

01;03

## Устойчивость течения Пуазейля при наличии продольного магнитного поля

© А.В. Проскурин, А.М. Сагалаков

Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова,  
Барнаул, Россия  
e-mail: k210@list.ru

(Поступило в Редакцию 12 апреля 2011 г. В окончательной редакции 6 сентября 2011 г.)

Исследована устойчивость к малым возмущениям плоского течения электропроводящей вязкой жидкости при наличии продольного магнитного поля и больших числах Рейнольдса. Рассмотрена полная линеаризованная система уравнений магнитной гидродинамики. Используются метод коллокаций и метод дифференциальной прогонки. Подробно исследованы зависимости критических чисел Рейнольдса от электропроводности. Обнаружены новая ветвь неустойчивости при больших числах Рейнольдса и скачкообразное изменение критических чисел Рейнольдса.

### Введение

Исследования устойчивости к малым возмущениям плоского МГД-течения Пуазейля электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле имеют долгую историю [1–7] и представляют значительный интерес для построения общей теории ламинарно-турбулентного перехода течений вязкой жидкости в каналах, изучения бифуркаций решений уравнения Навье–Стокса. Данная задача является классической, однако она трудна для исследования: до сих пор отсутствуют простые и эффективные методы исследования неустойчивости Толлмина–Шлихтинга в линейном приближении при больших числах Рейнольдса и немалых магнитных числах Прандтля. Экспериментальная проверка результатов и положений линейной теории гидродинамической устойчивости также составляет сложную проблему, особенно при больших магнитных числах Прандтля. Устойчивость МГД-течения Пуазейля электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле исследовалась в работах [8,9].

Прямое численное моделирование развития неустойчивости позволяет получать результаты, близкие к экспериментальным [10–12]. Однако такой подход требует серьезного обоснования, вычисления являются очень сложными и требуют больших затрат, связанных с необходимостью использования суперкомпьютеров. При этом трудно установить основные закономерности развития и стабилизации возмущений от входящих в уравнения параметров, так как для каждого набора параметров приходится исследовать множество возмущений различной формы и амплитуды. Кроме того, методы прямого численного моделирования имеют существенные ограничения по числам Рейнольдса по порядку системы решаемых уравнений. В то же время современные возможности вычислений техники позволяют эффективно исследовать малые возмущения магнитогидродинамических течений с использованием полной линеаризованной системы уравнений магнитной гидродинамики в

широком диапазоне входящих в уравнения параметров и при больших числах Рейнольдса. Такой подход имеет надежный теоретический фундамент, представленный, в частности, в известных работах В.И. Юдовича [13,14].

### Постановка задачи

Система уравнений магнитной гидродинамики в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H} = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla \left( p + Al \frac{H^2}{2} \right) + Al(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (3)$$

где  $Al = H_0^2 / 4\pi\rho V_0^2$  — число Альфвена,  $Re = V_0 d / \nu$  — число Рейнольдса,  $R_m = V_0 d \frac{4\pi\sigma}{c^2}$  — магнитное число Рейнольдса. В качестве характеристических параметров выбраны полуширина канала  $d$ , среднерасходная скорость  $V_0$ , величина напряженности внешнего магнитного поля  $H_0$ . Введем декартову систему координат с осью  $x$ , направленной вдоль направления течения, а ось  $y$  направим перпендикулярно параллельным плоскостям, ограничивающим жидкость. Ось  $z$  направлена перпендикулярно к  $x$  и  $y$ . Границы канала расположены при  $y = \pm 1$ . Удобно ввести обобщенное давление  $P_g = p + Al \frac{H^2}{2}$ . Таким образом, структура уравнений магнитной гидродинамики такова, что три параметра (например,  $Al$ ,  $Re$ ,  $R_m$ ) полностью определяют поведение системы при заданных геометрии канала и внешнего магнитного поля. При расчетах вместо магнитного числа Рейнольдса использовалось магнитное число Прандтля  $P_m = R_m / Re = 4\pi\sigma\nu / c^2$ , прямо пропорциональное электропроводности и не зависящее от скорости и магнитного поля.

Решение системы уравнений (1)–(3) представим в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{v}, \quad (4)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + h, \quad (5)$$

$$P_g = P_0 + P, \quad (6)$$

где  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{H}_0$ ,  $P_0$  — стационарное решение ( $\mathbf{U} = \{U, 0, 0\}$ ,  $U = (3/2)(1 - y^2)$ ,  $\mathbf{H} = \{1, 0, 0\}$ ),  $\mathbf{v}$ ,  $h$ ,  $P$  — возмущения скорости, магнитного поля и давления. Подставим (4)–(6) в уравнения (1)–(3). Считая возмущения малыми, получим линеаризованную систему уравнений

