Журнал технической физики, 2012, том 82, вып. 6

01;03

Влияние электрического поля на капиллярный эффект „мертвой воды“

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, М.С. Федоров

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 20 сентября 2011 г.)

Показано, что капиллярный аналог эффекта „мертвой воды“ сильно зависит от наличия внешнего электростатического поля: количество внутренних нелинейных резонансных ситуаций резко увеличивается при наличии поля. Наличие поля приводит к увеличению амплитуд волн и к возбуждению как вырожденных, так и вторичных комбинационных резонансов, которые не имеют места в отсутствие поля.

Введение

Эффект „мертвой воды“ — эффект передачи импульса с верхней поверхности на нижнюю в многослойной жидкости для гравитационных волн был подробно исследован в налаче XX века Сретенским Л.Н. [1–4]. Недавно [5] было показано, что он имеет асимптотику в области капиллярных волн. В этой связи исследования влияния внешнего электрического поля на закономерности его реализации представляется актуальным.

1. Постановка задачи

Рассмотрим две идеальные жидкости, верхняя из которых — диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε_d имеет толщину h и плотность ρ_1, а нижняя — идеальный проводник с плотностью ρ_2 заполняет полубесконечное пространство $z < 0$. Будем рассматривать волны на поверхности жидкости в области размеров, в которой влияние гравитационного поля несущественно. Обе жидкости несжимаемы и несмешиваемые, причем $\rho_2 > \rho_1$. Область над верхней жидкостью представляет собой вакуум. На границе раздела жидкостей равномерно распределен электрический заряд, который создает в области пространства $z > h$ электростатическое поле $\mathbf{E}_*$.

Проанализируем взаимодействие и устойчивость капиллярно-гравитационных волн, существующих на свободной поверхности и границе раздела двух сред.

Математическая формулировка задачи имеет вид [5]

$$\frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial t} + (\mathbf{V}_j, \nabla)\mathbf{V}_j = -\nabla\left(\frac{P_j}{\rho_j}\right),$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V}_j = 0 \quad (j = 1, 2),$$

$$F_j(x, z, t) = 0: \qquad \frac{\partial F_j}{\partial t} + (\mathbf{V}_j, \nabla)F_j = 0,$$

$$z = \xi_2: \quad (\mathbf{n}_2, \mathbf{V}_1) = (\mathbf{n}_2, \mathbf{V}_2), \quad P_2 - P_1 + P_{2E} - P_{2\sigma} = 0,$$

$$z = h + \xi_1: \qquad P_1 - P_{\text{atm}} + P_{1E} - P_{1\sigma} = 0,$$

$$z \to -\infty: \qquad \mathbf{V}_2 \to 0,$$

где $\mathbf{V}_j$ — поля скоростей в верхней и нижней жидкостях, $\mathbf{n}_2$ — вектор нормали к границе раздела сред, функции $F_1(x, z, t) \equiv z - \xi_1(x, t) - h$ и $F_2(x, z, t) \equiv \equiv z - \xi_2(x, t)$ определяют уравнения свободной поверхности верхнего слоя жидкости $F_1(x, z, t) = 0$ и границы раздела жидкости $F_2(x, z, t) = 0$, $\xi_1(x, t)$ и $\xi_2(x, t)$ — возмущения свободной поверхности слоя и границы раздела сред соответственно, амплитуда которых $|\xi_1| \approx |\xi_2| \ll h$ принимаются в качестве малого параметра задачи, P_1, P_2 — гидродинамические давления в слое и нижней жидкости, $P_{1\sigma}$, $P_{2\sigma}$ и P_{1E}, P_{2E} — капиллярные и электростатические давления на свободной поверхности (индекс 1) и границе раздела сред (индекс 2).

Дополним задачу начальными условиями на свободной поверхности и на границе раздела сред

$$t = 0: \quad \xi_1(x, t) = \xi_1 \exp(ikx), \quad \xi_2(x, t) = \xi_2 \exp(ikx),$$

$$\frac{\partial \xi_1(x, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \xi_2(x, t)}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Здесь и далее i — мнимая единица.

Для замыкания системы уравнений (1) необходимо сфокусировать задачу определения электрического поля

$$\Delta\Phi_i = 0, \quad \mathbf{E}_i = -\nabla\Phi_i, \quad i = 0, 1, \tag{3}$$

где $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_0$ — напряженности электрического поля, Φ_1, Φ_0 — электростатические потенциалы в слое жидкости и в вакууме соответственно.

Граничные условия, которым должны удовлетворять потенциалы на границе раздела двух жидкостей и свободной поверхности слоя, имеют вид

$$z = \xi_2: \qquad \Phi_1 = \text{const},$$

$$z = h + \xi_1: \qquad (\mathbf{n}_1, \nabla\Phi_0) = \varepsilon_d(\mathbf{n}_1, \nabla\Phi_1),$$

$$(\boldsymbol{\tau}_1, \nabla\Phi_0) = (\boldsymbol{\tau}_1, \nabla\Phi_1),$$

$$z \to \infty: \qquad -\nabla\Phi_0 \to \mathbf{E}_* = E_*\mathbf{e}_z, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_x\left[1 - \frac{1}{2}(\partial_x\xi_1)^2\right] + \mathbf{e}_z\,\partial_x\xi_1,$$

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_z \left[1 - \frac{1}{2}(\partial_x \xi_1)^2\right] - \mathbf{e}_x \partial_x \xi_1,$$

где $\mathbf{E}_*$ — напряженность электростатического поля в вакууме (при $\xi_1 \equiv 0$), $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\mathbf{n}_1$ — тангенциальный и нормальный орты к поверхности слоя.

Решение сформулированной задачи естественно искать в рамках модели потенциального течения жидкостей:

$$\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t) = \nabla \varphi_j(\mathbf{r}, t) \quad (j = 1, 2),$$

где $\varphi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi_2(\mathbf{r}, t)$ — потенциалы поля скоростей волнового движения в верхней и нижней жидкостях соответственно. Поскольку движения обеих жидкостей вызваны малыми колебаниями их граничных поверхностей, то примем, что в безразмерных переменных $(\rho_1 = g = k = 1)$ потенциалы $\varphi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi_2(\mathbf{r}, t)$ имеют тот же порядок малости, что и амплитуды волн $|\varphi_j| \approx |\xi_j| \approx \varepsilon$, где $\varepsilon \equiv \zeta_j k$ — безразмерная амплитуда начальной деформации, которую примем в качестве малого параметра задачи. Будем искать решение методом многих временны́х масштабов [6] $(T_n = \varepsilon^n t,\ n = 0; 1)$ в виде асимптотических резложений.

$$\Phi_i(x, z, t) \approx \Phi_i^0(z) + \varepsilon \Phi_i^{(1)}(x, z, T_0, T_1)$$
$$+ \varepsilon^2 \Phi_i^{(2)}(x, z, T_0) + O(\varepsilon^3) \quad (i = 0, 1),$$
$$P_j \approx P_j^{(0)} + \varepsilon P_j^{(1)} + \varepsilon^2 P_j^{(2)} + O(\varepsilon^3),$$
$$P_{jE} \approx P_{jE}^{(0)} + \varepsilon P_{jE}^{(1)} + \varepsilon^2 P_{jE}^{(2)} + O(\varepsilon^3),$$
$$P_{j\sigma} \approx P_{j\sigma}^{(0)} + \varepsilon P_{j\sigma}^{(1)} + \varepsilon^2 P_{j\sigma}^{(2)} + O(\varepsilon^3),$$
$$\varphi_j(x, z, t) \approx \varepsilon \varphi_j^{(1)}(x, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \varphi_j^{(2)}(x, z, T_0) + O(\varepsilon^3),$$
$$\xi_j(x, t) \approx \varepsilon \xi_j^{(1)}(x, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \xi_j^{(1)}(x, T_0) + O(\varepsilon^3)$$
$$(j = 1, 2) \tag{5}$$

где верхний индекс означает порядок малости соответствующей компоненты: нулем помечены разновесные значения на поверхностях раздела, не связанные с возмущениями, а единицей и двойкой — величины первого и второго порядков малости соответственно.

Для определения капиллярного давления на границу раздела и свободную поверхность жидкости удобно воспользоваться известным выражением:

$$P_{j\sigma} = \sigma_j \operatorname{div} \mathbf{n}_j \quad (j = 1, 2),$$

где векторы нормали определяются через уравнения поверхностей

$$F_j(x, z, t) = 0: \quad \mathbf{n}_j = \left.\frac{\nabla F_j(x, y, z)}{|\nabla F_j(x, y, z)|}\right|_{F_j(x,y,z)=0}.$$

Используя введенные выше выражения для функций $F_j(x, z, t)$, несложно получить

$$\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_z \left[1 - \frac{1}{2}(\partial_x \xi_j)^2\right] - \mathbf{e}_x \partial_x \xi_j.$$

Тогда компоненты капиллярного давления могут быть представлены через возмущения границ раздела

$$P_{j\sigma}^{(0)} = 0, \quad P_{j\sigma}^{(1)} = -\sigma_j \partial_{xx} \xi_j^{(1)},$$
$$P_{j\sigma}^{(2)} = -\sigma_j \partial_{xx} \xi_j^{(2)}, \quad (j = 1, 2). \tag{6}$$

Для определения давления электрического поля на свободную поверхности P_{1E} и границу раздела сред P_{2E} воспользуемся общим выражением для электростатического давления на границу раздела двух диэлектрических сред:

$$P_E = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}}) \left[(\mathbf{E}^{\text{ex}})^2 - \left(1 - \frac{\varepsilon_{\text{ex}}}{\varepsilon_{\text{in}}}\right)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_n^{\text{ex}})^2\right], \tag{7}$$

где индексы ex и in отмечают величины внешние и внутренние по отношению к поверхности раздела.

