01

Построение некоторых ядер нелинейного интеграла столкновений уравнения Больцмана с помощью преобразования Лапласа

© А.Я. Эндер,[1] И.А. Эндер,[2] Л.А. Бакалейников,[1] Е.Ю. Флегонтова[1]

[1] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: andrei.ender@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 7 сентября 2011 г.)

Показано, что связь между ядрами $L_l(v, v_1)$ линейного интеграла столкновений и ядрами $G^l_{l,0}(v, v_1, v_2)$ нелинейного интеграла столкновений сводится к преобразованию Лапласа. В случае твердых шаров и псевдомаксвелловских молекул найдены аналитические выражения для нелинейных ядер $G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2)$, $G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2)$.

Введение

При решении уравнения Больцмана часто используется разложение функции распределения (ФР) по некоторым базисным функциям. При разложении ФР по сферическим гармоникам уравнение Больцмана сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений с набором интегральных операторов, полученных при разложении интеграла столкновений [1,2]. Вычисление ядер этих операторов даже в линейном варианте, вообще говоря, представляет существенную трудность. В линейном или линеаризованном случаях ядра интеграла столкновений для газа из твердых шаров были найдены в аналитическом виде Гильбертом и Гекке [3,4]. Линейные ядра в случае газа из псевдомаксвелловских молекул, когда сечение рассеяния обратно пропорционально относительной скорости сталкивающихся частиц и не зависит от угла, были построены аналитически в работе [5].

Следует отметить, что переход к ядрам в интеграле столкновений приводит к сильным упрощениям при решении кинетического уравнения. В частности, использование ядер дало возможность получить ряд интересных результатов для граничных задач в динамике разреженного газа [6,7]. Подчеркнем, что пока все эти результаты получены только для линейного уравнения Больцмана. В работе [8] для произвольных сечений взаимодействия частиц получены рекуррентные связи для нелинейных ядер $G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$. Для этих рекуррентов стартовыми являются ядра изотропной задачи $G^0_{0,0}(v, v_1, v_2)$. Ясно, насколько важным становится теперь построение ядер $G^0_{0,0}(v, v_1, v_2)$.

В настоящей работе показано, что связь, существующая между линейными и нелинейными ядрами, сводится к преобразованию Лапласа (разд. 1), что позволяет в ряде случаев найти аналитические выражения для нелинейных ядер.

Чтобы применить преобразование Лапласа, необходимо знать зависимость линейного ядра $L_l(v, v_1)$ от температуры. При использовании результатов работ [3–5] и аппарата преобразования Лапласа удалось построить нелинейные ядра $G^0_{0,0}(v, v_1, v_2)$ и $G^1_{1,0}(v, v_1, v_2)$ для газа из псевдомаксвелловских молекул (разд. 2 и 5) и твердых шаров (разд. 3 и 4) в виде элементарных функций.

1. Связь между линейными и нелинейными ядрами интеграла столкновений

Рассмотрим нелинейный интеграл столкновений в уравнении Больцмана, описывающий скорость изменения ФР частиц сорта a при их взаимодействии с частицами сорта b. При изучении ядер, не ограничивая общности, можно производить разложение ФР не по сферическим гармоникам, а по полиномам Лежандра [1]. Поэтому достаточно рассмотреть осесимметричный случай, когда интеграл столкновений выражается через ядра $G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$ следующим образом:

$$\left(\frac{\partial f_a(\mathbf{v})}{\partial t}\right)\Bigg|^{(a,b)}_{col} = \iint G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) f_a(\mathbf{v}_1) f_b(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2$$

$$= \sum_{l,l_1,l_2} P_l(x)\left(\int_0^\infty\int_0^\infty G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2) f^a_{l_1}(v_1) f^b_{l_2}(v_2) v_1^2 v_2^2 dv_1 dv_2\right), \tag{1}$$

где $f^a_l(v)$ и $f^b_l(v)$ — коэффициенты разложения функций распределения $f^a(\mathbf{v})$ и $f^b(\mathbf{v})$ по полиномам Лежандра, а ядра $G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$ зависят только от величин скоростей и представляют собой коэффициенты разложения по полиномам Лежандра ядра $G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ [2].

В кинетической теории в основном рассматриваются неориентированные частицы. В этом случае дифференциальное сечение рассеяния зависит только от модуля относительной скорости сталкивающихся частиц g и угла рассеяния θ, а нелинейные ядра $G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$ могут быть отличны от нуля, только если $|l_1 - l_2| \le l \le l_1 + l_2$ и $l + l_1 + l_2$ — четное число [1]. Столкновительный оператор для простого газа можно получить, если считать частицы a и b одинаковыми. В случае простого газа из-за симметрии произведения $f_{l_1}(v_1)f_{l_2}(v_2)$ относительно одновременной перестановки v_1, v_2 и l_1, l_2 ядро $G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$ можно заменить на $G^{*l}_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2) = (1/2)\big(G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2) + G^l_{l_2,l_1}(v, v_2, v_1)\big)$. В настоящей работе, как и в предыдущих работах, авторы рассматривают несимметризованные ядра, которые могут быть использованы как для простого газа, так и для смеси частиц с равными массами.