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{h} = (\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{h}\nabla)\mathbf{U} + \frac{1}{R_m}\Delta h, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{U} = -\nabla P + Al(\mathbf{H}_0\nabla)\mathbf{h} + \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{v}, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0. \quad (9)$$

Стенки канала предполагаются непроницаемыми и идеально электропроводящими. Граничные условия для возмущений имеют вид

$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{h}_y = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 1. \quad (10)$$

Решения линеаризованной системы уравнений магнитной гидродинамики (7)–(9) ищутся в виде

$$\{v_x(y), v_y(y), v_z(y), h_x(y), h_y(y), h_z(y), q(y)\} \\ \times \exp(i\alpha(x - Ct) + i\beta z), \quad (11)$$

где  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ ,  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $h_z$  — проекции амплитуд возмущений скорости и напряженности магнитного поля на соответствующие оси декартовой системы координат,  $q$  — возмущение давления,  $\alpha$  — продольное волновое число,  $\beta$  — поперечное волновое число,  $C = X + iY$  — комплексная фазовая скорость, в которой  $\alpha X$  — собственно фазовая скорость, а  $\alpha Y$  — декремент затухания возмущения ( $Y < 0$ ) или инкремент его нарастания ( $Y > 0$ ). Подставим (11) в (7)–(9). Получим систему дифференциальных уравнений

$$i\alpha(U - C)h_x = i\alpha v_x + h_y U' + \frac{1}{R_m} [h_x'' - h_x(\alpha^2 + \beta^2)], \quad (12)$$

$$i\alpha(U - C)h_y = i\alpha v_y + \frac{1}{R_m} [h_y'' - h_y(\alpha^2 + \beta^2)], \quad (13)$$

$$i\alpha(U - C)h_z = i\alpha v_z = \frac{1}{R_m} [h_z'' - h_z(\alpha^2 + \beta^2)], \quad (14)$$

$$i\alpha(U - C)v_x + v_y U' = -i\alpha q + i\alpha A h_x \\ + \frac{1}{Re} [v_x'' - v_x(\alpha^2 + \beta^2)], \quad (15)$$

$$i\alpha(U - C)v_y = -q' + i\alpha A h_y + \frac{1}{Re} [v_y'' - v_y(\alpha^2 + \beta^2)], \quad (16)$$

$$i\alpha(U - C)v_z = -i\beta q + i\alpha A h_z + \frac{1}{Re} [v_z'' - v_z(\alpha^2 + \beta^2)], \quad (17)$$

$$v_y' + i\alpha v_x + i\beta v_z = 0, \quad h_y' + i\alpha h_x + i\beta h_z = 0. \quad (18)$$

Введем новые функции  $v = \alpha v_x + \beta v_z$ ,  $h = \alpha h_x + \beta h_z$ . Уравнение (12) умножим на  $\alpha$ , уравнение (14) умножим на  $\beta$  и сложим эти уравнения. С уравнениями (15), (17) поступим аналогично. Получим

$$i\alpha(U - C)h = i\alpha v + \alpha h_y U' + \frac{1}{R_m}(h'' - k^2 h), \quad (19)$$

$$i\alpha(U - C)h_y = i\alpha v_y + \frac{1}{R_m}(h_y'' - k^2 h_y), \quad (20)$$

$$i\alpha(U - C)v + \alpha v_y U' = -ik^2 q + i\alpha A h \\ + \frac{1}{Re}(v'' - k^2 v), \quad (21)$$

$$i\alpha(U - C)v_y = -q' + i\alpha A h_y + \frac{1}{Re}(v_y'' - k^2 v_y), \quad (22)$$

$$v_y' + iv = 0, \quad h_y' + ih = 0. \quad (23)$$

Здесь  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$  — квадрат волнового вектора. С помощью второго соотношения (23) в уравнении (21) выразим  $h$  через  $h_y$ . Система дифференциальных уравнений (19)–(23) примет вид

$$i\alpha(U - C)h = i\alpha v + \alpha h_y U' + \frac{1}{R_m}(h'' - k^2 h), \quad (24)$$

$$i\alpha(U - C)h_y = i\alpha v_y + \frac{1}{R_m}(h_y'' - k^2 h_y), \quad (25)$$

$$i\alpha(U - C)v + \alpha v_y U' = ik^2 q - \alpha A h_y' + \frac{1}{Re}(v'' - k^2 v), \quad (26)$$

$$i\alpha(U - C)v_y = -q' + i\alpha A h_y + \frac{1}{Re}(v_y'' - k^2 v_y), \quad (27)$$

$$v_y' + iv = 0, \quad h_y' + ih = 0. \quad (28)$$

Легко заметить, что теперь величина  $h$  входит только в уравнение (24), которое отщепляется от системы (24)–(28). Применяя простые преобразования, можно исключить  $q$  из (26), получится задача на собственные значения

$$h_y'' - k^2 h_y = i\alpha R_m(U - C)h_y - i\alpha R_m v. \quad (29)$$

$$v_y^{(4)} - 2k^2 v_y'' + k^4 v_y = i\alpha Re[(U - C)(v_y'' - k^2 v_y) - U'' v_y] \\ - i\alpha A Re(h_y'' - k^2 h_y). \quad (30)$$