В нашей задаче электростатическое давление P_{1E} является давлением на свободную поверхность жидкого диэлектрика, граничащего с вакуумом. Заменяя в выражении (7) поле $\mathbf{E}^{\text{ex}}$ на поле в вакууме $\mathbf{E}_0$, внутреннюю диэлектрическую проницаемость ε_{in} на диэлектрическую проницаемость слоя жидкости ε_d, а внешнюю — на проницаемость вакуума, равную единице $\varepsilon_{\text{ex}} = 1$, получим

$$z = h + \xi_1:$$
$$P_{1E} = \frac{\varepsilon_d - 1}{8\pi}\left[(\nabla\Phi_0)^2 - \frac{(\varepsilon_d - 1)}{\varepsilon_d}(\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi_0)^2\right]. \tag{8}$$

Для определения электростатического давления P_{2E} на границу раздела проводника (бесконечно глубокая идеально проводящая жидкость) и диэлектрика (слой жидкости толщиной h) учтем, что в этом случае вектор напряженности внешнего поля $\mathbf{E}^{\text{ex}}$ направлен по нормали и совпадает по модулю с нормальной проекцией $E^{\text{ex}} = E_n^{\text{ex}}$. Заменяя в выражении (7) поле $\mathbf{E}^{\text{ex}}$ на поле в верхнем слое $\mathbf{E}_1$ и переходя к пределу $\varepsilon_{\text{in}} \to \infty$ (так как диэлектрическая проницаемость проводника стремится к бесконечности), получим

$$z = \xi_2: \qquad P_{2E} = \frac{\varepsilon_d}{8\pi}(\nabla\Phi_1)^2. \tag{9}$$

Подставляя в (8), (9) разложения (5) для электростатических потенциалов, запишем компоненты электростатических давлений различных порядков малости в следующем виде:
нулевой порядок малости:

$$z = h: \qquad P_{1E}^{(0)} = \frac{\varepsilon_d - 1}{8\pi\varepsilon_d}\left(\partial_z \Phi_0^{(0)}\right)^2,$$
$$z = 0: \qquad P_{2E}^{(0)} = \frac{\varepsilon_d}{8\pi}\left(\partial_z \Phi_1^{(0)}\right)^2, \tag{10}$$

первый порядок малости:

$$z = h: \qquad P_{1E}^{(1)} = \frac{(\varepsilon_d - 1)}{4\pi\varepsilon_d}\partial_z \Phi_0^{(0)} \partial_z \Phi_1^{(1)},$$
$$z = 0: \qquad P_{2E}^{(1)} = \frac{\varepsilon_d}{4\pi}\partial_z \Phi_1^{(0)} \Phi_1^{(1)}, \tag{11}$$

второй порядок малости:

$$z=h:\quad P_{1E}^{(2)}=\frac{(\varepsilon_d-1)}{8\pi}\left\{\left(\partial_x\Phi_0^{(1)}\right)^2+2\xi_1^{(1)}\partial_z\Phi_0^{(0)}\partial_{zz}\Phi_0^{(1)}\right.$$

$$+2\partial_z\Phi_0^{(0)}\partial_z\Phi_0^{(2)}+\left(\partial_z\Phi_0^{(1)}\right)^2-\left(1-\frac{1}{\varepsilon_d}\right)\left[2\partial_z\Phi_0^{(0)}\partial_{zz}\Phi_0^{(1)}\xi_1^1\right.$$

$$+2\partial_z\Phi_0^{(0)}\partial_z\Phi_0^{(2)}-\left(\partial_x\xi_1^{(1)}\partial_z\Phi_0^{(0)}\right)^2-2\partial_x\xi_1^{(1)}\partial_x\Phi_0^{(1)}\partial_z\Phi_0^{(0)}$$

$$\left.\left.+\left(\partial_z\Phi_0^{(1)}\right)^2\right]\right\},$$

$$z=0:\quad P_{2E}^{(2)}=\frac{\varepsilon_d}{8\pi}\left[\left(\partial_x\Phi_1^{(1)}\right)^2+2\xi_2^{(1)}\partial_z\Phi_1^{(0)}\partial_{zz}\Phi_1^{(1)}\right.$$

$$\left.+2\partial_z\Phi_1^{(0)}\partial_z\Phi_1^{(2)}+\left(\partial_z\Phi_1^{(1)}\right)^2\right].\tag{12}$$

Далее, подставляя разложения (5) в задачу (1) и собирая слагаемые одного порядка малости по ε, несложно выделить краевые задачи различных порядков.

2. Задача нулевого порядка малости

Краевая задача нулевого порядка малости имеет вид

$$\partial_{z,z}\Phi_i^{(0)}=0,\quad P_j^{(0)}=f_j^{(0)},\quad i=0,1;\quad j=1,2;$$

$$z=h:\quad f_1^{(0)}=P_{\text{atm}}-P_{1E}^{(0)}+P_{1\sigma}^{(0)},\quad \partial_z\Phi_0^{(0)}=\varepsilon\partial_z\Phi_1^{(0)},$$

$$z=0:\quad f_2^{(0)}=f_1^{(0)}-P_{2E}^{(0)}+P_{2\sigma}^{(0)},\quad \Phi_1^{(0)}=\text{const},$$

$$z\to\infty:\qquad \nabla\Phi_0^{(0)}\to-\mathbf{E}_*.\tag{13}$$

Здесь $f_1^{(0)}$, $f_2^{(0)}$ — константы интегрирования уравнений Эйлера. Система уравнений (13), где давления $P_{i\sigma}^{(0)}$ и $P_{iE}^{(0)}$ определяются выражениями (6), (10), описывает равномерное состояние системы в отсутствие каких-либо возмущений свободной поверхности и границы раздела сред. Подставляя решения уравнений Лапласа для электростатических потенциалов $\Phi_i^{(0)}=C_iz+B_i$ (где C_i и B_i — константы интегрирования) в граничные условия (13), получим выражения для распределения гидродинамических давлений и потенциалов электрического поля

$$\Phi_0^{(0)}=E_*z,\quad P_1^{(0)}=P_{\text{atm}}-\frac{(\varepsilon_d-1)}{8\pi\varepsilon_d}E_*^2,$$

$$\Phi_1^{(0)}=-\frac{1}{\varepsilon_d}E_*z,\quad \Phi_2^{(0)}=P_{\text{atm}}-\frac{1}{8\pi}E_*^2.\tag{14}$$

3. Задача первого порядка малости

В первом порядке малости получим задачу

$$\Delta\varphi_j^{(1)}=0,\quad P_j^{(1)}=-\rho_j\partial_{T_0}\varphi_j^{(1)},$$

$$\Delta\Phi_i^{(1)}=0\quad (j=1,2;\quad i=0,1),$$

$$z=h:\quad \partial_{T_0}\xi_1=\partial_z\varphi_1^{(1)},\quad -\rho_1\left(\partial_{T_0}\varphi_1^{(1)}\right)+P_{1E}^{(1)}-P_{1\sigma}^{(1)}=0,$$

$$\partial_z\Phi_0^{(1)}=\varepsilon_d\partial_z\Phi_1^{(1)},$$

$$\partial_x\xi_1^{(1)}\partial_z\Phi_0^{(0)}+\partial_x\Phi_0^{(1)}=\partial_x\xi_1^{(1)}\partial_z\Phi_1^{(0)}+\partial_x\Phi_1^{(1)},$$

$$z=0:\quad -\rho_2\partial_{T_0}\varphi_2^{(1)}+\rho_1\partial_t\varphi_1^{(1)}+P_{2E}^{(1)}-P_{2\sigma}^{(1)}=0,$$

$$\partial_z\varphi_1^{(1)}=\partial_z\varphi_2^{(1)}=\partial_t\xi_2^{(1)},\quad \Phi_1^{(1)}+\partial_z\Phi_1^{(0)}\xi_2^{(1)}=0,$$

$$z\to-\infty:\quad \left|\nabla\varphi_2^{(1)}\right|\to0,\quad z\to\infty:\quad \left|\nabla\Phi_0^{(1)}\right|\to0.\tag{15}$$

Система уравнений (15) с учетом выражений (6), (11) для давлений $P_{j\sigma}^{(1)}$, $P_{jE}^{(1)}$ $(j=1,2)$ описывает в линейном приближении эволюцию рассматриваемой системы во времени, когда свободная поверхность и граница раздела сред возмущены волновым движением малой амплитуды.

Рассмотрим плоские волны, бегущие по обеим поверхностям в положительном направлении оси OX:

$$\xi_j^{(1)}(x,t)=\alpha_j(T_1)\exp[i(kx-\omega T_0)],\quad (j=1,2)$$

где i — мнимая единица, k и ω — волновое число и частота волны. Решая уравнение Лапласа и используя граничные условия, получим проекты решений для гидродинамических и электростатических потенциалов:

$$\varphi_1^{(1)}(x,z,t)=[B_1\exp(kz)+B_2\exp(-kz)]\exp[i(kx-\omega T_0)],$$

$$\varphi_2^{(1)}(x,z,t)=A\exp(kz)\exp[i(kx-\omega T_0)],$$

$$\Phi_0^{(1)}(x,z,t)=G\exp(-kz)\exp[i(kx-\omega T_0)],$$

$$\Phi_1^{(1)}(x,z,t)=[D_1\exp(kz)+D_2\exp(-kz)]\exp[i(kx-\omega T_0)].\tag{16}$$