Часто в интеграле столкновений (1) можно выделить части, соответствующие обратным (gain term) и прямым (loss term) столкновениям. В дальнейшем нас будут интересовать ядра интеграла обратных столкновений G^+.

При малых отклонениях от равновесия или при рассеянии примеси на равновесном фоновом газе уравнение Больцмана становится линейным. При этом ядра линейного и нелинейного интегралов столкновений связаны соотношением (более подробно см. [2])

$$L^+_l(v, v_1; \alpha) = \int\limits_0^\infty G^{+l}_{l,0}(v, v_1, v_2) M(v_2, \alpha) v_2^2 dv_2. \tag{2}$$

Здесь $M(v, \alpha) = (\alpha/\pi)^{3/2}\exp(-\alpha v^2)$ — максвеллиан, а параметр $\alpha = m/2kT = 1/v_T^2$, где T — фоновая температура, v_T — тепловая скорость.

Помимо ядер (2), которые мы называем линейными ядрами первого рода, существуют линейные ядра второго рода:

$$L^{+,2}_l(v, v_2; \alpha) = \int\limits_0^\infty G^{+l}_{0,l}(v, v_1, v_2) M(v_1, \alpha) v_1^2 dv_1.$$

В настоящей работе рассматриваются только изотропные сечения рассеяния. В этом случае ядра G^+ симметричны относительно одновременной перестановки v_1, v_2 и l_1, l_2, т.е. $G^{+l}_{l,0}(v, v_1, v_2) = G^{+l}_{0,l}(v, v_2, v_1)$ и линейные ядра первого и второго рода равны.

Возвращаясь к формуле (2), отметим, что в нее входят только нелинейные ядра с индексами $l = l_1, l_2 = 0$. В [3–5] линейные ядра были построены при фиксированной температуре в безразмерных переменных $c = v/v_T$. Для дальнейшего нам понадобится перейти к размерным скоростям. Используем в (2) переменные

$$w = v^2, \quad w_1 = v_1^2, \quad t = v_2^2. \tag{3}$$

Тогда получим

$$2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} L^+_l\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}; \alpha\right) = \int\limits_0^\infty G^{+l}_{l,0}\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t}\right)\exp(-\alpha t) t^{1/2} dt. \tag{4}$$

Интеграл, стоящий в правой части уравнения (4), можно рассматривать как преобразование Лапласа $\hat{\mathfrak{L}}_{\alpha,t}$ от переменной t к переменной α:

$$2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} L^+_l\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}; \alpha\right) = \hat{\mathfrak{L}}_{\alpha,t}\left[G^{+l}_{l,0}\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t}\right) t^{1/2}\right].$$

Если функция $L^+_l(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}; \alpha)$ известна, то нелинейное ядро $G^{+l}_{l,0}(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t})$ может быть получено с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$G^{+l}_{l,0}\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t}\right) = \frac{2\pi^{3/2}}{t^{1/2}}\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left[\alpha^{-3/2} L^+_l\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}; \alpha\right)\right]. \tag{5}$$

Линейные ядра следующим образом выражаются через матричные элементы интеграла столкновений и полиномы Сонина [2]:

$$L^+_l\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}; \alpha\right) = M(c)\sum_{r,r_1} c^l S^r_{l+1/2}(c^2)\Lambda^+_{r,r_1,l}(\alpha)\,\frac{c_1^l S^{r_1}_{l+1/2}(c_1^2)}{\sigma_{r_1 l}}, \tag{6}$$

где $c = \sqrt{\alpha w}$, $c_1 = \sqrt{\alpha w_1}$, а размерные линейные матричные элементы $\Lambda^+_{r,r_1,l}(\alpha)$ представляют собой коэффициенты разложения линейного интеграла столкновений по произведениям полиномов Сонина и полиномов Лежандра (функциям Барнетта).

Свойства матричных элементов подробно изучались в [1]. В случае степенных потенциалов ($V \propto 1/r^\kappa$) матричные элементы $\Lambda^+_{r,r_1,l}(\alpha) \propto \alpha^{-\mu}$, где $\mu = (\kappa - 4)/2\kappa$. Следовательно, для степенных потенциалов можно записать

$$L^+_l\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}; \alpha\right) = \mathfrak{G}_\mu \alpha^{3/2-\mu}\,\tilde{L}^+_l\left(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1}\right). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), для степенных потенциалов получаем

$$G^{+l}_{l,0}\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t}\right) = \mathfrak{G}_\mu\frac{2\pi^{3/2}}{t^{1/2}}\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left[\frac{1}{\alpha^\mu}\tilde{L}^+_l\left(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1}\right)\right]. \tag{8}$$

Здесь размерная константа $\mathfrak{G}_\mu$ не зависит от α, а безразмерное линейное ядро $\tilde{L}^+_l(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1})$ зависит от α только в комбинациях $\sqrt{\alpha w}$ и $\sqrt{\alpha w_1}$.

Интегральное преобразование $\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}$ не всегда может быть выполнено аналитически. Ниже рассмотрим несколько случаев, когда ядра удается выразить через элементарные функции. При этом будут использованы формулы для ядер $\tilde{L}^+_l$ в случае твердых шаров ($\mu = 0.5$) [4] и псевдомаксвелловских молекул ($\mu = 0$) [5]. В наших предыдущих работах эти ядра обозначались L^+_l.