Граничные условия имеют вид

$$v_y = 0, \quad v_y' = 0, \quad h_y = 0. \quad (31)$$

Обозначим

$$D = i\alpha Re(U - C), \quad \Omega = i\alpha P_m Re(U - C). \quad (32)$$

Используя формулы (32), перепишем далее систему дифференциальных уравнений (25)–(28) в виде

$$v'_y = -iv, \quad h'_y = \Phi \quad v' = Z, \quad (33)$$

$$\Phi' = k^2 h_y - i\alpha Re P_m v_y + \Omega h_y, \quad (34)$$

$$Z' = k^2 v + \alpha Re Al \Phi + ik^2 Re q + \alpha U' Re v_y + Dv, \quad (35)$$

$$q' = -\frac{D}{Re} v_y + i\alpha Al h_y - \frac{i}{Re} Z - \frac{k^2}{Re} v_y. \quad (36)$$

Данную систему удобно представить в матричном виде

$$\mathbf{W}' = M_1 \mathbf{W} + M_2 \mathbf{V}, \quad (37)$$

$$\mathbf{V}' = M_3 \mathbf{W} + M_4 \mathbf{V}, \quad (38)$$

$$\mathbf{W} = \{v, v_y, h_y\}, \quad \mathbf{V} = \{\Phi, Z, q\},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha Re P_m & k^2 + \Omega \\ k^2 + D & \alpha U' Re & 0 \\ 0 & -\frac{k^2 + D}{Re} & i\alpha Al \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha Re Al & 0 & ik^2 Re \\ 0 & -\frac{i}{Re} & 0 \end{pmatrix}.$$

Система (29), (30) допускает преобразования Сквайра [15]

$$k Re_{\text{eff}} = \alpha Re, \quad \alpha q_{\text{eff}} = kq, \quad (39)$$

где  $Re_{\text{eff}}$  — эффективное число Рейнольдса, соответствующее решению двумерной задачи. Из (39) вытекает соотношение

$$Re_* = \frac{(Re_{\text{eff}})_*}{\cos \theta}, \quad (40)$$

где  $\cos \theta = \alpha/k$ , звездочкой обозначены критические числа Рейнольдса. Критическое число Рейнольдса отделяет область устойчивых возмущений от области неустойчивых.

Двумерные возмущения всегда являются наиболее опасными в том смысле, что критические числа Рейнольдса по отношению к ним являются наименьшими по сравнению с критическими числами Рейнольдса для трехмерных возмущений. В общей гидродинамике данное утверждение носит название теоремы Сквайра. Однако в данной задаче в некоторых областях параметров задачи, в которых двумерные возмущения затухают, трехмерные возмущения могут нарастать и поэтому роль трехмерных возмущений остается существенной. Поэтому к данной задаче теорема Сквайра в „широком“ смысле действительно неприемлема. Как увидим ниже, области неустойчивости по отношению к двумерным возмущениям имеют сложную форму с образованием „окон“ устойчивости при увеличении числа Рейнольдса. Однако в этих „окнах“ устойчивости существуют

неустойчивые трехмерные возмущения. Поэтому можно сказать, что образующиеся при увеличении числа Рейнольдса „окна“ устойчивости двумерных возмущений „закрываются“ областями неустойчивости трехмерных возмущений и с ростом числа Рейнольдса стабилизации течений не происходит (см. также [8,9]).

### Численный метод

Как известно, эффективное решение задач гидродинамической устойчивости, как и вообще решение задачи на собственные значения для несамосопряженных операторов, в общем случае возможно только численно. Однако стандартные численные методы в этом случае обычно оказываются неприменимы: собственные функции линейных задач устойчивости течений вязкой электропроводящей жидкости обладают „плохими“ свойствами, возникающими вследствие наличия в уравнениях малых параметров  $1/Re$ ,  $1/R_m$  при старшей производной. В фундаментальной системе решений таких уравнений имеются быстрорастущие осциллирующие решения  $\sim \exp[\int \sqrt{i\alpha Re(U-C)} dy]$ , наличие которых из-за ошибок округления существенно затрудняет или вообще делает невозможным непосредственное численное нахождение остальных линейнонезависимых собственных функций и решение задачи на собственные значения.