Подставляя (16) и решения (14) в граничные условия (15), получим систему алгебраических уравнений, из которых константы B_1, B_2, A, G, D_1, D_2 определяются через амплитуды α_j:

$$B_1=-\frac{i\omega(k)[\alpha_1\exp(kh)-\alpha_2]}{[\exp(2kh)-1]k},$$

$$B_2=-\frac{i\omega(k)\exp(kh)[\alpha_1-\alpha_2\exp(kh)]}{[\exp(2kh)-1]k},$$

$$A=-\frac{i\omega(k)}{k}\alpha_2,$$

$$G=\frac{E_*\exp(kh)}{\varepsilon_d-1+(\varepsilon_d+1)\exp(2kh)}$$

$$\times\left\{[1+\exp(2kh)](\varepsilon_d-1)\alpha_1+2\alpha_2\exp(kh)\right\},$$

$$D_1=\frac{(\varepsilon_d-1)E_*}{\varepsilon_d[\varepsilon_d-1+(\varepsilon_d+1)\exp(2kh)]}[\alpha_2-\alpha_1\exp(kh)],$$

$$D_2=\frac{\exp(kh)E_*}{\varepsilon_d[\varepsilon_d-1+(\varepsilon_d+1)\exp(2kh)]}$$

$$\times[\alpha_2(\varepsilon_d+1)\exp(kh)+\alpha_1(\varepsilon_d-1)].\tag{17}$$

Подставив решения (16) с коэффициентами (17) в динамические граничныке условия (15), получим систему уравнений относительно амплитуд α_1 и α_2:

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0, \quad a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 = 0, \qquad (18)$$

$$a_{11} = \frac{\omega^2(k)\rho_1}{k\,\mathrm{th}(kh)} - \sigma_1 k^2 + \frac{E_*^2 k}{4\pi\varepsilon_d}\,\frac{(\varepsilon_d - 1)^2}{[\varepsilon_d + \mathrm{th}(kh)]},$$

$$a_{12} = -\frac{1}{k\,\mathrm{sh}(kh)}\left\{\omega^2(k)\rho_1 - \frac{E_*^2k^2}{4\pi\varepsilon_d}\,\frac{(\varepsilon_d - 1)}{[\varepsilon_d + \mathrm{th}(kh)]}\right\},$$

$$a_{21} = -\frac{1}{k\,\mathrm{sh}(kh)}\left\{\omega^2(k)\rho_1 - \frac{E_*^2k^2}{4\pi\varepsilon_d}\,\frac{(\varepsilon_d - 1)}{[\varepsilon_d + \mathrm{th}(kh)]}\right\},$$

$$a_{22} = \frac{\omega^2(k)}{k}\left(\frac{\rho_1}{\mathrm{th}(kh)} + \rho_2\right) - \sigma_1 k^2 + \frac{E_*^2 k}{4\pi\varepsilon_d}\,\frac{[\varepsilon_d\,\mathrm{th}(kh) + 1]}{[\varepsilon_d + \mathrm{th}(kh)]}.$$

Приравняв определитель выписанной системы нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11}\alpha_1 & a_{12}\alpha_2 \\ a_{21}\alpha_1 & a_{22}\alpha_2 \end{vmatrix} = 0,$$

получим дисперсионное уравнение задачи

$$\omega^4(k) - \frac{k\rho_1 V(k)}{c(k)}\,\omega^2(k) + \frac{k^2\,\mathrm{th}(kh) S(k)}{c(k)} = 0, \qquad (19)$$

решения которого имеют вид

$$\omega_{1,2}^2(k) = \frac{k}{2c(k)}\Big[\rho_1 V(k) \mp \sqrt{\rho_1^2 V^2(k) - 4S(k)\,\mathrm{th}(kh) c(k)}\Big]. \qquad (20)$$

$$c(k) = \rho_1[\rho_1 + \rho_2\,\mathrm{cth}(kh)],$$

$$V(k) = k^2(\sigma_2 + \sigma_1) + \frac{\rho_2\sigma_1 k^2}{\rho_1}\,\mathrm{th}(kh) - \frac{E_*^2 k}{4\pi\varepsilon_d[\varepsilon_d + \mathrm{th}(kh)]} \times \left\{\varepsilon_d^2 - 2(\varepsilon_d - 1)\left[\frac{1}{\mathrm{ch}^2(kh) - 1}\right] + \mathrm{th}(kh)\left[\varepsilon_d + \frac{\rho_2}{\rho_1}(\varepsilon_d - 1)^2\right]\right\},$$

$$S(k) = \left\{\sigma_1 k^2 - \frac{E_*^2 k(\varepsilon_d - 1)^2}{4\pi\varepsilon_d[\varepsilon_d + \mathrm{th}(kh)]}\right\} \times \left\{\sigma_2 k^2 - \frac{E_*^2 k[\varepsilon_d\,\mathrm{th}(kh) + 1]^2}{4\pi\varepsilon_d[\varepsilon_d + \mathrm{th}(kh)]}\right\} - \left\{\frac{E_*^2 k(\varepsilon_d - 1)}{4\pi\varepsilon_d[\varepsilon_d + \mathrm{th}(kh)]\,\mathrm{ch}(kh)}\right\}.$$

Волновое движение устойчиво, если соответствующая частота вещественна, т.е. квадрат частоты положителен $\omega^2 > 0$. С увеличением напряженности электрического поля частота уменьшается. При $\omega^2 < 0$ частота становится мнимой, а амплитуда волны экспоненциально растет со временем. Таким образом, критическим для проявления неустойчивости является условие $\omega^2 = 0$. Положив в дисперсионном уравнении (19) частоту, равной нулю, получим уравнение для определения критического значения параметра W:

$$W^2 - W\,\frac{\varepsilon_d}{k(\varepsilon_d - 1)^2\,\mathrm{th}(kh)}\Big\{(\varepsilon_d - 1)^2\sigma_2 k^2 + [\varepsilon_d\,\mathrm{th}(kh) + 1]\sigma_1 k^2\Big\} + \frac{\varepsilon_d^2}{k^2}\,\frac{[\varepsilon_d + \mathrm{th}(kh)]}{(\varepsilon_d - 1)^2\,\mathrm{th}(kh)}\,k^4\sigma_2\sigma_1 = 0,$$

$$W = \frac{E_*^2}{4\pi}.$$

Решениями этого квадратичного уравнения будут два корня. Истинным следует принять тот из них, который дает правильное выражение в предельном переходе к случаю однослойной бесконечно глубокой жидкости: $h \to \infty$, $\rho_1, \sigma_1 \to 0$. Таким образом, критическое значение параметра W будет определяться выражением

$$W_{cr} = \frac{\varepsilon_d k\big(1 + \sqrt{1 - D}\big)}{2(\varepsilon_d - 1)^2\,\mathrm{th}(kh)}\,\big\{(\varepsilon_d - 1)^2\sigma_2 + [\varepsilon_d\,\mathrm{th}(kh) + 1]\sigma_1\big\},$$

$$D = \frac{4(\varepsilon_d - 1)^2\,\mathrm{th}(kh)[\varepsilon_d + \mathrm{th}(kh)]\sigma_2\sigma_1}{\big\{(\varepsilon_d - 1)^2\sigma_2 + [\varepsilon_d\,\mathrm{th}(kh) + 1]\sigma_1\big\}^2}.$$

Из уравнений системы (18) легко определить отношение α_2 — амплитуды „внутренней" волны, распространяющееся по границе раздела двух сред, к α_1 — амплитуде волны, распространяющейся по свободной поверхности верхнего слоя жидкости

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{\rho_1\omega^2 - k^3\sigma_1\,\mathrm{th}(kh) + \frac{Wk^2}{\varepsilon_d}\,\frac{(\varepsilon_d - 1)^2\,\mathrm{th}(kh)}{[\varepsilon_d + \mathrm{th}(kh)]}}{\rho_1\omega^2 - \frac{Wk^2}{\varepsilon_d}\,\frac{(\varepsilon_d - 1)\,\mathrm{th}(kh)}{\varepsilon_d + \mathrm{th}(kh)}}\,\mathrm{ch}(kh). \qquad (21)$$

В связи с упомянутыми во введении к настоящей работе приложениями, связанными с наличием электрического поля, перпендикулярного границе раздела, представляется целесообразным проследить роль парамера W, входящего как в полную постановку задачи, в дисперсионное уравнение (19), так и в (21). Из (21) видно, что отношение амплитуд может иметь резонанс при варьировании полевого параметра W, когда знаменатель стремится к нулю:

$$\left\{\rho_1\omega^2 - \frac{Wk^2}{\varepsilon_d}\,\frac{(\varepsilon_d - 1)\,\mathrm{th}(kh)}{[\varepsilon_d + \mathrm{th}(kh)]}\right\} \to 0.$$

Это обстоятельство указывает на важную роль электрического поля в области капиллярных волн. Капиллярный аналог эффекта „мертвой воды" в отсутствие внешнего электростатического поля имеет место при $\sigma_2 \to 0$ [3].