2. Нелинейное ядро $G_{0,0}^{+0}(v, v_1, v_2)$ для газа из псевдомаксвелловских молекул

Для псевдомаксвелловских молекул линейное ядро $\tilde{L}_0^+$ имеет вид [5]

$$\tilde{L}_0^+\left(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha\sqrt{w w_1}} \exp(\alpha w_1)$$
$$\times \Big(\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\alpha w}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha w_1}\right) \Theta(w - w_1)$$
$$+ \operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha w}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\alpha w_1}\right) \Theta(w_1 - w)\Big), \qquad (9)$$

где $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\Theta(x) = 1$ при $x > 0$. Введем обозначение $q(x) = e^x \operatorname{erfc}\left(\sqrt{x}\right)$ и учтем, что $e^x \operatorname{erf}\left(\sqrt{x}\right) = \left(e^x - q(x)\right)$. Тогда линейное ядро (9) можно представить в виде следующего произведения:

$$\tilde{L}_0^+\left(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1}\right) = \frac{2\pi^{1/2}}{\sqrt{w w_1}} \frac{f_{mm}(\alpha, w, w_1)}{\alpha}, \qquad (10)$$

где функция f_{mm} имеет вид

$$f_{mm}(\alpha, w, w_1) = \begin{cases} e^{-(w-w_1)\alpha} q(w\alpha) - e^{-w\alpha} q(w_1\alpha) q(w\alpha), & w_1 < w, \\ q(w_1\alpha) - e^{-w\alpha} q(w_1\alpha) q(w\alpha), & w < w_1. \end{cases} \qquad (11)$$

Обратное преобразование Лапласа от $q(w\alpha)$ известно (см [9] 5.12(12), стр. 237)

$$Q(w, t) = \hat{\mathfrak{L}}_{\alpha,t}^{-1}[q(w\alpha)] = \frac{\sqrt{w}}{\pi\sqrt{t}(t + w)}. \qquad (12)$$

При обратном преобразовании Лапласа оригинал произведения функций вычисляется как свертка оригиналов сомножителей. Таким образом,

$$\hat{\mathfrak{L}}_{\alpha,t}^{-1}[q(w\alpha) q(w_1\alpha)] = \int_0^t Q(w_1, \tau) Q\big(w, (t - \tau)\big) d\tau. \quad (13)$$

Подынтегральную функцию можно привести к виду

$$Q(w_1, \tau) Q\big(w, (t - \tau)\big) = \frac{\sqrt{w w_1}}{\pi^2} \frac{1}{t + w + w_1}$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{t\tau - \tau^2}} \left(\frac{1}{\tau + w_1} - \frac{1}{\tau - t - w}\right). \quad (14)$$

После замены переменной $z = 1/(\tau + d)$, где $d = w_1$ и $d = -t - w$ соответственно для первой и второй дроби в круглых скобках, каждое из слагаемых в (14) принимает вид (2.261) из [10]:

$$\int_{1/(d+t)}^{1/d} \frac{dz}{\sqrt{A + Bz + Cz^2}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{-C}} \left(\arcsin \frac{2C/d + B}{\sqrt{B^2 - 4AC}} - \arcsin \frac{2C/(d+t) + B}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right), \qquad (15)$$

где $A = -1$, $B = t + 2d$, $C = -td - d^2$. Используя (14) и (15), из (13) получим

$$\hat{\mathfrak{L}}_{\alpha,t}^{-1}[q(w\alpha) q(w_1\alpha)] = \frac{\sqrt{w w_1}}{\pi^2} \frac{1}{t + w + w_1}$$
$$\times \left(\frac{\pi}{\sqrt{w(t + w)}} + \frac{\pi}{\sqrt{w_1(t + w_1)}}\right). \qquad (16)$$

Таким образом, показано, что для $t > 0$

$$\hat{\mathfrak{L}}_{\alpha,t}^{-1}[q(w\alpha) q(w_1\alpha)] = Q(w_1, t + w) + Q(w, t + w_1). \qquad (17)$$

Умножение изображения на экспоненту равносильно сдвигу в оригинале

$$\hat{\mathfrak{L}}_{\alpha,t}^{-1}[q(w\alpha) e^{-b\alpha}] = Q(w, t - b)\Theta(t - b). \qquad (18)$$

Используя (17), (18) и (11), получим

$$\phi(w, w_1, t) = \hat{\mathfrak{L}}_{\alpha,t}^{-1}[f_{mm}(\alpha, w, w_1)]$$
$$= \big[Q(w, t + w_1 - w)\Theta(t + w_1 - w) - \big(Q(w_1, t)$$
$$+ Q(w, t + w_1 - w)\big)\Theta(t - w)\big]\Theta(w - w_1) + \big[Q(w_1, t)$$
$$- \big(Q(w_1, t) + Q(w, t + w_1 - w)\big)\Theta(t - w)\big]\Theta(w_1 - w). \qquad (19)$$

Умножению изображения на $1/\alpha$ соответствует интегрирование оригинала от 0 до t:

$$\hat{\mathfrak{L}}_{\alpha,t}^{-1}\left[\frac{f_{mm}(\alpha, w, w_1)}{\alpha}\right] = \int_0^t \phi(w, w_1, \tau) d\tau. \qquad (20)$$