При решении задач гидродинамической устойчивости хорошо себя зарекомендовал метод коллокаций [16,17], указанные выше трудности преодолеваются высоким качеством приближенного представления решения. Решение системы (29), (30) представим в виде

$$r_y = \sum_{i=0}^n a_i T_i(y), \quad h_y = \sum_{i=0}^n b_i T_i(y), \quad (41)$$

где  $T_i(y)$  — полиномы Чебышева первого рода. Пусть задано множество точек  $y_i = \cos(\pi i/n)$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Подставив (41) в (29), (30), получим задачу на собственные значения

$$A\omega = \lambda B\omega, \quad (42)$$

где  $\omega = \{a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n\}$ . Первое из граничных условий (31) представим в виде

$$\xi \sum_{i=0}^n a_i T_i(1) = C \sum_{i=0}^n a_i T_i(1), \quad (43)$$

где  $\xi$  — произвольное комплексное число. Выражение (43) подставим вместо первой строки в (42). Легко показать, что  $\xi$  окажется среди собственных значений (42), и его следует выбирать в стороне от спектра исходной задачи. С остальными граничными условиями поступим аналогично. Полученная алгебраическая задача на собственные значения решалась при помощи пакета LAPACK.

При решении задач данного класса важное значение имеет тщательное тестирование, сопоставление реше-

ний, полученных принципиально различными методами, и выбор оптимальных схем численного анализа. В этой связи для решения рассматриваемых задач использовался также метод дифференциальной прогонки, разработанный В.А. Сапожниковым, М.А. Гольдштиком под руководством академика Н.Н. Яненко [15,18]. Достоинствами данного метода являются его относительная простота, универсальность и высокая эффективность.

При использовании метода дифференциальной прогонки вводятся уравнения для подпространства решений

$$\mathbf{W} = A(y)\mathbf{V}, \quad (44)$$

где в данном случае  $A$  — матрица размера  $3 \times 3$ .

Выражение (44) обычно называют схемой прогонки. В процессе вычислений схему прогонки можно изменять, добиваясь наиболее „благоприятного“ поведения коэффициентов матрицы  $A$ .

На границе канала заданы граничные условия  $\mathbf{W} = 0$ , из чего следует  $A = 0$  на границе канала. Нередко применяют непосредственное интегрирование системы (37), (38) на небольших отрезках от границ канала с последующим использованием той или иной схемы прогонки.

Численные эксперименты позволили установить, что схема (44), определенная непосредственно граничными условиями, неоптимальна при интегрировании в средней части канала. Наиболее экономичным с учетом затрат машинного времени и простоты алгоритма оказался следующий вариант прогонки: на небольших расстояниях от границ канала прогонка велась по схеме (44), определенной граничными условиями, а в средней части канала использовалась „обращенная“ схема прогонки

$$\mathbf{V} = G\mathbf{W}, \quad (45)$$

причем в точке стыковки в силу непрерывности собственных функций и их производных выполняется  $G = A^{-1}$ . Системы дифференциальных уравнений для матриц  $A$  и  $G$  можно получить, продифференцировав (44), (45) и подставив в них выражения (37), (38). Находим

$$A' = M_1A + M_2 - A(M_3A + M_4), \quad (46)$$

$$G' = M_4G + M_3 - G(M_2G + M_1). \quad (47)$$

Интегрирование уравнений (46), (47) велось численно от границ канала к некоторой средней точке, в которой, так же как и в точках инверсии схемы прогонки, векторы  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{W}$  должны быть непрерывны, что позволяет записать систему алгебраических уравнений для величин  $\mathbf{W}$

$$(G^+ - G^-)\mathbf{W} = 0, \quad (48)$$

где знаками „+“ и „-“ обозначены подгоночные коэффициенты  $G$ , полученные интегрированием от разных границ канала. Так как  $\mathbf{W} \neq 0$ , можно записать дисперсионное уравнение

$$\det(G^+ - G^-) = 0. \quad (49)$$

Для решения уравнения (49) использовались итерационные методы.

## Результаты вычислений

На рис. 1–4 представлены кривые критических зависимостей  $Re_*(P_m)$  при числах Альфвена 0.001, 0.002, 0.003, 0.005, 0.02. При  $P_m \rightarrow 0$  критические числа Рейнольдса стремятся к соответствующему значению критического числа Рейнольдса для диэлектрической жидкости. При  $P_m > 10$  критические числа имеют горизон-