Чтобы записать общее решение задачи первого порядка малости, константы B_1, B_2, A, D_1, D_2, G определим для каждого из корней дисперсионного уравнения. Для этого обозначим неизвестные функции $\alpha_1(T_1)$ и $\alpha_2(T_1)$, соответствующие первому корню $\omega_1(k)$, как $\alpha_{11}(T_1)$ и $\alpha_{21}(T_1)$, а второму корню $\omega_2(k)$ как $\alpha_{12}(T_1)$ и $\alpha_{22}(T_1)$. В результате проекты решений примут вид

$$\xi_j^{(1)}(x, T_0) = \sum_{n=1}^{2} \xi_{jn}^{(1)}(x, T_0),$$

$$\varphi_j^{(1)}(x, T_0) = \sum_{n=1}^{2} \varphi_{jn}^{(1)}(x, T_0) \quad (j = 1, 2), \tag{22}$$

$$\xi_{jn}^{(1)}(x, T_0, T_1) = \alpha_{jn}(T_1) \exp\left\{i[kx - \omega_n(k)T_0]\right\} + \text{к.с.},$$

$$\varphi_{11}^{(1)}(x, z, T_0) = [B_{11} \exp(kz) + B_{21} \exp(-kz)]$$

$$\times \exp\left\{i[kx - \omega_1(k)T_0]\right\} + \text{к.с.},$$

$$\varphi_{12}^{(1)}(x, z, T_0) = [B_{12} \exp(kz) + B_{22} \exp(-kz)]$$

$$\times \exp\left\{i[kx - \omega_2(k)T_0]\right\} + \text{к.с.},$$

$$\varphi_{21}^{(1)}(x, z, T_0) = A_1 \exp(kz) \exp\left\{i[kx - \omega_1(k)T_0]\right\} + \text{к.с.},$$

$$\varphi_{22}^{(1)}(x, z, T_0) = A_2 \exp(kz) \exp\left\{i[kx - \omega_2(k)T_0]\right\} + \text{к.с.},$$

$$\Phi_{11}^{(1)}(x, z, T_0) = [D_{11} \exp(kz) + D_{12} \exp(-kz)]$$

$$\times \exp\left\{i[kx - \omega_1(k)T_0\right\} + \text{к.с.},$$

$$\Phi_{12}^{(1)}(x, z, T_0) = [D_{12} \exp(kz) + D_{22} \exp(-kz)]$$

$$\times \exp\left\{i[kx - \omega_2(k)T_0\right\} + \text{к.с.},$$

$$\Phi_{01}^{(1)} = G_1 \exp(-kz) \exp\left\{i[kx - \omega_1(k)\right\} + \text{к.с..},$$

$$\Phi_{02}^{(1)} = G_2 \exp(-kz) \exp\left\{i[kx - \omega_2(k)\right\} + \text{к.с..},$$

В выражениях с тремя индексами $\xi_{jn}^{(m)}$ и $\varphi_{jn}^{(m)}$ верхний индекс, стоящий в скобках, означает порядок малости соответствующей компоненты; первый нижний индекс характеризует поверхность, на которой наблюдается волна; второй нижний индекс характеризует поверхность, которая порождает волну. Последние два утверждения справедливы и для коэффициентов α_{jn}.

Найдем отношения амплитудных множителей волн (22) на границе раздела сред и на свободной поверхности для частот $\omega_1(k)$ и $\omega_2(k)$, определяемых соотношениями (20)

$$\alpha_{21}(T_1) = d_1(k)\alpha_{11}(T_1), \quad \alpha_{22}(T_1) = d_2(k)\alpha_{12}(T_1), \tag{23}$$

$$d_1(k) = \frac{\left\{\frac{kW(-1+\varepsilon_d)^2}{\varepsilon_d[\text{th}(kh)+\varepsilon_d]} - k^2\sigma + \frac{\rho_1\omega_1^2(k)}{k\,\text{th}(kh)}\right\}}{\frac{kW(-1+\varepsilon_d)}{\varepsilon_d[\text{th}(kh)+\varepsilon_d]\,\text{ch}(kh)} - \frac{\rho_1\omega_1^2(k)}{k\,\text{sh}(kh)}},$$

$$d_2(k) = \frac{\left\{\frac{kW(-1+\varepsilon_d)^2}{\varepsilon_d[\text{th}(kh)+\varepsilon_d]} - k^2\sigma + \frac{\rho_1\omega_2^2(k)}{k\,\text{th}(kh)}\right\}}{\frac{kW(-1+\varepsilon_d)}{\varepsilon_d[\text{th}(kh)+\varepsilon_d]\,\text{ch}(kh)} - \frac{\rho_1\omega_2^2(k)}{k\,\text{th}(kh)\,\text{ch}(kh)}}.$$

Из (22) видно, что в линейном по амплитуде приближении волновое движение на свободной поверхности и на границе раздела сред представляет собой суперпозицию двух волн с различными частотами $\omega_1(k)$ и $\omega_2(k)$, определяемых соотношениями (20), являющимися решениями дисперсионного уравнения задачи (19).

Забегая вперед, отметим, что из анализа задачи второго порядка малости следует, что амплитуды α_{11}, α_{12}, а следовательно, и α_{21}, α_{22} не зависят от временного масштаба T_1 и могут быть найдены из начальных условий в виде

$$\alpha_{11} = \frac{\xi_2 - \xi_1 d_2(k)}{2[d_1(k) - d_2(k)]}, \quad \alpha_{12} = -\frac{\xi_2 - \xi_1 d_1(k)}{2[d_1(k) - d_2(k)]}.$$

4. Задача второго порядка малости

Во втором порядке малости получим

$$\Delta\varphi_j^{(2)} = 0, \quad \Delta\Phi_i^{(2)} = 0,$$

$$P_j^{(2)} = \rho_j \left[f_1^{(2)} - \partial_{T_0}\varphi_j^{(2)} - \partial_{T_1}\varphi_j^{(1)} - \frac{1}{2}\left(\nabla\varphi_j^{(1)}\right)^2\right],$$

$$(j = 1, 2; \quad i = 0.1),$$

$$z = h: \qquad \partial_z\varphi_1^{(2)} - \partial_{T_0}\xi_1^{(2)} = \partial_x\xi_1^{(1)}\partial_x\varphi_1^{(1)}$$

$$- \xi_1^{(1)}\partial_{zz}\varphi_1^{(1)} + \partial_{T_1}\xi_1^{(1)},$$

$$\rho_1\left(f_1^{(2)} - \partial_{T_0}\varphi_1^{(2)}\right) + \sigma_1\partial_{xx}\xi_1^{(2)} - \frac{E_*(\varepsilon_d - 1)}{4\pi\varepsilon_d}\,\partial_z\Phi_0^{(2)}$$

$$= \rho_1\left[\partial_{T_1}\varphi_1^{(1)} + \partial_{z,T_0}\varphi_1^{(1)}\xi_1^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\nabla\varphi_1^{(1)}\right)^2\right]$$

$$- \frac{(\varepsilon_d - 1)}{8\pi}\left[\left(\partial_x\Phi_0^{(1)}\right)^2 + 2\xi_1^{(1)}\partial_z\Phi_0^{(0)}\partial_{zz}\Phi_0^{(1)} + \left(\partial_z\Phi_0^{(1)}\right)^2\right.$$

$$- \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\left(2\partial_z\Phi_0^{(0)}\partial_{zz}\Phi_0^{(1)}\xi_1^{(1)} - \left(\partial_x\xi_1^{(1)}\partial_x\Phi_0^{(0)}\right)^2\right.$$

$$\left.\left.- 2\partial_x\xi_1^{(1)}\partial_x\Phi_0^{(1)}\partial_z\Phi_0^{(0)} + \left(\partial_z\Phi_0^{(1)}\right)^2\right)\right],$$

$$\partial_z\Phi_0^{(2)} - \varepsilon_d\partial_z\Phi_1^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\partial_x\xi_1^{(1)}\right)^2\partial_z\Phi_0^{(0)} + \partial_x\xi_1^{(1)}\partial_x\Phi_0^{(1)}$$

$$- \xi_1^{(1)}\partial_{zz}\Phi_0^{(1)} + \varepsilon_d\left[\xi_1^{(1)}\partial_{zz}\Phi_1^{(1)} - \frac{1}{2}\left(\partial_x\xi_1^{(1)}\right)^2\partial_z\Phi_1^{(0)}\right.$$

$$\left.- \partial_x\xi_1^{(1)}\partial_x\Phi_1^{(1)}\right],$$

$$\partial_x\Phi_0^{(2)} - \partial_x\Phi_1^{(2)} + \partial_x\xi_1^{(2)}\left(\partial_z\Phi_0^{(0)} - \partial_z\Phi_1^{(0)}\right)$$

$$= \xi_1^{(1)}\left(\partial_{xz}\Phi_1^{(1)} - \partial_{xz}\Phi_0^{(1)}\right) + \partial_x\xi_1^{(1)}\left(\partial_z\Phi_1^{(1)} - \partial_z\Phi_0^{(1)},\right)$$

$$z=0:\quad \rho_1\big(\partial_{T_0}\varphi_1^{(2)}-f_1^{(2)}\big)-\big(\partial_{T_0}\varphi_2^{(2)}-f_2^{(2)}\big)$$

$$+\sigma_2\partial_{xx}\xi_2^{(2)}-\frac{E}{4\pi}\,\partial_z\Phi_1^{(2)}=-\rho_1\Big[\partial_{T_1}\varphi_1^{(1)}+\partial_{z,T_0}\varphi_1^{(1)}\xi_1^{(1)}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\nabla\varphi_1^{(1)}\right)^2\Big]+\rho_2\Big[\partial_{z,T_0}\varphi_2^{(1)}\xi_2^{(1)}+\partial_{T_1}\varphi_2^{(1)}+\frac{1}{2}\left(\nabla\varphi_2^{(1)}\right)^2\Big]$$

$$-\frac{\varepsilon_d}{8\pi}\Big[\big(\partial_x\Phi_1^{(1)}\big)^2+2\xi_2^{(1)}\partial_z\Phi_1^{(0)}\partial_{zz}\Phi_1^{(1)}+\big(\partial_z\Phi_1^{(1)}\big)^2\Big],$$

$$\partial_z\varphi_1^{(2)}-\partial_z\varphi_2^{(2)}=\xi_2^{(1)}\big(\partial_{zz}\varphi_2^{(1)}-\partial_{zz}\varphi_1^{(1)}\big)$$

$$+\partial_x\xi_2^{(1)}\big(\partial_x\varphi_1^{(1)}-\partial_x\varphi_2^{(1)}\big),$$

$$\partial_z\varphi_2^{(2)}-\partial_{T_0}\xi_2^{(2)}=\partial_x\xi_2^{(1)}\partial_x\varphi_2^{(1)}-\xi_2^{(1)}\partial_{zz}\varphi_2^{(1)}+\partial_{T_1}\xi_2^{(1)},$$

$$\Phi_1^{(2)}+\xi_2^{(2)}\partial_z\Phi_1^{(0)}=-\xi_2^{(1)}\partial_z\Phi_1^{(1)},$$

$$z\to-\infty:\quad \left|\nabla\varphi_2^{(2)}\right|\to 0;\qquad z\to\infty:\quad \left|\nabla\Phi_0^{(2)}\right|\to 0. \tag{24}$$