Теперь с помощью найденного оригинала легко вычислить нелинейное ядро $G_{0,0}^{+0}(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t})$. Поскольку для максвелловских молекул $\mu = 0$, то из (8), (10) и (20) имеем

$$G_{0,0}^{+0}\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t}\right) = \mathfrak{G}_0 \frac{4\pi^2}{\sqrt{w w_1 t}} \int_0^t \phi(w, w_1, \tau) d\tau. \qquad (21)$$

Анализируя выражение для подынтегральной функции (19), легко увидеть что $\phi(w, w_1, \tau)$ равна нулю, если $w > w_1 + \tau$ и, следовательно, нелинейное ядро $G_{0,0}^{+0}(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t})$ при $w > w_1 + t$ обращается в нуль. При $w < w_1 + t$ в области изменения аргументов можно выделить 4 подобласти, в каждой из которых результат интегрирования выражается через следующий неопределенный интеграл:

$$\int Q(b,x)dx = \frac{\sqrt{b}}{\pi}\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+b)}dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{x/b}. \tag{22}$$

Возвращаясь к переменным $v = \sqrt{w}$, $v_1 = \sqrt{w_1}$, $v_2 = \sqrt{t}$ и воспользовавшись тождеством $\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(1/x) = \pi/2$, легко получить окончательный результат в виде

$$G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2) = 0, \quad v_1^2 + v_2^2 < v^2, \tag{23}$$

$$G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_0 \frac{8\pi}{vv_1v_2}\operatorname{arctg}\sqrt{\left(v_1^2+v_2^2-v^2\right)/v^2},$$
$$v_1 < v, \quad v^2 - v_1^2 < v_2^2 < v^2, \tag{24}$$

$$G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_0 \frac{4\pi^2}{vv_1v_2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(v_2/v_1)\right),$$
$$v_1 < v, \quad v < v_2, \tag{25}$$

$$G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_0 \frac{8\pi}{vv_1v_2}\operatorname{arctg}(v_2/v_1),$$
$$v < v_1, \quad v_2 < v, \tag{26}$$

$$G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_0 \frac{4\pi^2}{vv_1v_2}$$
$$\times\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\left(v_1^2+v_2^2-v^2\right)/v^2}\right),$$
$$v < v_1, \quad v < v_2. \tag{27}$$

Из формул (23)–(27) легко показать, что ядро непрерывно на границах областей.

3. Нелинейное ядро $G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2)$ для газа из твердых шаров

Как уже отмечалось выше, разложение линейного приходного ядра по сферическим гармоникам в случае твердых шаров было построено Гекке [4]. После некоторых упрощений для $l = 0$ имеем [11]

$$\tilde{L}_0^+\left(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\alpha w}\sqrt{\alpha w_1}}\Big(e^{\alpha w_1 - \alpha w}\operatorname{erf}(\sqrt{\alpha w_1})\,\Theta\left(\sqrt{\alpha w} - \sqrt{\alpha w_1}\right)$$
$$+ \operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha w}\right)\Theta\left(\sqrt{\alpha w_1} - \sqrt{\alpha w}\right)\Big). \tag{28}$$

Для твердых шаров ($\mu = 0.5$) при $l = 0$ формулу (8) можно записать в виде

$$G^{+0}_{0,0}\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t}\right)$$
$$= \mathfrak{G}_{1/2}\frac{2\pi^{3/2}}{t^{1/2}}\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left[\frac{\tilde{L}_0^+\left(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1}\right)}{\sqrt{\alpha}}\right]$$
$$= \mathfrak{G}_{1/2}\frac{4\pi^{3/2}}{(ww_1t)^{1/2}}\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left[f_{hs}(\alpha, w, w_1)\right]. \tag{29}$$

Здесь

$$f_{hs}(\alpha; w, w_1)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha^{3/2}}\, e^{-\alpha(w-w_1)}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha w_1}\right), & w_1 < w, \\ \frac{1}{\alpha^{3/2}}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha w}\right), & w < w_1. \end{cases} \tag{30}$$

Из [9] (5.12(10), стр. 237) имеем при любом $b > 0$

$$\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left[\frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{b\alpha}\right)}{\alpha^{1/2}}\right] = \frac{\Theta(b-t)}{\sqrt{\pi}\sqrt{t}}. \tag{31}$$

Как уже отмечалось выше, умножению изображения на $1/\alpha$ соответствует интегрирование оригинала в пределах от нуля до t. В результате получаем

$$\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left[\frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{b\alpha}\right)}{\alpha^{3/2}}\right]$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\Theta(b-t)\sqrt{t} + \Theta(t-b)\sqrt{b}\right)\Theta(t). \tag{32}$$

Используя (32) и учитывая с помощью сдвига экспоненциальный множитель в (30), получаем в области $w_1 < w$

$$\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left[f_{hs}(\alpha, w, w_1)\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\Theta(t + w_1 - w)\Theta(w - t)$$
$$\times\sqrt{t + w_1 - w} + \Theta(t - w)\sqrt{w_1}\Big). \tag{33}$$

В области $w < w_1$ оригинал от $f_{hs}(\alpha, w, w_1)$ имеет вид

$$\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left[f_{hs}(\alpha, w, w_1)\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big(\Theta(w-t)\sqrt{t} + \Theta(t-w)\sqrt{w}\Big). \tag{34}$$

