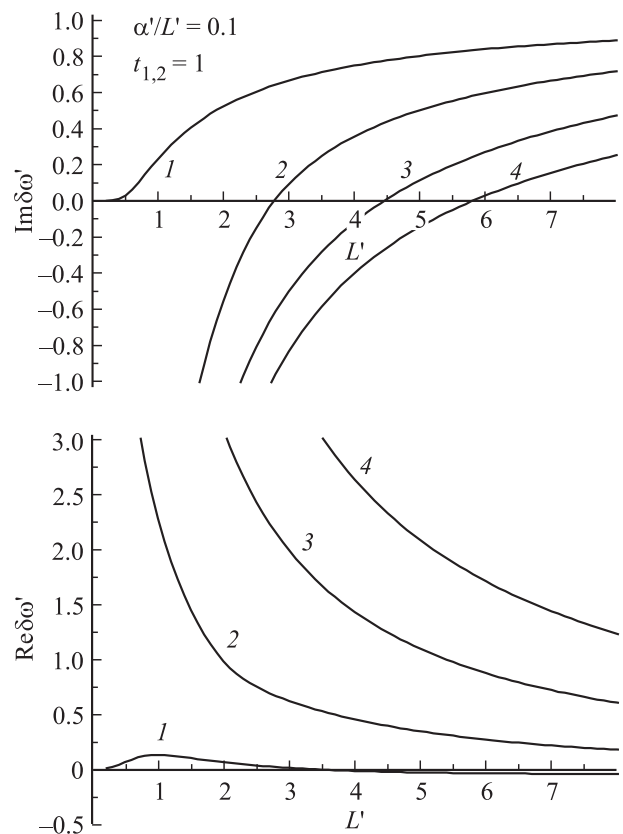


Рис. 6. То же, что и на рис. 1, для $\alpha'/L' = 0.1$, $t_{1,2} = 1$.

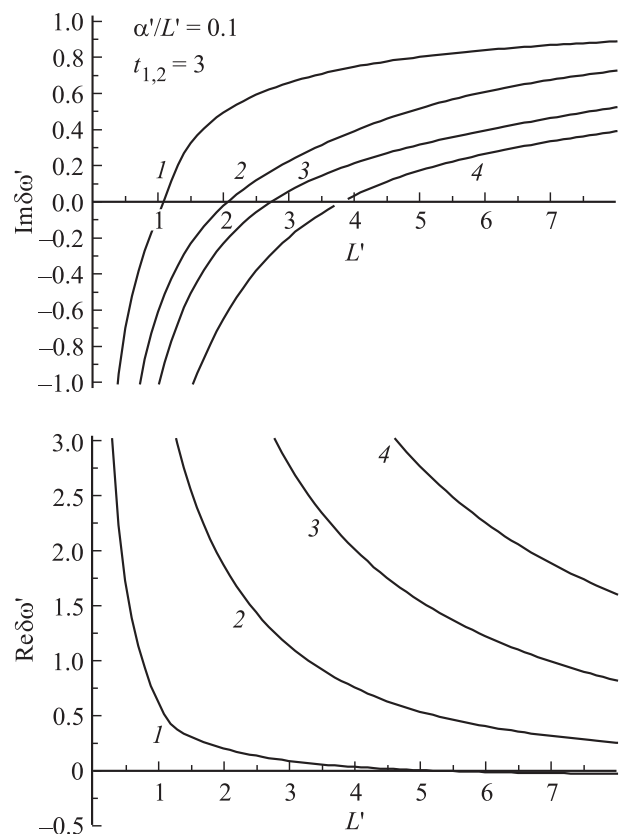


Рис. 7. То же, что и на рис. 6, для $\alpha'/L' = 0.1$, $t_{1,2} = 3$.