Решения задачи первого порядка малости (22) подставим в (24). По виду функций неоднородностей правых частей уравнений (24) создадим проект частных решений для возмущений поверхностей и гидродинамических потенциалов второго порядка малости

$$\tilde{\xi}_j^2=\beta_{j1}\alpha_{11}^2\exp\big[2i\big(kx-\omega_1(k)T_0\big)\big]+\beta_{j2}\alpha_{11}\alpha_{12}$$

$$\times\exp\Big\{i\big[2kx-\big(\omega_1(k)+\omega_2(k)\big)T_0\big]\Big\}+\beta_{j3}\alpha_{12}^2\exp\big[2i\big(kx$$

$$-\omega_2(k)\big)T_0\big]+\beta_{j4}\exp\big[i\big(kx-\omega_1(k)T_0\big)\big]+\beta_{j5}\exp\big[i\big(kx$$

$$-\omega_2(k)T_0\big)\big]+\beta_{j6}+\beta_{j7}\exp\big[i\big(\omega_1(k)-\omega_2(k)\big)T_0\big],$$

$$\varphi_1^{(2)}=[C_{11}\exp(2kz)+C_{12}\exp(-2kz)]\exp[2i\big(kx$$

$$-\omega_1(k)T_0\big)]+[C_{13}\exp(2kz)+C_{14}\exp(-2kz)]$$

$$\times\exp\Big[i\Big(2kx-\big(\omega_1(k)+\omega_2(k)\big)\Big)\Big]+[C_{15}\exp(2kz)$$

$$+C_{16}\exp(-2kz)]\exp\Big[2i\big(kx-\omega_2(k)T_0\big)\Big]$$

$$+[C_{17}\exp(kz)+C_{18}\exp(-kz)]\exp\Big[i\big(kx-\omega_1(k)T_0\big)\Big]$$

$$+[C_{19}\exp(kz)+C_{110}\exp(-kz)]\exp\Big[i\big(kx-\omega_2(k)T_0\big)\Big]$$

$$+[C_{111}\exp(2kz)+C_{112}\exp(-2kz)]$$

$$\times\exp\Big[i\big(\omega_1(k)-\omega_2(k)\big)T_0\Big],$$

$$\varphi_2^{(2)}=A_{21}\exp(2kz)\exp\Big[2i\big(kx-\omega_1(k)T_0\big)\Big]$$

$$+A_{22}\exp(2kz)\exp\Big[i(2kx\big(\omega_1(k)+\omega_2(k)\big)T_0\Big]$$

$$+A_{23}\exp(2kz)\exp\Big[2i\big(kx-\omega_2(k)T_0\big)\Big]$$

$$+A_{24}\exp(kz)\exp\Big[i\big(kx-\omega_1(k)T_0\big)\Big]$$

$$+A_{25}\exp(kz)\exp\Big[i\big(kx-\omega_2(k)T_0\big)\Big]$$

$$+A_{26}\exp(2kz)\exp\Big[i\big(\omega_1(k)\omega_2(k)\big)T_0\Big]. \tag{25}$$

Подставляя проекты решений (25) в граничные условия (24), можно найти коэффициенты в выражениях для $\xi_j^{(2)},\varphi_j^{(2)}$ $j=1,2$. Ввиду громоздкости получаемых решений ограничимся записью поправок к форме поверхностей раздела, поскольку в проводимом исследовании нас интересуют особенности внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия волн, генерируемых на этих поверхностях.

После удовлетворения граничным условиям получим аналитические выражения для амплитуд β_{ji}, входящих в поправки второго порядка малости к аналитической записи поверхностей раздела $\xi_j^{(2)}$, в виде

$$\beta_{ji}=\frac{\beta_{ji}^*}{\mu_i},\quad (i=1,2,3),\quad (j=1,2),$$

$$\beta_{14}=\beta_{15}=\beta_{16}=\beta_{17}=\beta_{24}=\beta_{25}=\beta_{26}=\beta_{27}=0,$$

$$\beta_{ji}^*=16\exp(-2kh)\Omega_i\rho_1k^3\Bigg\{\frac{k^2E^2\big(n+(2\varepsilon_d-1)\big)}{\pi\varepsilon_d}$$

$$+2m\operatorname{ch}(2kh)\big[\Omega_i^2\big(\operatorname{th}(2kh)\rho_1+\rho_2-8k^3\sigma_2\big]\Bigg\}q_{i1}$$

$$+\frac{8iEk^4\exp(-2kh)}{\pi\varepsilon_d}\Bigg\{\Bigg(k^2(\varepsilon_d-1)\Bigg(\frac{\operatorname{sh}(4kh)E^2}{\pi\varepsilon_d}$$

$$-16\operatorname{sh}^2(2kh)k\sigma_2\Bigg)+\Omega_i^2\Big(\varepsilon_d\big[\big(\operatorname{sh}(4kh)-2\big)\rho_1$$

$$+2\operatorname{sh}^2(2kh)\rho_2\big]-2\operatorname{sh}^2(2kh)-2\operatorname{sh}^2(2kh)\big[\operatorname{cth}(2kh)\rho_1$$

$$+\rho_2\big]\Big)\Bigg\}q_{i2}+\frac{8k^4E\exp(-2kh)}{\pi}$$

$$\times\Bigg\{-\frac{2\operatorname{sh}^2(2kh)k^2E^2(-1+\varepsilon_d)}{\pi-\varepsilon_d}+8\operatorname{sh}(4kh)k^3$$

$$\times(\varepsilon_d-1)\sigma_2-\Omega_i^2\Big[\Big(\operatorname{ch}(4kh)\big(-1+2\epsilon\operatorname{ch}(4kh)\big)$$

$$+1\Big)\rho_1+\operatorname{sh}(4kh)(-1+\epsilon)\rho_2\Big]\Bigg\}q_{i3}+32k^3\Omega_i\rho_1$$

$$\times\left[-\frac{k^2E^2}{\pi}+\exp(-2kh)(-\Omega_i^2\rho_2+8k^3\sigma_2)m\right]q_{14}$$

$$+32\exp(-2kh)\Omega_ik^5$$

$$\times\Bigg\{-\frac{E^2[\exp(2kh)\varepsilon_d\rho_1+\operatorname{sh}(2kh)(-1+\varepsilon_d)\rho_2]}{\pi\varepsilon_d}$$

$$+ 8km\rho_1\sigma_2\Big\}q_{i5} + \frac{32\exp(-2kh)k^5E}{\pi}\left\{\Omega_i^2[\exp(2kh)\varepsilon_d\rho_1\right.$$

$$\left. + (-1+\varepsilon_d)\,\mathrm{sh}(2kh)\rho_2] + 8k^3(\varepsilon_d - 1)\,\mathrm{sh}(2kh)\sigma_2\right\}q_{i6}$$

$$+ 64ik^4\exp(-2kh)\left\{\frac{k^2E^2\,\mathrm{sh}(2kh)n}{\pi\varepsilon_d} - m\left[-\Omega_i^2\,\mathrm{sh}(2kh)\rho_1\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\mathrm{cth}(2kh) + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + 8k^3\sigma_2\right]\right\}q_{i7} + 64ik^4\exp(-2kh)$$

$$\times\left(-\frac{\mathrm{sh}(2kh)k^4E^2(\varepsilon_d - 1)}{\pi\varepsilon_d} + m\Omega_i^2\rho_1\right)q_{i8},$$

$$\beta_{2i}^* = 32\Omega_i\rho_1k^5\exp(-2kh)\left[-\frac{E^2(\varepsilon_d - 1)\,\mathrm{ch}(2kh)}{\pi}\right.$$

$$\left. + 8k\sigma_1 m\right]q_{i1} + 16iEk^4\exp(-2kh)\left[\frac{\mathrm{sh}(2kh)k^2}{\pi}\right.$$

$$\times\left(-\frac{E^2(\varepsilon_d - 1)^2}{\pi\varepsilon_d^2} + 8k\sigma_1\right) - \frac{\Omega_i^2\rho_1}{\pi\varepsilon_d}\big(\mathrm{sh}(2kh)$$

$$\left. + \varepsilon_d\exp(-2kh)\big)\right]q_{i2} + \frac{16k^4E}{\pi}\exp(-2kh)$$

$$\times\left[8\,\mathrm{sh}(2kh)k^3\sigma_1 - \mathrm{ch}(2kh)\varepsilon_d\Omega_i^2\rho_1\right]q_{i3}$$

$$+ 16\Omega_ik^3\rho_1\exp(-2kh)\left[\frac{k^2E^2}{\pi\varepsilon_d}\big((\varepsilon_d - 1)^2\,\mathrm{ch}(4kh)\right.$$

$$\left. + \varepsilon_d^2 - 1\big) + 2m\big(\Omega_i^2\rho_1\,\mathrm{sh}(2kh) - 8k^3\sigma_1\,\mathrm{ch}(2kh)\big)\right]q_{i4}$$

$$+ 16\Omega_ik^3\exp(-2kh)\left\{\frac{k^2E^2}{\pi\varepsilon_d}\Big((\varepsilon_d - 1)^2[\rho_1\,\mathrm{ch}(4kh)\right.$$

$$+ \rho_2\,\mathrm{sh}(4kh)] + (\varepsilon_d^2 - 1)\rho_1\Big) + 2m\big[\Omega_i^2\rho_1\big(\rho_1\,\mathrm{sh}(2kh)$$

$$\left. + \rho_2\,\mathrm{ch}(2kh)\big) - 8\sigma_1k^3\big(\rho_1\,\mathrm{ch}(2kh) + \rho_2\,\mathrm{sh}(2kh)\big)\big]\right\}q_{i5}$$