Возвращаясь к переменным v, v_1, v_2, выпишем окончательные выражения для ядра

$$G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2) = 0, \quad v_1^2 + v_2^2 < v^2, \tag{35}$$

$$G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_{1/2}\frac{8\pi}{v_1v_2}\sqrt{\left(v_1^2+v_2^2-v^2\right)/v^2},$$
$$v_1 < v, \quad v^2 - v_1^2 < v_2^2 < v^2, \tag{36}$$

$$G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_{1/2}\frac{8\pi}{vv_2}, \quad v_1 < v, \quad v < v_2, \tag{37}$$

$$G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_{1/2}\frac{8\pi}{vv_1}, \quad v < v_1, \quad v_2 < v, \tag{38}$$

$$G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_{1/2}\frac{8\pi}{v_1v_2}, \quad v < v_1, \quad v < v_2, \tag{39}$$

4. Нелинейное ядро $G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2)$ для газа из твердых шаров

Линейное ядро интеграла обратных столкновений для $l = 1$, приведенное в [4], после ряда упрощений имеет вид

$$\tilde{L}_1^+\left(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1}\right) = \frac{2e^{-\alpha w}}{\alpha^2 w w_1} \times \left((\alpha m - 1)e^{\alpha m}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha m}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\alpha m}\right). \quad (40)$$

Здесь использовано обозначение $m = \min(w, w_1)$. В данном случае формула (8) дает

$$G^{+1}_{1,0}\left(\sqrt{w}, \sqrt{w_1}, \sqrt{t}\right) = \mathfrak{G}_{1/2}\frac{2\pi^{3/2}}{t^{1/2}}\,\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left[\frac{\tilde{L}_1^+\left(\sqrt{\alpha w}, \sqrt{\alpha w_1}\right)}{\sqrt{\alpha}}\right] = \mathfrak{G}_{1/2}\,\frac{4\pi^{3/2}}{(ww_1)t^{1/2}}\,\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left[f^1_{hs}(\alpha, w, w_1)\right], \quad (41)$$

где

$$f^1_{hs}(\alpha, w, w_1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^{5/2}}\,e^{-\alpha w}\big((\alpha w_1 - 1)\times \\ \quad \times e^{\alpha w_1}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha w_1}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\alpha w_1}\big), & w_1 < w, \\ \frac{1}{\alpha^{5/2}}\big((\alpha w - 1)\operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha w}\right) + \\ \quad + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\alpha w}\sqrt{\alpha w}\big), & w < w_1. \end{cases} \quad (42)$$

Выпишем оригиналы функций, входящих в (42). Для слагаемых вида $\operatorname{erf}(b\alpha)/\alpha^{3/2}$ оригиналы найдены выше (см. (32)). Чтобы найти оригиналы слагаемых вида $\operatorname{erf}(b\alpha)/\alpha^{5/2}$, проинтегрируем (32) в пределах от нуля до t:

$$\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left[\frac{\operatorname{erf}(b\alpha)}{\alpha^{5/2}}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\Theta(b-t)\,\frac{2}{3}\,t^{3/2} + \Theta(t-b)\left(t\sqrt{b} - \frac{1}{3}\,b^{3/2}\right)\right)\Theta(t). \quad (43)$$

Кроме этого, нам понадобится

$$\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left(\alpha^{-2}\right) = t\Theta(t). \quad (44)$$

Используя (32), (43), (44) и сдвигая слагаемые в оригинале в соответствии с умножением на экспоненты в изображении, получаем при $w_1 < w$

$$\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left[f^1_{hs}(\alpha, w, w_1)\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[w_1\sqrt{w_1 + t - w} - \frac{2}{3}\,(w_1 + t - w)^{3/2}\right]\Theta(w_1 + t - w)\Theta(w - t) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{3}\,w_1^{3/2}\Theta(t - w), \quad (45)$$

а при $w < w_1$

$$\hat{\mathfrak{L}}^{-1}_{\alpha,t}\left[f^1_{hs}(\alpha, w, w_1)\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(w\sqrt{t} - \frac{2t^{3/2}}{3}\right)\Theta(w - t) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{w^{3/2}}{3}\Theta(t - w). \quad (46)$$

Подставляя (45), (46) в (41) и переходя к переменным v, v_1, v_2, выпишем окончательные выражения для ядра:

$$G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2) = 0, \quad v_1^2 + v_2^2 < v^2, \quad (47)$$

$$G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_{1/2}\frac{8\pi}{v^2 v_1^2 v_2} \times \left(v_1^2\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v^2} - \frac{2}{3}\left(v_1^2 + v_2^2 - v^2\right)^{3/2}\right), \quad v_1 < v, \quad v^2 - v_1^2 < v_2^2 < v^2, \quad (48)$$

$$G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_{1/2}\frac{8\pi v_1}{3v^2 v_2}, \quad v_1 < v, \quad v < v_2, \quad (49)$$

$$G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_{1/2}\frac{8\pi}{v^2 v_1^2}\left(v^2 - \frac{2}{3}\,v_2^2\right), \quad v < v_1, \quad v_2 < v, \quad (50)$$

$$G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_{1/2}\frac{8\pi v}{3v_1^2 v_2}, \quad v < v_1, \quad v < v_2. \quad (51)$$

