01;05

Намагниченность коротких цилиндров жестких сверхпроводников второго рода и карта распределения экранирующего тока в модели Бина

© Н.Д. Кузьмичев, А.А. Федченко

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,
430005 Саранск, Россия
email: kuzmichevnd@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 29 июля 2011 г.)

Найдена простейшая аналитическая зависимость распределения экранирующего сверхпроводящего тока и рассчитана намагниченность в рамках модели Бина с учетом искривления линий магнитного поля, жестких сверхпроводников 2-го рода, имеющих форму цилиндров конечной длины и дисков (таблеток). На основе найденного распределения рассчитаны полная напряженность магнитного поля и петля гистерезиса намагниченности образцов вышеуказанной формы в разных случаях.

Введение

Магнитные свойства сверхпроводников 2-го рода и, в частности, высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) превлекают исследователей в силу их необычных свойств и их приложений. С точки зрения применений ВТСП в электро- и радиоизмерительной технике важно знать отклик различной геометрической формы сверхпроводников на переменное и постоянное магнитные поля. Для этого необходимо иметь карту распределения экранирующего сверхпроводящего тока (сверхтока) и намагниченность образца. Имеется немало работ по вышеотмеченной тематике как в отечественной, так и зарубежной литературе, например [1–7]. В простейших расчетах намагниченности жестких сверхпроводников 2-го рода, находящихся в критическом состоянии, принималась полная экранировка внешнего поля в центре образца или на его оси, например, цилиндра или пластины. В этом случае сверхпроводник разбивается на замкнутые области прямоугольного сечения с противоположно текущими сверхтоками, экранирующими возрастающие и убывающие внешние магнитные поля. Указанное приближение не в полной мере отражает реальное положение дел в геометрии, отличной от геометрии бесконечно длинного цилиндра или эллипсоида.

Впервые точное аналитическое выражение для распределения сверхтока для бесконечно тонких дисков найдено Михеенко и Кузовлевым в работе [3]. В работах Брандта, например, в [5] численным методом решения интегрального уравнения 2-го рода получены численные распределения сверхтока в цилиндрах любой длины. Для этого интегральное уравнение 1-го рода было сведено к уравнению 2-го рода путем задания явного вида вольт-амперной характеристики сверхпроводника с помощью уравнений электродинамики, описывающих сверхпроводник. Численные зависимости не всегда удобны, и их нахождение для конкретных случаев требует на каждом этапе численных решений интегральных уравнений. В связи с этим возникает необходимость иметь в своем арсенале аналитическое выражение распределения экранирующего сверхтока в сверхпроводнике, имеющем форму, например, цилиндра любой длины.

1. Постановка задачи и модель расчета

В настоящей работе найдено приближенное аналитическое решение интегрального уравнения, описывающего распределение экранирующего критического тока, и численно смоделирован процесс проникновения магнитного поля в короткий цилиндр жесткого сверхпроводника 2-го рода, находящегося в критическом состоянии в рамках модели Бина [1] с учетом искривления силовых линий магнитного поля. Магнитное поле в такие сверхпроводники проникает в виде потока, образованного нитями Абрикосова, и распространяется фронтом внутрь сверхпроводника, преодолевая силу пиннинга. Силовые линии магнитного поля как внутри такого сверхпроводника, так и вне его искривлены. Изменение магнитного потока внутри указанного сверхпроводника вызывает в области проникновения нитей Абрикосова электрическое поле, которое, в свою очередь, мгновенно создает экранирующий сверхток с критической плотностью J_c. В модели Бина величина J_c не зависит от локальной плотности магнитного потока.