$$+ \frac{16iEk^5}{\pi}\exp(-2kh)\left[\frac{2k^2E^2}{\pi\varepsilon_d}\,\mathrm{sh}^2(2kh)(\varepsilon_d - 1)^2\right.$$

$$+ \Omega_i^2\rho_1\big(\mathrm{ch}(4kh) + \varepsilon\,\mathrm{sh}(4kh) + 2\varepsilon_d - 1\big)$$

$$\left. - 16nk^3\sigma_1\,\mathrm{sh}(2kh)\right]q_{i6} + 64ik^4\exp(-2kh)$$

$$\times\left[-\frac{k^2E^2}{\pi\varepsilon_d}\,\mathrm{sh}(2kh)(\varepsilon_d - 1) + \Omega_i^2m\rho_1\right]q_{i7}$$

$$+ 32ik^4\exp(-2kh)\left[\frac{k^2E^2}{\pi\varepsilon_d}(\varepsilon_d - 1)^2\,\mathrm{sh}(4kh)\right.$$

$$\left. + 2m\big(\Omega_i^2\rho_1\,\mathrm{ch}(2kh) - 8k^3\sigma_1\,\mathrm{sh}(2kh)\big)\right]q_{i8}$$

$$n = \varepsilon_d\,\mathrm{sh}(2kh) + \mathrm{ch}(2kh); \quad m = \mathrm{sh}(2kh) + \varepsilon_d\,\mathrm{ch}(2kh),$$

$$\mu_i = R_i(k)\left[\Omega_i^2 + \omega_2^2(2k) + b(2k)\right],$$

$$b(2k) = -\frac{2kV(2k)}{\big(\rho_2 + \rho_1\,\mathrm{th}(2kh)\big)},$$

$$R_i(k) \equiv \left[\Omega_i^2(k) - \omega_2^2(2k)\right],$$

$$\Omega_1(k) \equiv 2\omega_1(k), \quad \Omega_2(k) \equiv \omega_2(k) - \omega_1(k),$$

$$\Omega_3(k) \equiv 2\omega_2(k). \tag{26}$$

Невыписанные здесь коэффициенты приведены в Приложении. В расчетах второго порядка малости выяснилось, что коэфициенты α_{11} и α_{12} не зависят от времени T_1. Окончательные аналитические выражения для поправок второго порядка к возмущениям поверхностей раздела определяются суперпозицией общего и частного решений краевой задачи (24):

$$\xi_1^{(2)} = \int_0^\infty \gamma_{11}(k')\exp\left[i\big(k'x - \omega_1(k')T_0\big)\right] + \gamma_{12}(k')$$

$$\times\exp\left[i\big(k'x - \omega_2(k')T_0\big)\right]dk' + \beta_{11}\alpha_{11}^2\exp\left[2i\big(kx\right.$$

$$\left.\left. - \omega_1(k)T_0\big)\right] + \beta_{12}\alpha_{11}\alpha_{12}\exp\left[i\Big(2kx - \big(\omega_1(k)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \omega_1(k)\big)T_0\Big)\right] + \beta_{13}\alpha_{12}^2\exp\left[2i\big(kx - \omega_2(k)T_0\big)\right],$$

$$\xi_2^{(2)} = \int_0^\infty \gamma_{21}(k')\exp[i(k'x - \omega_1(k')T_0)] + \gamma_{22}(k')$$

$$\times\exp[i(k'x - \omega_2(k')T_0)]dk' + \beta_{21}\alpha_{11}^2\exp\left[2i\big(kx\right.$$

$$\left.\left. - \omega_1(k)T_0\big)\right] + \beta_{22}\alpha_{11}\alpha_{12}\exp\left[i\Big(2kx - \big(\omega_1(k)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \omega_1(k)\big)T_0\Big)\right] + \beta_{23}\alpha_{12}^2\exp\left[2i\big(kx - \omega_2(k)T_0\big)\right]. \tag{27}$$

Используя начальные соотношения, найдем коэффициенты $\gamma_{11}(k')$, $\gamma_{12}(k')$, $\gamma_{21}(k')$ и $\gamma_{22}(k')$ и запишем окончательные выражения для $\xi_j^{(2)}$, которые после замены T_0 на t примут вид

$$\xi_1^{(2)} = \gamma_{11}(2k)\exp\left[i\big(2kx - \omega_1(2k)t\big)\right] + \gamma_{12}(2k)\exp\left[i\big(2kx\right.$$

$$\left. - \omega_2(2k)t\big)\right] + \beta_{11}\exp\left[2i\big(kx - \omega_1(k)t\big)\right] + \beta_{12}\exp\left[i\Big(2kx\right.$$

$$\left. - \big(\omega_1(k) + \omega_2(k)\big)t\Big)\right] + \beta_{13}\exp\left[2i\big(kx - \omega_2(k)t\big)\right]$$

$$+ \beta_{17}\exp\left[i\Big(\big(\omega_1(k) - \omega_2(k)\big)t\Big)\right],$$

$$\xi_2^{(2)} = \gamma_{21}(2k)\exp\left[i\left(2kx - \omega_1(2k)t\right)\right] + \gamma_{22}(2k)\exp\Big[i\Big(2kx$$
$$- \omega_2(2k)t\Big)\Big] + \beta_{21}\exp\left[2i\left(kx - \omega_1(k)t\right)\right] + \beta_{22}\exp\Big[i\Big(2kx$$
$$- \left(\omega_1(k) + \omega_2(k)\right)t\Big)\Big] + \beta_{23}\exp\left[2i\left(kx - \omega_2(k)t\right)\right]$$
$$+ \beta_{27}\exp\Big[i\Big(\left(\omega_1(k) - \omega_2(k)\right)t\Big)\Big], \qquad (28)$$

$$\gamma_{i1}(2k) = -\frac{1}{\omega_1(2k) - \omega_2(2k)}\Big[\left(2\omega_1(k) - \omega_2(2k)\right)\beta_{i1}$$
$$+ \left(\omega_1(k) + \omega_2(k) - \omega_2(2k)\right)\beta_{i2} + \left(2\omega_2(k) - \omega_2(2k)\right)\beta_{i3}\Big],$$

$$\gamma_{i2}(2k) = \frac{1}{\omega_1(2k) - \omega_2(2k)}\Big[\left(2\omega_1(k) - \omega_1(2k)\right)\beta_{i1}$$
$$+ \left(\omega_1(k) + \omega_2(k) - \omega_1(2k)\right)\beta_{i2} + \Big(2\omega_2(k)$$
$$- \omega_1(2k)\Big)\beta_{i3}\Big] \quad (i = 1, 2).$$

Аналогично находятся коэффициенты C и A, входящие в выражения для поправок второго порядка малости к гидродинамическим потенциалам (25). В контексте проводимого анализа явный вид коэффициентов C и A для нас несуществен однако отметим, что они имеют такую же структуру, что и выписанные коэффициенты β_{ij}.

5. Анализ полученных результатов

Численные расчеты, выполненные в безразмерных переменных, в которых принято $\rho_1 = \sigma_1 = h = 1$, по выражениям, полученным для возмущений поверхностей раздела показали, что влияние поля сводится к увеличению амплитуд волн. На рис. 1 представлены амплитуды волн первого порядка малости при близких к критическому (при котором реализуется электростатическая неустойчивость [6]) значения электростатического поля. При критическом значении поля свободная поверхность, возбужденная в начальный момент времени $t = 0$, теряет устойчивость и „тянет" за собой границу раздела, в результате чего обе поверхности становятся неустойчивыми (рис. 2). Аналогичная ситуация возникает и при возбуждении в начальный момент времени границы раздела жидкостей.

На рис. 3 приведены результаты расчетов по соотношениям (28) нелинейных поправок к профилям волн на свободной поверхности $\xi_1^{(2)}$ и на границе стратификации $\xi_2^{(2)}$, полученные в квадратичном по безразмерным амплитудам приближения при задании в начальный момент времени волновой деформации свободной поверхности. На рис. 4 приведены аналогичные зависимости при задании в начальный момент времени волновой деформации границы стратификации. Сравнение рис. 3 и 4 с рисунками, приведенными в работе [7] для задачи о капиллярных волнах в отсутствие электростатического поля, свидетельствует о сохранении характерной черты эффекта „мертвой воды" во втором порядке малости:

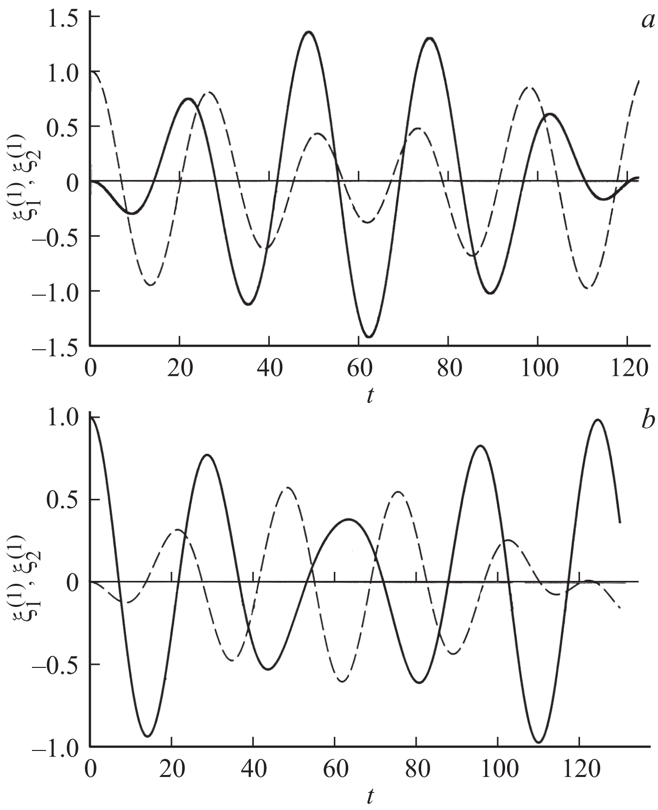

Рис. 1. Зависимости от времени поправок первого порядка к форме свободной поверхности $\xi_1^{(1)}(x,t)$ (штриховые кривые) и границы раздела жидкостей $\xi_2^{(1)}(x,t)$ (сплошные кривые), рассчитанные при $x = 0$, $kh = 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1.01$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0.05$, $E_* = 3.5$, $\varepsilon_d = 80$. a — $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$; b — $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$.