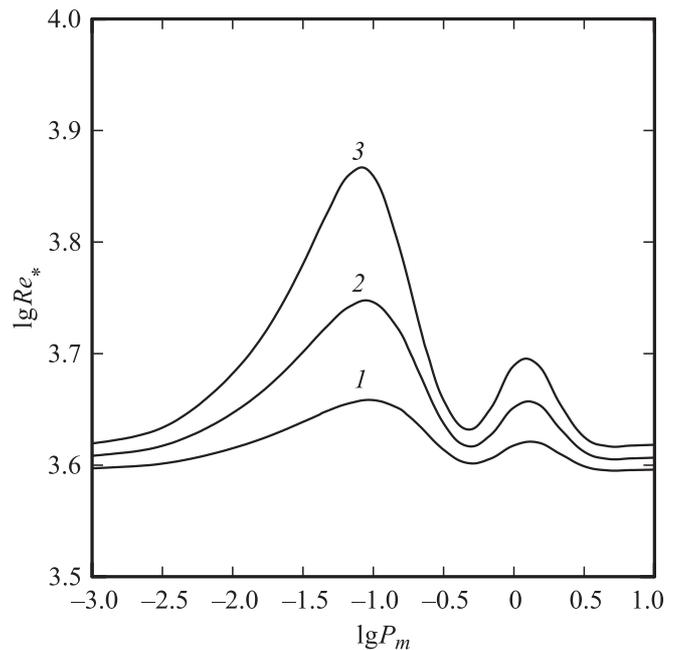


Рис. 1. Зависимости  $Re_*(P_m)$  при  $Al = 0.001$  (1), 0.002 (2), 0.003 (3).

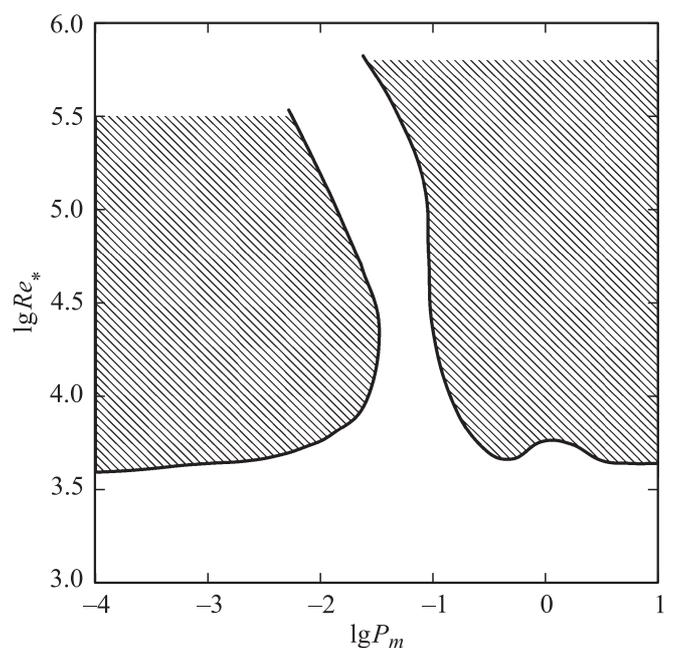
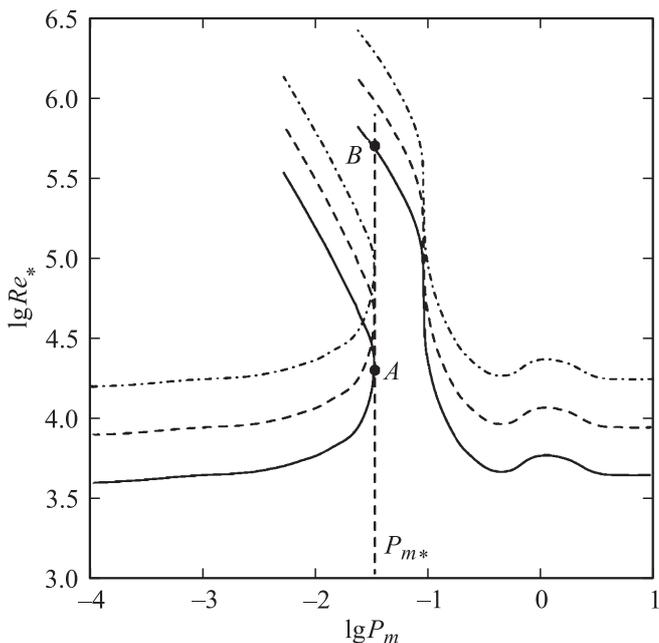
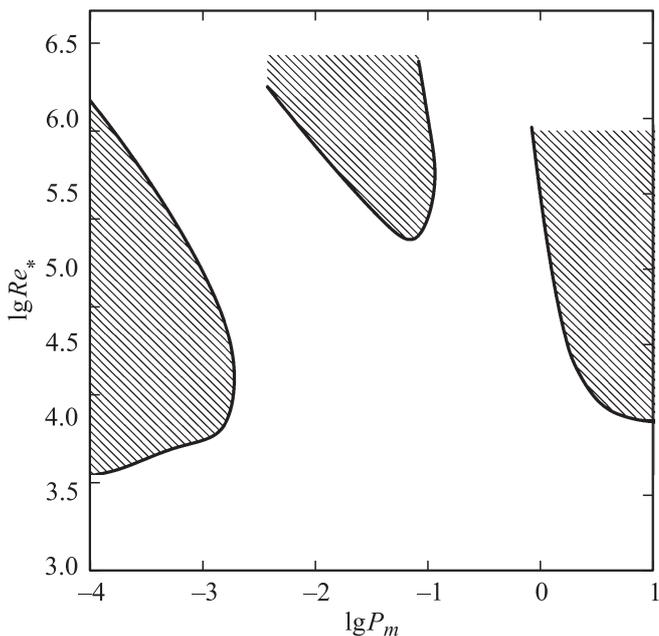


Рис. 2. Зависимости  $Re_*(P_m)$  при  $Al = 0.005$ .