Полное магнитное поле (сумма внешнего аксиально-направленного поля и поля, созданного экранирующим сверхтоком) определяется уравнениями, записанными в цилиндрической системе координат [2,5,8]. В цилиндрической системе координат аксиальная составляющая напряженности полного магнитного поля определяется выражением

$$H_z(r,z) = H_0 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-b}^{+b} dz' \int\limits_{0}^{R} G_z(r,z,r',z')J(r',z')dr'. \tag{1}$$

Здесь

$$G_z(r, z, r', z') = \frac{1}{\sqrt{(r' + r)^2 + (z - z')^2}} \times \left[K(k) + \frac{r'^2 - r^2 - (z - z')^2}{(r' - r)^2 + (z - z')^2} E(k)\right]$$

и

$$k^2 = \frac{4rr'}{(r' + r)^2 + (z - z')^2}.$$

Радиальная составляющая полного поля есть

$$H_r(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-b}^{+b} dz' \int\limits_{0}^{R} G_r(r, z, r', z') J(r', z') dr', \quad (2)$$

где

$$G_r(r, z, r', z') = \frac{z - z'}{r\sqrt{(r' + r)^2 + (z - z')^2}} \times \left[-K(k) + \frac{r'^2 + r^2 + (z - z')^2}{(r' - r)^2 + (z - z')^2} E(k)\right].$$

Здесь H_0 — напряженность внешнего аксиально-направленного магнитного поля, $J(r, z)$ — экранирующий сверхток, который направлен в силу симметрии вдоль орта $\boldsymbol{\varphi}$ и не зависит от полярного угла φ, $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы, R — радиус и $d = 2b$ — длина (толщина) цилиндра (диска).

Также в силу симметрии осевая H_z (уравнение (1)) и радиальная H_r (уравнение (2)) составляющие напряженности полного магнитного поля не зависят от угла φ. При $z \to \infty$ и (или) $r \to \infty$ составляющие поля стремятся к $H_z \to H_0$ и $H_r \to 0$. В области сверхпроводника, где сверхток отсутствует (экранированная область), т. е. $J(r, z) = 0$, величины $H_z = 0$ и $H_r = 0$. Эти условия являются граничными для уравнений (1) и (2).

Найденная приближенная аналитическая зависимость экранирующего сверхтока $J(r, z)$ в модели Бина имеет вид (рис. 1)

$$J(r, z) = \left\{ \begin{matrix} J_c = \text{const}, & \text{при} \quad r, z \in D^+; \\ 0, & \text{при} \quad r, z \in D^- \end{matrix} \right\}. \quad (3)$$

Область D^+ проникновения вихрей в цилиндр от областей D^-, в которой вихри отсутствуют (т. е. область, в которой $J(r, z) = 0$), отделяется поверхностью, заданной уравнением

$$z(r) = b \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{r}{a} \sqrt{\frac{1 - (a/R)^2}{1 - (r/a)^2}} \right] \right\}^{p(a)}. \quad (4)$$

Здесь a — радиус проникновения поля при $z = 0$ (см. рис. 1). Показатель степени $p(a)$ меняется в пределах: $0 < p(a) < 2$ и зависит также от отношения b/R. Учитывая, что в области D^- выполнятся равенства $H_z = 0$ и $H_r = 0$, параметр p можно определить из условия минимума целевой функции

$$S_{z,r}(p) = \frac{1}{N} \sum_{r_i, z_j \in D^-} \left| \frac{H_{z,r}(r_i, z_j, p)}{H_0} \right| \le \varepsilon. \quad (5)$$

Здесь N есть число выбранных точек в области D^-, а величина ε определяет точность найденного решения интегральных уравнений (1) и (2). В нашем случае она составляла менее 0.01 (1%). В случае точных решений $S = 0$.

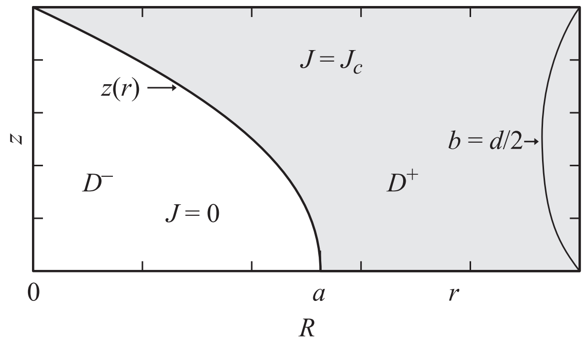

Рис. 1. Сечение четверти сверхпроводящего цилиндра. Закрашенная область D^+ несет ток с критической плотностью J_c и отделена от области D^- поверхностью, заданной уравнением $z(r)$ (4).