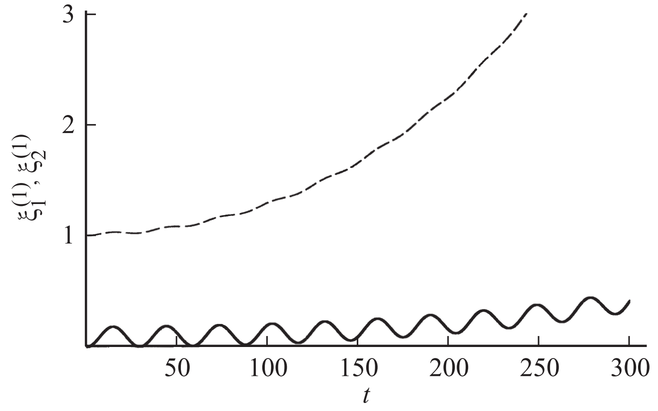

Рис. 2. Зависимости от времени поправок первого порядка к форме свободной поверхности $\xi_1^{(1)}(x,t)$ (штриховая кривая) и границы раздела жидкостей $\xi_2^{(1)}(x,t)$ (сплошная кривая), рассчитанные при $x = 0$, $kh = 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1.01$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0.05$, $E_* = 3.605$, $\varepsilon_d = 80$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$.

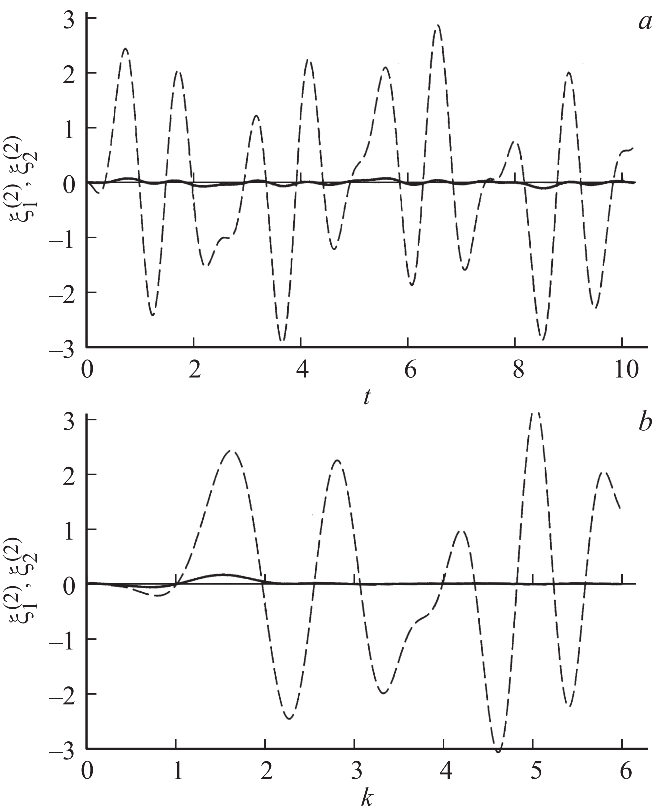

Рис. 3. Зависимости от времени (a) и от волнового числа (b) нелинейных поправок к профилям волн на свободной поверхности $\xi_1^{(2)}$ (штриховые кривые) и на границе стратификации $\xi_2^{(2)}$ (сплошные кривые), рассчитанные при $x = 0, \rho_1 = 1, \rho_2 = 1.01, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0.05, E_* = 2, \varepsilon_d = 80, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0$. a — $kh = 2$; b — $h = 1, t = 1$.

при возбуждении начальной волны на границе стратификации амплитуда нелинейной поправки к внутренней волне существенно превышает амплитуду аналогичной поправки к внешней волне. Наличие электростатического поля приводит к тому, что, когда в начальный момент времени волна возбуждается на свободной поверхности (рис. 3, a), амплитуда нелинейной поправки к внешней волне $\xi_1^{(2)}$ становится на порядок больше, чем аналогичная поправка в отсутствие поля (рис. 5). В то же время поправка второго порядка к внутренней волне $\xi_2^{(2)}$ при наличии поля (рис. 3, a) имеет тот порядок величины, что и без поля (рис. 5).

На рис. 3, b и 4, b приведены зависимости безразмерных нелинейных поправок к волнам на свободной поверхности жидкости $\xi_1^{(2)}(k)$ и на границе стратификации $\xi_2^{(2)}(k)$ от безразмерного волнового числа k, когда в начальный момент времени задана волновая деформация свободной поверхности (рис. 3, b) и на поверхности стратификации (рис. 4, b). Из представленных зависимостей видно, что амплитуды нелинейных поправок к волнам как функции волнового числа изменяются немонотонным образом, так же как и поправки первого порядка. В качественном отношении зависимости, приведенные на рис. 3, b и рис. 4, b, сходны и являются возрастающими периодическими функциями, различающимися только при $k < 3$.

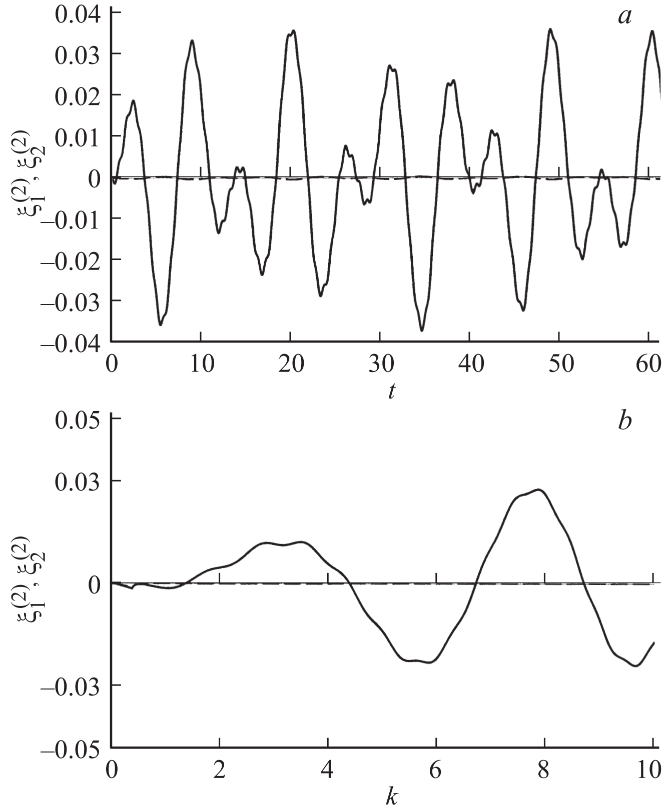

Рис. 4. Зависимости от времени (a) и от волнового числа (b) нелинейных поправок к профилям волн на свободной поверхности $\xi_1^{(2)}$ (штриховые кривые) и на границе стратификации $\xi_2^{(2)}$ (сплошные кривые), рассчитанные при $x = 0, \rho_1 = 1, \rho_2 = 1.01, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0.05, E_* = 2, \varepsilon_d = 80, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1$. a — $kh = 2$; b — $h = 1, t = 1$.

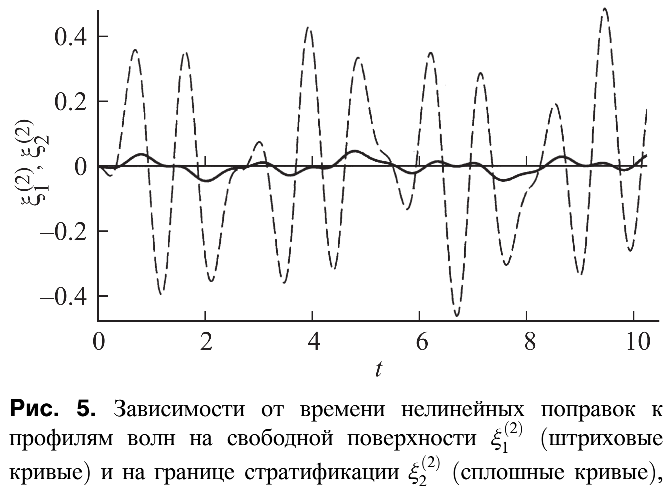

Рис. 5. Зависимости от времени нелинейных поправок к профилям волн на свободной поверхности $\xi_1^{(2)}$ (штриховые кривые) и на границе стратификации $\xi_2^{(2)}$ (сплошные кривые), рассчитанные при $x = 0, k = 2, \rho_1 = \sigma_1 = h = 1, \rho_2 = 1.01, \sigma_2 = 0.05, E_* = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0$.