**Рис. 3.** Зависимости  $Re_*(P_m)$  при  $Al = 0.005$ ,  $\cos \theta = 1$  (сплошная линия),  $\cos \theta = 1/2$  (штриховая линия),  $\cos \theta = 1/4$  (штрихпунктирная линия).



**Рис. 4.** Зависимости  $Re_*(P_m)$  при  $Al = 0.02$ .

тальные асимптоты, соответствующие случаю  $P_m \rightarrow \infty$ . На рис. 1 в точках  $P_m \approx 0.1$  и  $1.0$  данные зависимости имеют максимумы, высота которых сильно зависит от числа Альфвена. После некоторого предела увеличения числа Альфвена приводит к образованию в этих местах „окон“ устойчивости.

Наблюдаемые на рис. 2–4 области неустойчивости имеют сложную форму. При достаточно больших числах

Альфвена области неустойчивости могут быть расположены как выше кривой критических зависимостей, так и ниже. Далее на рисунках области неустойчивости двумерных возмущений обозначены штриховкой. Увеличение магнитного числа Прандтля от  $10^{-4}$  до  $10^{-2}$  (рис. 2) приводит к небольшому увеличению критических чисел Рейнольдса. Далее кривая критических зависимостей при некотором магнитном числе Прандтля „разворачивается“ в сторону уменьшения магнитных чисел Прандтля, ограничивая рассматриваемую область неустойчивости сверху. С увеличением числа Альфвена данная область неустойчивости сжимается, причем изменение числа Альфвена более сильно влияет на ее верхнюю границу (рис. 4). Такая форма кривых критических зависимостей обуславливает скачкообразное увеличение критических чисел Рейнольдса при увеличении величины  $P_m$ . Справа и выше рассмотренной области неустойчивости располагается область устойчивости, которая ограничена другой ветвью критических зависимостей. Критические числа Рейнольдса данной ветви убывают с увеличением магнитного числа Прандтля. На рис. 2 при  $P_m \approx 1$  критические зависимости также имеют максимум, который при дальнейшем увеличении числа Альфвена исчезает. При этом на его месте возникает „окно“ устойчивости данного течения (рис. 4).

Для проверки роли двумерных возмущений был проведен дополнительный анализ трехмерных возмущений, который позволяет судить об их влиянии на картину устойчивости. При этом обнаружены области, в которых трехмерные возмущения являются более опасными. На рис. 3 в качестве примера приведены зависимости  $Re_* P_m$  при  $Al = 0.005$  для  $\cos \theta = 1$  (сплошная линия),  $\cos \theta = 1/2$  (штриховая линия),  $\cos \theta = 1/4$  (штрихпунктирная линия). Аналогичные графики критических зависимостей для других значений  $\cos \theta \neq 1$  могут быть построены с помощью преобразования Сквайра (40). К левой ветви критических зависимостей  $\cos \theta = 1$  (двумерные возмущения) можно провести вертикальную касательную в точке A (соответствующее магнитное число Прандтля обозначим  $P_{m*}$ ), которая пересекает правую ветвь критических зависимостей  $\cos \theta = 1$  в точке B. Слева от отрезка AB расположена область неустойчивости трехмерных возмущений ( $\cos \theta < 1$ ). Такое расположение областей неустойчивости обуславливает скачкообразное увеличение критических чисел Рейнольдса после достижения критического числа Прандтля  $P_{m*}$ .

Таким образом, учет трехмерных возмущений расширяет область неустойчивости, но двумерные возмущения являются наиболее опасными в том смысле, что критические числа Рейнольдса по отношению к ним являются наименьшими по сравнению с критическими числами Рейнольдса для трехмерных возмущений. При этом области неустойчивости для трехмерных возмущений могут быть получены путем простых смещений графиков критических зависимостей для двумерных возмущений в соответствии с формулой (40).