2. Алгоритм и структура программы

Для того чтобы рассчитать величину напряженности магнитного поля во всем объеме сверхпроводящего образца и в окружающем его пространстве, была разработана специальная программа на языке C# [9]. Она позволяет достаточно быстро и с заданной точностью произвести расчет карты распределения аксиальной (1)

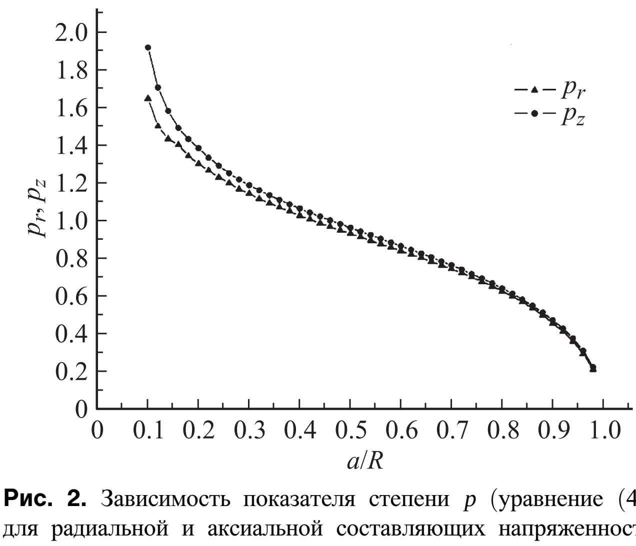

Рис. 2. Зависимость показателя степени p (уравнение (4)) для радиальной и аксиальной составляющих напряженности полного магнитного поля.

и радиальной (2) составляющих напряженности магнитного поля, а также намагниченности образца в целом.

При вычислении использовалась сетка 100×50 (100 шагов вдоль радиуса r и 50 вдоль оси z). Для каждого узла этой сетки рассчитываются соответствующие ей величины H_z и H_r при заданной величине напряженности H_0 внешнего магнитного поля. Основное „ядро“ решения — это вычисление значения двойного интеграла, определяемого уравнениями (1) и (2). При этом важно было подобрать верный численный метод для решения этой части задачи, обладающий устойчивостью. Также важной частью решаемой задачи было вычисление оптимальной величины параметра p, определяемого выражением (5). Для его нахождения при помощи программы была решена отдельная задача оптимизации. Был применен численный метод поиска экстремума функции известный как метод „золотого сечения“ [10]. Он был выбран из-за его достаточно высокой скорости сходимости. В качестве целевой функции при решении данной задачи оптимизации была выбрана сумма отклонений S (см. (5)) для области ($N = 200$ точек), в которой отсутствует магнитное поле (область D^- на рис. 1).

Для каждой составляющей H_z и H_r оптимальное значение параметра p было рассчитано отдельно. Однако можно отметить, что параметры для радиальной p_r и аксиальной p_z составляющих поля (см. рис. 2) несколько отличаются при проникновении поля на большую величину. Данное расхождение обусловлено приближенным характером выражения (4).

3. Результаты расчета магнитного поля и намагниченности

Полученный в итоге двумерный массив представляет собой распределение напряженности магнитного поля в одной четверти фронтального сечения сверхпроводящего образца. Трехмерный график, демонстрирующий это распределение поля H_z для цилиндра с $d/2R = 0.25$, представлен на рис. 3. При этом принималось, что внешнее поле проникло на глубину 0.5 от радиуса образца R. Можно заметить, что внутренняя область образца D^-, не затронутая магнитным полем, образует почти ровную поверхность, контур которой определяется уравнением (4). В то же время в остальной области напряженности поля отлична от нуля, а на границе сверхпроводника наблюдается значительный острый „скачок“ напряженности. При большом удалении от образца значение поля стремится к величине внешнего поля H_0, как было отмечено в разд. 1.

Аналогичный график для другой составляющей — H_r представлен на рис. 4. Вне объема сверхпроводника напряженность радиальной составляющей близится к нулю, так как суммарный вектор напряженности внешнего магнитного поля направлен вдоль оси вращения образца.