5. Обсуждение результатов

Выше были получены ядра $G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2)$ для псевдомаксвелловских молекул и твердых шаров и $G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2)$ для твердых шаров. Отметим, что ядро $G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2)$ для псевдомаксвелловских молекул также удалось найти с помощью приема, который не будет описываться здесь в деталях. Он заключается в том, что сначала находится оригинал подынтегральной функции в представлении линейного ядра через квадратуру (см. [5]). После этого интеграл от оригинала оказывается возможным взять аналитически. Этот же прием может быть использован для построения ядер типа $G^{+l}_{l,0}(v, v_1, v_2)$ при произвольных значениях l. Подробно процедура расчета будет рассмотрена в одной из следующих работ, а здесь приведем результат для $l = 1$ в случае псевдомаксвелловских молекул:

$$G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2) = 0, \quad v_1^2 + v_2^2 < v^2, \quad (52)$$

$$G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_0\frac{2\pi}{v^2 v_1^2 v_2}\left(\frac{v\left(v_1^2 - v_2^2\right)\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v^2}}{v_1^2 + v_2^2} + \left(2v^2 + v_1^2 - v_2^2\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 - v^2}{v^2}}\right), \quad v_1 < v, \quad v^2 - v_1^2 < v_2^2 < v^2, \quad (53)$$

$$G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_0 \frac{2\pi}{v^2 v_1^2 v_2} \left(\frac{v_1 v_2 (v_1^2 + v_2^2 - 2v^2)}{v_1^2 + v_2^2} \right.$$
$$\left. + (2v^2 + v_1^2 - v_2^2) \operatorname{arctg}(v_1/v_2) \right),$$
$$v_1 < v, \quad v < v_2, \tag{54}$$

$$G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_0 \frac{2\pi}{v^2 v_1^2 v_2} \left(\frac{v_1 v_2 (2v^2 - v_1^2 - v_2^2)}{v_1^2 + v_2^2} \right.$$
$$\left. + (2v^2 + v_1^2 - v_2^2) \operatorname{arctg}(v_2/v_1) \right),$$
$$v < v_1, \quad v_2 < v, \tag{55}$$

$$G^{+1}_{1,0}(v, v_1, v_2) = \mathfrak{G}_0 \frac{2\pi}{v^2 v_1^2 v_2} \left(\frac{v (v_2^2 - v_1^2) \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v^2}}{v_1^2 + v_2^2} \right.$$
$$\left. + (2v^2 + v_1^2 - v_2^2) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v^2}{v_1^2 + v_2^2 - v^2}} \right),$$
$$v < v_1, \quad v < v_2. \tag{56}$$

Проанализируем найденные ядра. Видно, что как для псевдомаксвелловских молекул, так и для твердых шаров они имеют одну и ту же структуру. При фиксированном значении v область $v_1 > 0$, $v_2 > 0$ разбивается на 5 подобластей с границами $v_1 = v$, $v_2 = v$ и $v_1^2 + v_2^2 = v^2$. В этих областях, а также при переходе из области в область ядра непрерывны; на границах частные производные имеют разрыв. В области $v_1^2 + v_2^2 < v^2$ ядра равны нулю, что отражает закон сохранения энергии.

Можно убедиться, что ядра $G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2)$ симметричны по аргументам v_1, v_2, т.е. выполняется соотношение $G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2) = G^{+0}_{0,0}(v, v_2, v_1)$, что как отмечалось выше, является следствием изотропности сечения рассеяния для обеих рассмотренных моделей.

При переходе к безразмерным величинам в уравнении Больцмана прежде всего необходимо ввести характерные единицы скорости и времени. В линейном варианте в качестве характерной скорости выбирается средняя тепловая скорость, определяемая по температуре T_0 фонового газа. В нелинейном случае выбор характерной температуры не столь очевиден. Если такая температура выбрана, то в качестве единицы измерения скорости можно выбрать тепловую скорость. Обозначим ее v_{T_0}. Если обе части уравнения Больцмана поделить на коэффициент, соответствующий средней частоте столкновений $\nu(T_0) = \mathfrak{G}_\mu v_{T_0}^{2\mu}$, и учесть размерность функции распределения, то это уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{c})}{\partial \tau} =$$
$$\textstyle\sum_{l,l_1,l_2} P_l(x) \left(\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \tilde{G}^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2) \tilde{f}_{l_1}(c_1) \tilde{f}_{l_2}(c_2) c_1^2 c_2^2 dc_1 dc_2 \right), \tag{57}$$

где $c_i = v_i / v_{T_0}$, $\tilde{f} = f v_{T_0}^3$, а $\tau = t\nu(T_0)$. При этом

$$\tilde{G}^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2) = \frac{v_{T_0}^3 G^l_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)}{\nu(T_0)}.$$

При таком обезразмеривании ядра $\tilde{G}^{+l}_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2)$ легко получить из формул (23)–(27), (35)–(39), (47)–(51) и (52)–(56), если исключить $\mathfrak{G}_\mu$ и заменить аргументы v, v_1, v_2 на c, c_1, c_2.