На рис. 5 представлены критические зависимости  $Re_*(Al)$  при  $P_m = 0.025$ . При  $Al \rightarrow 0$  критические числа Рейнольдса стремятся к величинам, соответствующим случаю плоского течения Пуазейля диэлектрической жидкости. При увеличении числа Альфвена критические числа Рейнольдса монотонно увеличиваются вплоть до  $Al_* \approx 0.006$ , после чего кривая критических зависимостей при  $Al_{*1}$  „разворачивается“ в сторону уменьшения чисел Альфвена, ограничивая область неустойчивости сверху. Область неустойчивости трех-

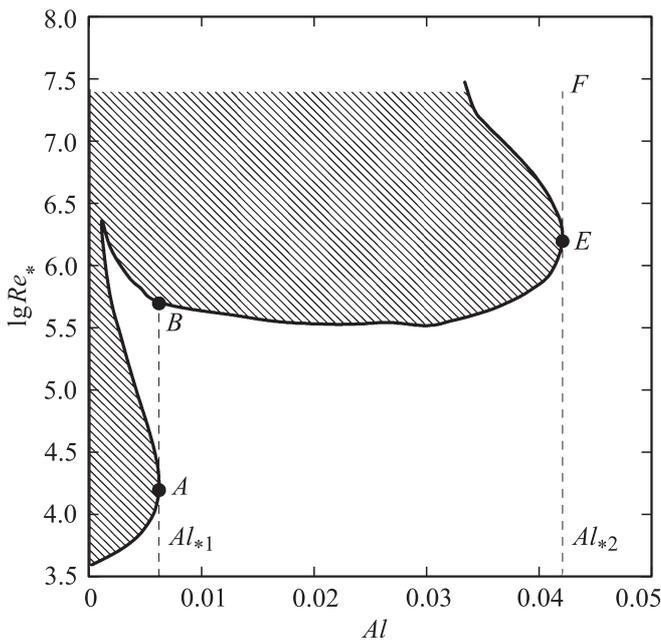


Рис. 5. Зависимости  $Re_*(Al)$  при  $P_m = 0.025$ .

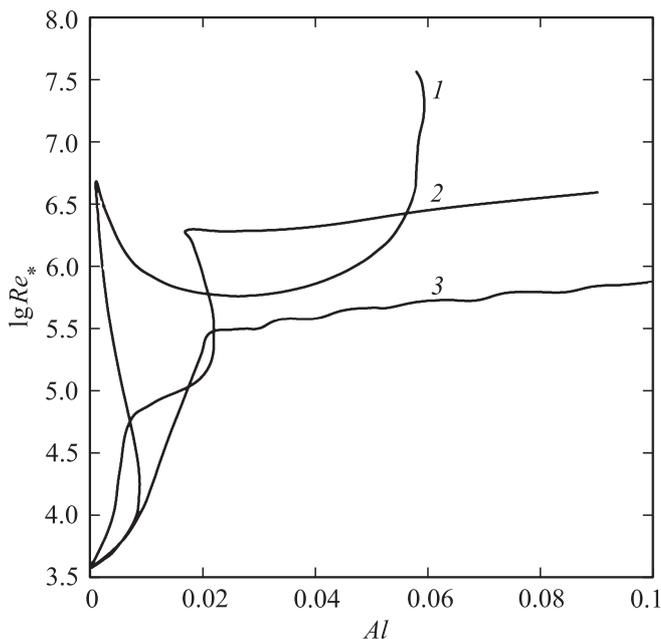


Рис. 6. Зависимости  $Re_*(Al)$  при  $P_m = 0.01$  (1), 0.1 (2), 1.0 (3).

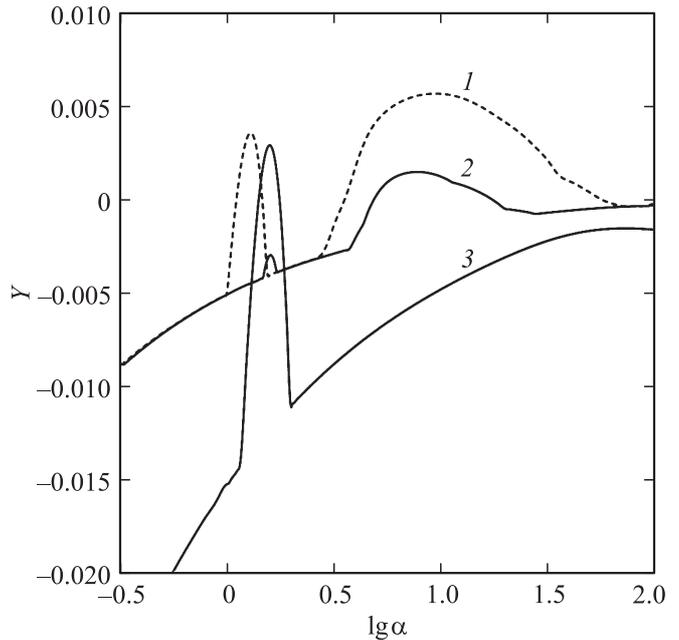


Рис. 7. Верхняя огибающая спектральных зависимостей  $Y(\alpha)$  при  $P_m = 1$ :  $Al = 0.01$  и  $Re = 0.5 \cdot 10^6$  (1),  $Al = 0.04$  и  $Re = 0.5 \cdot 10^6$  (2),  $Al = 0.01$  и  $Re = 0.5 \cdot 10^5$  (3).