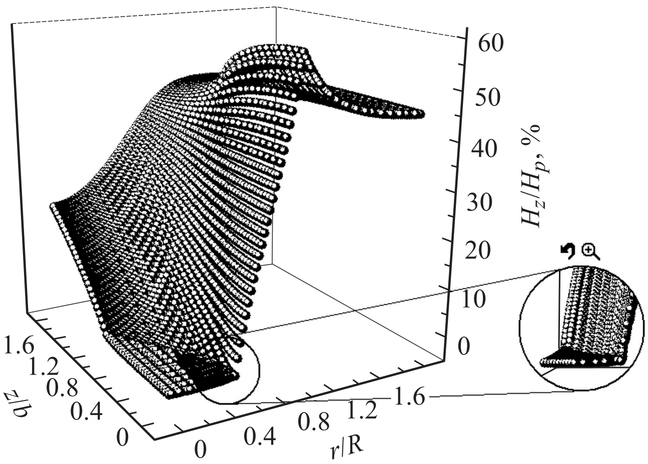

Рис. 3. Трехмерный график карты распределения осевой составляющей напряженности полного магнитного поля $H_z(r, z)$. Значения напряженности указаны в процентах от величины напряженности поля полного проникновения H_p. Внешнее аксиально-направленное поле H_0 составляет $H_0 = 0.45H_p$. Радиус проникновения поля при $z = 0$ составляет $a = 0.5R$.

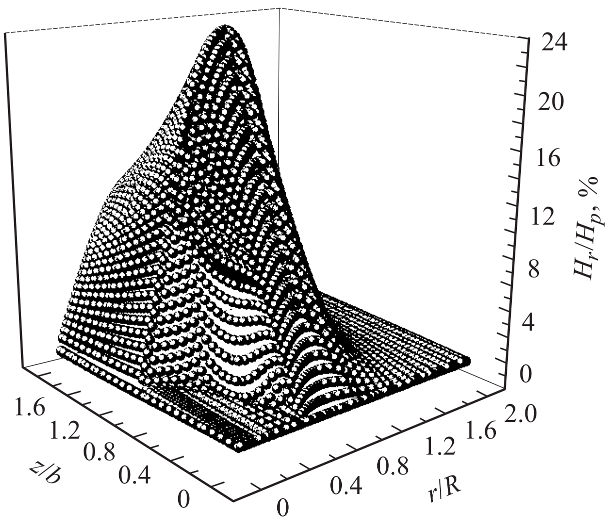

Рис. 4. Трехмерный график карты распределения радиальной составляющей напряженности полного магнитного поля $H_r(r, z)$. Значения напряженности указаны в процентах от величины напряженности поля полного проникновения H_p. Внешнее аксиально-направленное поле H_0 составляет $H_0 = 0.45H_p$. Радиус проникновения поля при $z = 0$ составляет $a = 0.5R$.

На рис. 5 изображены проекции для аксиальной составляющей поля $H_z(r)$ при $z = 0$ (вдоль радиуса образца), $z = 0.6b$ и при $z = b = d/2$ (на поверхности образца). Радиус a проникновения поля при $z = 0$ есть $z = 0.5R$. Аналогичные проекции для радиальной составляющей $H_r(r)$ при $z = 0.2b$, $z = 0.6b$ и для $z = b$ изображены на рис. 6. На рис. 7 приведены графики $H_z(z)$ и $H_r(z)$ при $r = 0.2R$.

Начальная кривая и петля гистерезиса намагниченности приведены на рис. 8. Расчет производился по найденному распределению экранирующего сверхтока. Намагниченность **M** сверхпроводника вычислялась согласно формуле, используемой для определения магнитного момента системы токов [8], учитывая, что экранирующий ток в силу цилиндрической симметрии является азимутальным:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2V} \iint_{D^+} [\mathbf{r}, \mathbf{J}_c] dV. \qquad (6)$$