В работе [2] исследованы общие свойства нелинейных ядер, вытекающие из их инвариантности относительно выбора температуры базиса. Показано, что в случае степенных потенциалов или, точнее, для сечений взаимодействия вида $\sigma(g, \theta) = g^{2\mu-1} F_\mu(\theta)$ с произвольной угловой зависимостью $F_\mu(\theta)$ справедливо соотношение подобия

$$\tilde{G}^l_{l_1,l_2}(sc, sc_1, sc_2) = s^{2\mu-3} \tilde{G}^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2). \tag{58}$$

Здесь s — произвольное положительное вещественное число. Легко проверить, что найденные выше ядра удовлетворяют соотношениям подобия со значением $\mu = 0$ для псевдомаксвелловских молекул и $\mu = 1/2$ для твердых шаров.

Соотношения подобия позволяют представить нелинейное ядро в виде функции двух переменных с коэффициентом, зависящим от расстояния до начала координат в пространстве модулей скоростей $al = \sqrt{c^2 + c_1^2 + c_2^2}$:

$$\tilde{G}^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2) = \frac{1}{al^{3-2\mu}} \Psi^l_{l_1,l_2}(x, y). \tag{59}$$

Здесь $x = c/al$, $y = c_1/al$. Третий аргумент нелинейного ядра $\tilde{G}^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2)$ связан с новыми переменными выражением $c_2/al = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Заметим, что функции $\Psi^l_{l_1,l_2}(x, y)$ в отличие от $\tilde{G}^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2)$ имеют конечную область определения: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Тот факт, что функции Ψ зависят от двух переменных, позволяет представить их графически (см. рис. 1 и 2). На рисунках функции $\Psi^0_{0,0}(x, y)$ и $\Psi^1_{1,0}(x, y)$ представлены в нормированном виде — отнесены к их значениям в точке $x = y = 1/\sqrt{3}$. Из рисунков видно, что нормированные функции $\Psi^{+0}_{0,0}(x, y)$, $\Psi^{+1}_{1,0}(x, y)$ для псевдомаксвелловских молекул слабо отличаются от соответствующих функций для твердых шаров. Это связано с изотропностью сечения рассеяния. Мы провели дополнительное исследование и убедились, что при $\mu = 0$ нормированные функции Ψ очень сильно меняются при изменении угловой зависимости сечения рассеяния. Можно утверждать, что в случае изотропного сечения рассеяния и для промежуточных значений $0 < \mu < 1/2$ нормированные функции $\Psi^{+0}_{0,0}(x, y)$, $\Psi^{+1}_{1,0}(x, y)$ будут слабо изменяться при изменении μ.

С использованием полученных выше ядер была проведена проверка выполнения законов сохранения.

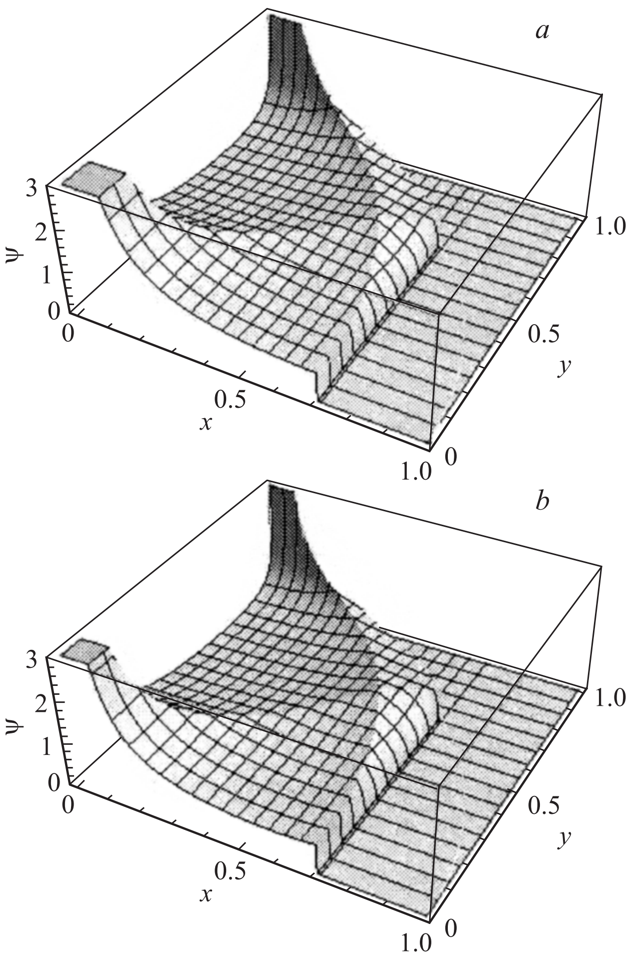

Рис. 1. Функции $\Psi^{+0}_{0,0}(x,y)/\Psi^{+0}_{0,0}(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ для твердых шаров (a) и псевдомаксвелловских молекул (b); a — $\Psi^{+0}_{0,0}(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})=75.40$, b — $\Psi^{+0}_{0,0}(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})=102.6$.