мерных возмущений расположена слева от отрезка  $AB$ . Выше при числах Рейнольдса порядка  $10^6$  обнаружена новая ветвь неустойчивости. Ее кривая критических зависимостей справа загибается вверх и при  $Al_{*2} \approx 0.04$  „разворачивается“ влево аналогично нижней ветви критических зависимостей. Область неустойчивости трехмерных возмущений расположена слева от луча  $EF$ . Таким образом, при увеличении числа Альфвена обнаружены два критических числа Альфвена ( $Al_{*1}$  и  $Al_{*2}$ ), при которых происходит скачкообразное увеличение критических чисел Рейнольдса.

На рис. 6 представлены критические зависимости  $Re_*(Al)$  при  $P_m = 0.01, 0.1, 1.0$ . Расположение областей неустойчивости аналогично рис. 5. Кривая  $P_m = 0.01$  также аналогична представленной на рис. 5. Зависимости  $P_m = 0.1$  и 1 несколько отличаются, верхняя ветвь критических зависимостей почти прямая и слабо возрастает при увеличении числа Альфвена. На рис. 7 приведены верхние огибающие спектральных зависимостей  $Y(\alpha)$  при  $P_m = 1$ :  $Al = 0.01$  и  $Re = 10^6$ ,  $Al = 0.04$  и  $Re = 10^6$ ,  $Al = 0.01$  и  $Re = 10^5$ . Хорошо видно, что верхняя и нижняя ветви критических зависимостей обусловлены неустойчивостью разных спектральных мод при  $\alpha \approx 1$  и 10. В первом случае обе моды неустойчивы, во втором неустойчивы только коротковолновые моды, в третьем — только длинноволновые.

### Заключение

Увеличение числа Альфвена при определенных значениях параметров может приводить к скачкообразному

увеличению критических чисел Рейнольдса. Подтверждено существенное влияние диссипации на устойчивость данного течения. При изменении магнитного числа Прандтля наблюдается существенное изменение критических чисел Рейнольдса, причем может наблюдаться скачкообразная стабилизация. Для данного течения справедливы преобразования Сквайра. Однако существуют области, в которых двумерные возмущения затухают, а трехмерные неустойчивы.

Таким образом, картина устойчивости течения электропроводящей жидкости в плоском канале при наличии продольного магнитного поля достаточно сложна и своеобразна. Выполненный подробный анализ зависимостей критических чисел Рейнольдса от магнитного числа Прандтля позволил обнаружить новую ветвь неустойчивости при больших числах Рейнольдса. Современные возможности вычислительной техники и эффективные численные методы позволили произвести подробные исследования данной ветви неустойчивости при числах Рейнольдса порядка  $10^6 - 10^8$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“, контакт 14.740.11.0355

## Список литературы

- [1] *Michael D.H.* // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1953. Vol. 49. N 1. P. 166–168.
- [2] *Tatsumi T.* // Progr. Theoret. Phys. Suppl. 1962. N 24. P. 156–193.
- [3] *Бетцов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 262 с.
- [4] *Hunt J.C.R.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1966. Vol. 293. N 1434. P. 342–358.
- [5] *Stuart J.T.* // Proc. R. Soc. London. A. 1954. Vol. 221. P. 189–206.
- [6] *Велихов Е.П.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. Вып. 4. С. 1192–1202.
- [7] *Sung-Hwan Ko* // J. Fluid. Mech. 1968. Vol. 33. N 3. P. 433–444.
- [8] *Проскурин А.В., Сагалаков А.М.* // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. N 3. С. 45–53.
- [9] *Проскурин А.В., Сагалаков А.М.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. Вып. 5. С. 40–45.
- [10] *Thess A, Zikanov O.* // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 358. P. 299–333.
- [11] *Moresko P, Alboussier T.* // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 504. P. 167–181.
- [12] *Zikanov O.* // Phys. Fluids. 1996. Vol. 8. N 11. P. 2923–2932.
- [13] *Юдович В.И.* // ДАН СССР. 1965. Т. 161. № 5. С. 1037–1040.
- [14] *Юдович В.И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984. 191 с.
- [15] *Гольдитик М.А., Штерн В.Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 368 с.
- [16] *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
- [17] *Henningson D.S., Schmid P.J.* Stability and transition in shear flows. NY: Springer-Verlag Inc. 2001. 556 p.
- [18] *Сапожников В.А.* Численное решение задач гидродинамической устойчивости. Автореф. канд. дис. Новосибирск: Ин-т Теплофизики СО АН СССР, 1970.