Здесь V — объем сверхпроводника, D^+ — область внутренней части цилиндра, занятая сверхтоком. Интеграл (6) разбивается на сумму нескольких интегралов с противоположно текущими сверхтоками. На рис. 8 приведены кривые намагниченности для разных величин максимальных полей циклов намагниченности. По оси абсцисс отложена напряженность магнитного поля в

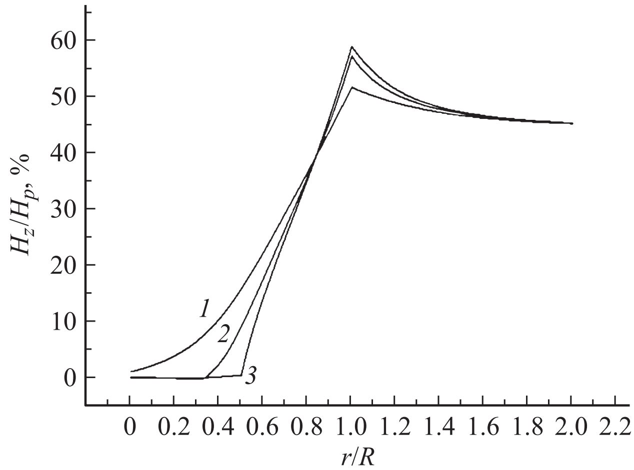

Рис. 5. Аксиальная составляющая полного поля цилиндра $H_z(r)$ в плоскостях $z = b$ (кривая *1*), $z = 0.6b$ (кривая *2*) и $z = 0$ (кривая *3*). Величина поля указана в процентах от H_p. Радиус проникновения поля при $z = 0$ составляет $a = 0.5R$.

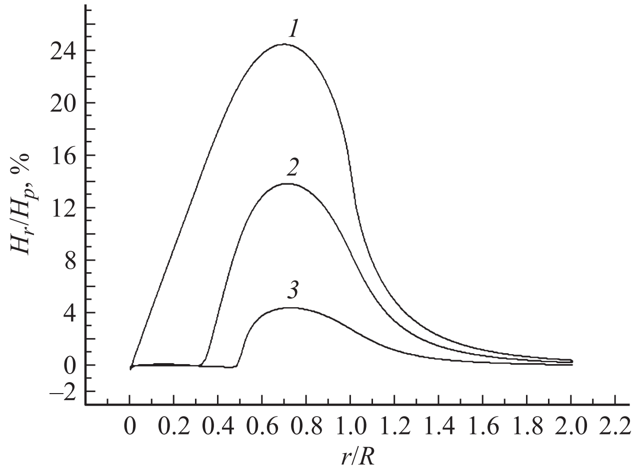

Рис. 6. Радиальная составляющая полного поля цилиндра $H_r(r)$ в плоскостях $z = b$ (кривая *1*), $z = 0.6b$ (кривая *2*) и $z = 0.2b$ (кривая *3*). Величина поля указана в процентах от H_p. Радиус проникновения поля при $z = 0$ составляет $a = 0.5R$.

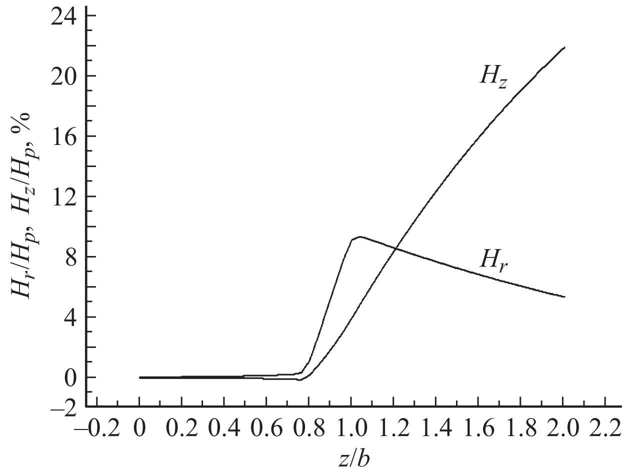

Рис. 7. Аксиальная и радиальная составляющие полного поля цилиндра на поверхности цилиндра $r = 0.2R$. Величина поля указана в процентах от H_p. Радиус проникновения поля при $z = 0$ составляет $a = 0.5R$.