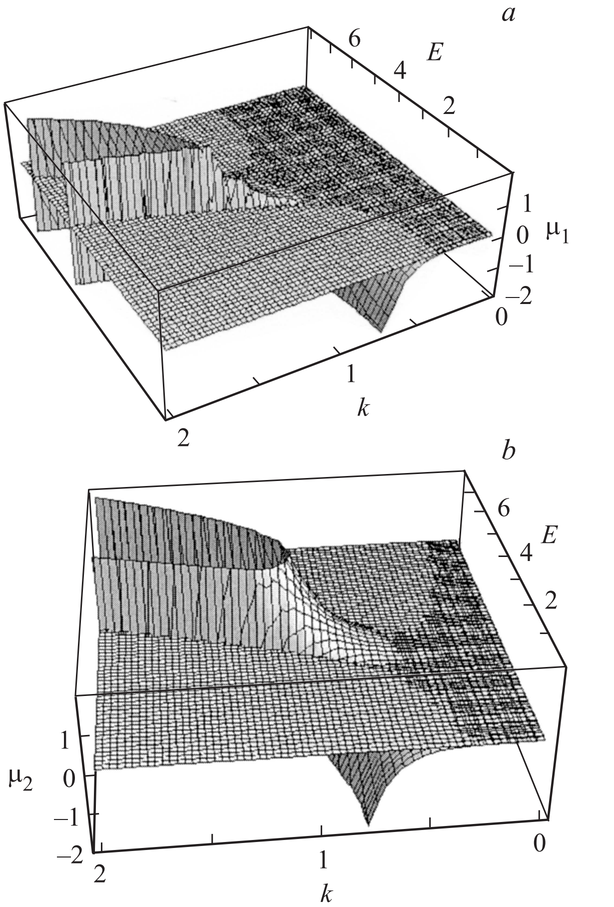

Рис. 6. Поверхности $\mu_i(k,W)$, пересеченные плоскостями $\mu_i = 0$, рассчитанные при $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1.01$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0.05$, $\varepsilon_d = 80$. a — $\mu_1(k,W)$, b — $\mu_2(k,W)$.

Исследование наличия резонансных ситуаций на основе соотношений $\mu_i = 0$ из (26) при условии, что частоты ω_i определяются как решения дисперсионного уравнения (19) (при этом множители μ_i становятся функциями двух параметров k и W), дает положительный результат. При наличии заряда на границе стратификации (т.е. электрического поля) обнаруживается как вырожденное (двухволновое), так и вторичное комбинационное (трехволновое) внутренние нелинейные резонансные взаимодействия волн, порожденных различными поверхностями. Резонансное взаимодействие волн реализуется на линии пересечения поверхностей $\mu_i(k,W)$ и $\mu_i = 0$, как это проиллюстрировано на рис. 6 для конкретных ситуаций: с выраженным резонансом $\mu_1(k,W)$ (рис. 6,a) и с вторичным комбинационным резонансом $\mu_2(k,W)$ (рис. 6,b). Из представленных графиков следует, что оба вида резонансных взаимодействий возможны лишь при конечном отличном от нуля значении напряженности электрического поля ($W > 0$). Для случая $\mu_3(k,W)$ нелинейное резонансное взаимодействие отсутствует, и наличие электрического поля не изменяет этой ситуации.

Заключение

В приведенном аналитическом исследовании волнового движения на границе стратификации несмешивающихся жидкостей и на свободной поверхности верхней жидкости выяснилось, что наличие электрического поля приводит к возможности проявления как вырожденного, так и вторичного комбинационного внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия между волнами на обеих поверхностях. При электрическом поле E_*, меньшем критического значения, для нелинейных поправок к профилям волн сохраняется эффект „мертвой воды“. В области значений E_*, близких к критическому, данный эффект пропадает: амплитуды нелинейных поправок к волнам на свободной поверхности имеют тот же порядок величины, что и поправки к волнам на границе раздела. Кроме того, приближение значения электрического поля к критическому приводит к возможности резонансного обмена энергией между волнами, распространяющимися по обеим поверхностям раздела.

Приложение

$$q_{11} = -2k^2\big(B_{11}\exp(kh) + B_{21}\exp(-kh)\big),$$

$$q_{12} = 2k^2(-1+\varepsilon_d)\big(D_{11}\exp(kh) + D_{21}\exp(-kh)\big),$$

$$q_{13} = 0,$$

$$q_{14} = 2k^2(A_1 - B_{11} - B_{21}), \quad q_{15} = 2k^2 d_1 A_1,$$

$$q_{16} = kd_1(D_{11} - D_{12}),$$

$$q_{17} = \bigg\{\frac{k^2}{8\pi\epsilon}\Big[2(\varepsilon_d^2 - 1)D_{11}D_{12} + (\varepsilon_d - 1)^2\big(D_{11}^2\exp(2kh)$$

$$+ D_{21}^2\exp(-2kh)\big) - 2k^2 B_{11}B_{21}\rho_1$$

$$+ ik\rho_1\omega_1(k)\big(-B_{11}\exp(kh) + B_{21}\exp(-kh)\big)\Big]\bigg\},$$

$$q_{18} = \bigg[\frac{k^2\varepsilon_d D_{11}D_{12}}{2\pi} + 2k^2 B_{11}B_{21}\rho_1$$

$$+ ikd_1\rho_1\omega_1(k)\Big(B_{11} - B_{21} - A_1\frac{\rho_2}{\rho_1}\Big)\bigg],$$

$$q_{21} = -2k^2\big[(B_{11} + B_{12})\exp(kh) + (B_{21} + B_{22})\exp(-kh)\big],$$

$$q_{22} = 2k^2\Big\{(-1+\varepsilon_d)\big[\exp(kh)(D_{11} + D_{12})$$

$$+ (D_{22} + D_{21})\exp(-kh)\big] - G_2\exp(-kh)\Big\},$$

$$q_{23} = 2ik^2 G_2\exp(-kh),$$

$$q_{24} = 2k^2\big[(A_2 - B_{12} - B_{22})d_1 + (A_1 - B_{11} - B_{12})d_2\big],$$

$$q_{25} = -2k^2(A_2 d_1 + A_1 d_2),$$

$$q_{26} = k\big[(D_{12} - D_{22})d_1 + (D_{11} - D_{21})d_2\big],$$

$$q_{27} = \left\{ \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_d} \Big[(-1+\varepsilon_d^2)(D_{12}D_{21} + D_{11}D_{22} + D_{11}G_2) + (-1+\varepsilon_d)^2 \big(D_{11}D_{12}\exp(2kh) + D_{21}(D_{22}+G_2)\exp(-2kh) \big) \Big] - ik\rho_1 \Big[\big(B_{11}\exp(kh) - B_{12}\exp(-kh) \big)\omega_1(k) + \big(B_{12}\exp(kh) - B_{22}\exp(-kh) \big)\omega_2(k) \Big] - 2k^2(B_{12}B_{21} + B_{11}B_{22})\rho_1 \right\},$$

$$q_{28} = \left\{ \frac{k^2\varepsilon_d(D_{12}D_{21} + D_{11}D_{22})}{2\pi} + 2k^2\rho_1(B_{12}B_{21} + B_{11}B_{22}) + ik\rho_1 \Big[d_2\Big(B_{11} - B_{21} - A_1\frac{\rho_2}{\rho_1} \Big)\omega_1(k) + d_1\Big(B_{12} - B_{22} - A_2\frac{\rho_2}{\rho_1} \Big)\omega_2(k) \Big] \right\},$$

$$q_{31} = -2k^2\big(B_{12}\exp(kh) + B_{22}\exp(-kh) \big),$$

$$q_{32} = 2k^2\Big[(-1+\varepsilon_d)\big(D_{12}\exp(kh) + D_{22}\exp(-kh) \big) - G_2\exp(-kh) \Big],$$

$$q_{33} = 2ik^2G_2\exp(-kh), \quad q_{34} = 2k^2(A_2 - B_{12} - B_{22})d_2,$$

$$q_{35} = -2k^2A_2d_2, \quad q_{36} = k(D_{12} - D_{22})d_2,$$

$$q_{37} = \left\{ \frac{k^2}{8\pi\varepsilon_d} \Big[(-1+\varepsilon_d)^2 \big(D_{12}^2\exp(2kh) + (D_{22}+G_2)^2\exp(-2kh) \big) + 2(-1+\varepsilon_d^2)D_{12}(D_{22}+G_2) \Big] - ik\rho_1\big(B_{12}\exp(kh) - B_{22}\exp(-kh) \big)\omega_2(k) - 2k^2B_{12}B_{22}\rho_1 \right\},$$

$$q_{38} = k\left[\frac{k\varepsilon_d D_{12}D_{22}}{2\pi} + 2kB_{12}B_{22}\rho_1 + i\rho_1 d_2\Big(B_{12} - B_{22} - A_2\frac{\rho_2}{\rho_1} \Big)\omega_2(k) \right].$$

$$B_{1i} = -\frac{i\omega_i\big(1 - d_i\exp(-kh)\big)}{2k\,\mathrm{sh}(kh)};$$

$$B_{2i} = \frac{i\omega_i\big(-1 + d_i\exp(kh)\big)}{2k\,\mathrm{sh}(kh)},$$

$$A_i = -\frac{i\omega_i d_i}{k}; \; D_{1i} = -\frac{E_*(-1+\varepsilon_d)\big(1 - d_i\exp(-kh)\big)}{2\varepsilon_d\big[\mathrm{sh}(kh) + \varepsilon_d\,\mathrm{ch}(kh)\big]},$$

$$D_{2i} = \frac{E_*\big((-1+\varepsilon_d) + \exp(kh)(1+\varepsilon_d)d_i\big)}{2\varepsilon_d\big(\mathrm{sh}(kh) + \varepsilon_d\,\mathrm{ch}(kh)\big)},$$

$$G_i = \frac{E_*\exp(kh)\big[\mathrm{ch}(kh)(-1+\varepsilon_d) + d_i\big]}{\mathrm{sh}(kh) + \varepsilon_d\,\mathrm{ch}(kh)}, \quad (i = 1, 2).$$

Работа выполнена при поддержке грантов Рособрнауки № РНП 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.

Список литературы

[1] *Сретенский Л.Н.* // Журнал геофизики. 1934. Т. 4. Вып. 3. С. 332–367.

[2] *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.

[3] *Григорьев А.И., Федоров М.С., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 5. С. 130–140.

[4] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Федоров М.С.* // http://zhurnal.are.relarn.ru/articles/2010/020.pdf.C.260–268.

[5] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Федоров М.С.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 7. С. 8–17.

[6] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Федоров М.С.* Капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2008. 550 с.

[7] *Григорьев А.И., Федоров М.С., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 11. С. 31–39.