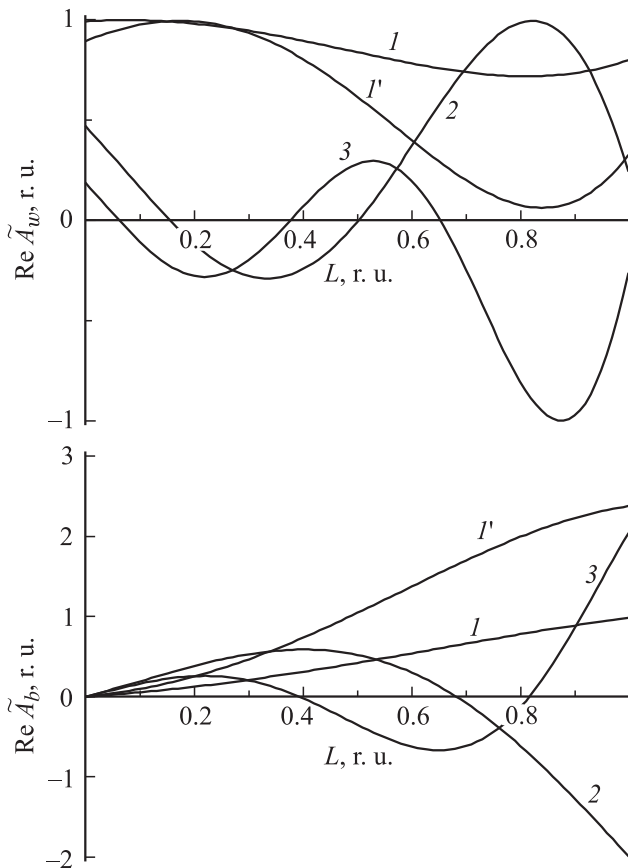


Рис. 8. Пространственное распределение $\text{Re } \tilde{A}_w$ и $\text{Re } \tilde{A}_b$ для случая $\alpha'/L' = 0.1$, $t_{1,2} = 1$. Кривые I и I' соответствуют $L' = 1$ и 2 , кривые 2 и 3 соответствуют значениям вблизи порога каждой из мод.

участка кривой I на рис. 6:

$$\delta\omega' = \frac{L^4}{4\alpha'(t_1 + t_2)^2} + i \frac{L^7}{4\alpha'^2(t_1 + t_2)^2} \left(\frac{t_1 t_2 + 1}{(t_1 + t_2)^2} - \frac{3}{10} \right). \quad (26)$$

При $t_1 = t_2$ колебания неустойчивы при любой плотности пучка в условиях $t_{1,2} < \sqrt{5}$, при $t_{1,2} > \sqrt{5}$ неустойчивость имеет пороговый характер. В частности, в условиях идеального согласования излучающих рупоров с электродинамической системой ($t_{1,2} = 1$) система неустойчива при сколь угодно малой плотности электронного пучка. Данный результат легко понять, если учесть, что вблизи полосы непрозрачности групповая скорость волны электродинамической системы обращается в нуль и, несмотря на идеальное согласование, выхода излучения из рабочей области не происходит.

На рис. 7 представлены зависимости для мнимой и вещественной частей частоты при $t_{1,2} = 3$. Поведение кривых аналогично рис. 1–4, первая мода в соответствии с (26) имеет пороговый характер.

На рис. 8 представлена пространственная зависимость собственных функций волны электродинамической системы $\text{Re } \tilde{A}_w$ и пучковой волны $\text{Re } \tilde{A}_b$ для $\alpha'/L' = 0.1$ в условиях идеального согласования $t_{1,2} = 1$. Номера

кривых соответствуют различным продольным модам. Собственные функции, обозначенные номерами 2 и 3, рассчитаны вблизи порога развития неустойчивости, когда $\text{Im } \omega' = 0$. Кривые I и I' соответствуют первой продольной моде колебаний и вычислены для значений $L' = 1$ и 2 соответственно. В целом поведение кривых аналогично рис. 5, только первая мода волны электродинамической системы при малых значениях L' , когда $\delta\omega'$ мало, почти постоянна по длине системы. С увеличением L' распределение поля становится таким, что укладывается одна полуволна.

Рассмотренные выше результаты относились к случаю, когда дисперсионная кривая волны электродинамической системы имеет минимум, т.е. $\alpha > 0$. Случай $\alpha < 0$ не требует специального рассмотрения, поскольку заменами $\alpha \rightarrow -\alpha$, $\delta\omega \rightarrow -\delta\omega$, $\delta k_{1,2,3} \rightarrow -\delta k_{1,2,3}$, $\Delta k_{1,2} \rightarrow -\Delta k_{1,2}$ и взятием комплексного сопряжения в уравнениях (16) и (24) задача сводится к исходной, т.е. все результаты сохраняют вид с заменой $\text{Re } \omega \rightarrow -\text{Re } \omega$.

Работа выполнена при поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009–2013 г. (госконтракт № П2509).

Список литературы

- [1] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // УФН. 1987. Т. 152. № 6. С. 285–316.
- [2] Кадамцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 238 с.
- [3] Незлин М.В. // УФН. 1976. Т. 120. № 3. С. 481–495.
- [4] Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988. 424 с.
- [5] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990. 336 с.
- [6] Ахизер А.И., Ахизер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974. 720 с.
- [7] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
- [8] Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, 1981. 176 с.
- [9] Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 544 с.
- [10] Карташов И.Н., Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Сенебри Джаван Н. // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 3. С. 15–23.
- [11] Кузнецов А.П. // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. № 15. С. 941–944.
- [12] Карташов И.Н., Кузелев М.В. // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2005. № 2. С. 27–30.
- [13] Булгакова Л.В., Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рожнев А.Г. // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1988. № 3. С. 7–12.
- [14] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рожнев А.Г., Блохина Е.В., Булгакова Л.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47. № 5. С. 1–20.
- [15] Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Методы теории волн в средах с дисперсией. М.: Физматлит, 2007. 272 с.
- [16] Кузелев М.В. // Физика плазмы. 2006. Т. 32. № 7. С. 623–631.