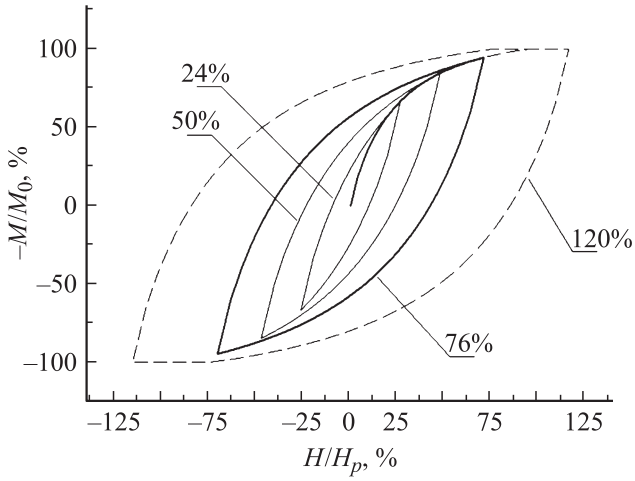

Рис. 8. Начальная кривая намагниченности и петли гистерезиса намагниченности для разных значений максимальных полей цикла намагничивания $H_{\max}$. Значение поля указано в процентах от H_p, а величина намагниченности указана в единицах намагниченности насыщения.

единицах поля полного проникновения H_p, т.е. напряженности внешнего магнитного поля, при котором весь объем сверхпроводника будет занят экранирующим сверхтоком одного направления. По оси ординат отложена намагниченность цилиндра в единицах намагниченности насыщения M_0 (иначе в единицах $M(H_p)$).

4. Заключение

Основным результатом работы является найденная простая аналитическая зависимость распределения экранирующего сверхтока в рамках модели Бина с учетом искривления силовых линий магнитного поля, жестких сверхпроводников 2-го рода, имеющих форму цилиндров конечной длины и дисков (таблеток). Данная зависимость включает единственный параметр p (показатель степени), который легко определяется нахождением минимума целевой функции. Целевая функция строится на экранированной области цилиндра и является по своей сути отклонением точного значения поля от приближенного. Расчеты радиальной и аксиальной составляющих поля показали правильность выбора методики. Разработанную методику можно применять и в случае полевой зависимости критической плотности тока. В этом случае интегральные уравнения (1) и (2) будут нелинейными. В качестве начального приближения можно использовать полученные в работе выражения. Результаты работы можно использовать, например, при разработке магнитометра слабых магнитных полей [11] на основе ВТСП-поликристаллов. Как было показано в работах [12,13], экранирующий сверхток в таких системах в слабых магнитных полях не зависит от величины поля.

Список литературы

[1] *Bean C.P.* // Phys. Rev. Lett. 1962. Vol. 8. P. 250–251.
[2] *Frankel D.* // J. Appl. Phys. 1979. Vol. 50. P. 5402–5407.
[3] *Mikheenko P.N., Kuzovlev Yu.E.* // Physica C. 1993. Vol. 204. P. 229–236.
[4] *Clem J.R., Sanchez Alvaro* // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 50. P. 9355–9362.
[5] *Brandt E.H.* // Phys. Rev. B. 1998. Vol. 58. P. 6506–6522.
[6] *Кузьмичев Н.Д.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 12. С. 63–74.
[7] *Кузьмичев Н.Д., Славкин В.В.* // ФТТ. 2007. Т. 49. Вып. 9. С. 1549–1553.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.
[9] *Шилдт Г.* Полный справочник по C#. М.: Издательский дом „Вильямс“, 2004. 752 с.
[10] *Турчак Л.И., Плотников П.В.* Основы численных методов. М.: Физматлит, 2005. 304 с.
[11] *Головашкин А.И., Кузьмичев Н.Д., Славкин В.В.* // ЖТФ. 2006. Т. 18. Вып. 3. С. 373–377.
[12] *Кузьмичев Н.Д.* // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 74. Вып. 5. С. 291–295.
[13] *Кузьмичев Н.Д.* // ФТТ. 2001. Т. 43. Вып. 11. С. 1934–1938.