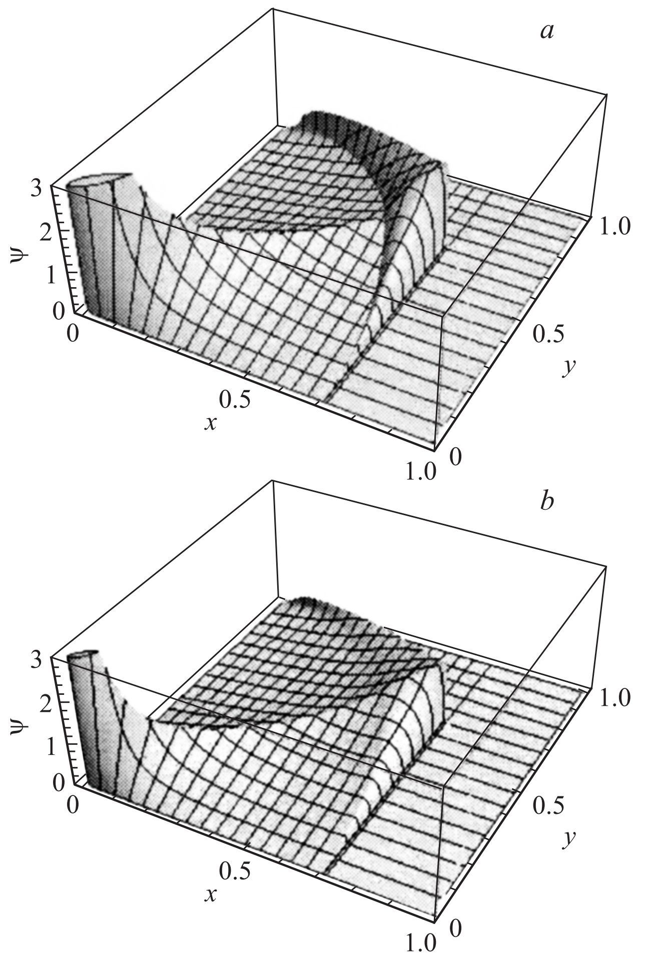

Рис. 2. Функции $\Psi^{+1}_{1,0}(x,y)/\Psi^{+1}_{1,0}(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ для твердых шаров (a) и псевдомаксвелловских молекул (b); a — $\Psi^{+1}_{1,0}(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})=25.13$, b — $\Psi^{+1}_{1,0}(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})=51.28$.

Законам сохранения числа частиц, импульса и энергии для простого газа соответствуют следующие соотношения:

$$\int\limits_0^\infty \left(\tilde{G}^{+0}_{0,0}(c,c_1,c_2)-\tilde{G}^{-0}_{0,0}(c,c_1,c_2)\right)c^2dc=0, \qquad (60)$$

$$\int\limits_0^\infty \Big(\tilde{G}^{+1}_{1,0}(c,c_1,c_2)+\tilde{G}^{+1}_{0,1}(c,c_2,c_1) - \tilde{G}^{-1}_{1,0}(c,c_1,c_2)-\tilde{G}^{-1}_{0,1}(c,c_2,c_1)\Big)c^3dc=0, \qquad (61)$$

$$\int\limits_0^\infty \Big(\tilde{G}^{+0}_{0,0}(c,c_1,c_2)+\tilde{G}^{+0}_{0,0}(c,c_2,c_1) - \tilde{G}^{-0}_{0,0}(c,c_1,c_2)-\tilde{G}^{-0}_{0,0}(c,c_2,c_1)\Big)c^4dc=0. \qquad (62)$$

Эти интегралы должны обращаться в нуль при любых фиксированных значениях c_1,c_2. В уравнения (60)–(62) входят как ядра интеграла обратных столкновений, найденные в настоящей работе, так и ядра интеграла прямых столкновений, которые были рассмотрены в [2] и [12]. Как отмечалось выше, для изотропного сечения рассеяния нелинейные ядра симметричны относительно одновременной перестановки c_1,c_2 и l_1,l_2. Поэтому входящие в формулы (61), (62) суммы равны

$$\tilde{G}^{+1}_{1,0}(c,c_1,c_2)+\tilde{G}^{+1}_{0,1}(c,c_2,c_1)=2\tilde{G}^{+1}_{1,0}(c,c_1,c_2),$$

$$\tilde{G}^{+0}_{0,0}(c,c_1,c_2)+\tilde{G}^{+0}_{0,0}(c,c_2,c_1)=2\tilde{G}^{+0}_{0,0}(c,c_1,c_2),$$

Численная проверка показала, что тождества (60)–(62) выполняются с очень высокой точностью.

Список литературы

[1] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* Интеграл столкновений уравнения Больцмана и моментный метод. СПб., 2003. 224 с.

[2] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 10. С. 12–21.

[3] *Hilbert D.* // Math. Ann. 1912. Bd. 72. S. 562–577.

[4] *Hecke E.* // Math. Zs. 1922. Bd. 12. S. 274–286.
[5] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. Вып. 5. С. 9–14.
[6] *Loyalka S.K.* Phys. Fluids. A. 1989. Vol. 1. N. 2. P. 384–388.
[7] *Garcia R.D.M., Siewert C.E.* // Eur. J. Mech. B. Fluids. 2007. Vol. 26. P. 749–778.
[8] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А.* // ДАН. 2011. Т. 437. Вып. 5. С. 621–623.
[9] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 344 с.
[10] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ФМ, 1962. 1097 с.
[11] *Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю., Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 22–35.
[12] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 4. С. 24–34.