

01;09;10

Математическая модель трансформации электронного пучка в узкой трубе

© А.Ю. Байков,² О.А. Грушина,¹ М.Н. Стриханов,¹ А.А. Тищенко¹

¹ Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ),
115409 Москва, Россия
e-mail: obkv@mail.ru

² Московский финансово-юридический университет (МФЮА),
117447 Москва, Россия
e-mail: baikov.a@mfua.ru; a_yu_baikov@mail.ru

(Поступило в Редакцию 13 апреля 2011 г. В окончательной редакции 11 октября 2011 г.)

Рассмотрена задача о трансформации электронного пучка в длинной узкой проводящей трубе. Для случая малой модуляции получены общие волновые решения для распространения произвольной (в том числе и непериодической) модуляции однородного пучка. Решение, соответствующие гармонической модуляции, сравнено с полученными ранее и описанными в литературе решениями. Рассмотрена также задача о трансформации пучка, соответствующей режиму группирования в мощных клистронах (в том числе с учетом обгона). Получено дискретно-аналитическое решение задачи в рамках „приближения замороженного пучка“. Это решение протестировано на задаче о рассепании моноскоростного сгустка и на задаче о кпд двухрезонаторного клистрона с бесконечно тонкими зазорами. В обоих случаях получены физически корректные результаты.

Введение

Мощные и сверхмощные многорезонаторные клистроны используются в радиолокации, дальней и космической радиосвязи, а также в качестве источника энергии для ускорителей элементарных частиц [1].

Перспективными областями применения таких приборов являются современные промышленные технологии, например, изготовление новых экологически чистых материалов (пеностекло, искусственный песчаник и т.д.), глубокая переработка нефти и др. Еще одной перспективной областью использования мощных сверхвысокочастотных (СВЧ) приборов является энергетика — эфирная передача и трансформация больших уровней мощности.

Широкое применение мощных клистронов в этих областях сдерживается сравнительно низким их кпд. И теоретически, и экспериментально (см. [2–6]) было показано, что возможен режим работы клистрона с кпд, близким к 100%. Фактически же выпускающиеся узкополосные клистроны имеют кпд не более 60–70%, а широкополосные — не более 30–40%.

Это объясняется тем, что первая часть проектирования клистрона — его математическое моделирование на основе компьютерных программ — является очень сложной и затратной задачей. Для получения максимального кпд требуется оптимизация в широком диапазоне значений параметров, которых у многорезонаторного клистрона может быть 20 и более. Для того чтобы такая оптимизация оказалась возможной, сама модель клистрона должна быть очень эффективной (т.е. быстродействующей). Это, в свою очередь, требует глубокого исследования всех процессов, происходящих

в клистроне, и построения модели с учетом всех особенностей этих процессов.

Ранее (см. [7–12]) была построена дискретно-аналитическая модель клистрона, сочетающая преимущества аналитических и численных моделей — высокое быстродействие с широкой областью адекватности.

Однако влияние пространственного заряда на процесс группировки в первом варианте этой модели учитывалось недостаточно точно. Для более точного описания процесса группировки (в этом числе с учетом обгона) потребовалось подробно исследовать задачу о трансформации электронного пучка, движущегося внутри сравнительно узкой трубы в сильном продольном магнитном поле.

Решение этой задачи позволило не только уточнить дискретно-аналитическую модель клистрона, но и решить принципиально новую задачу о трансформации произвольно модулированного пучка, в том числе с непериодической модуляцией.

Решение же исходной задачи — о группировании периодически модулированного электронного пучка в трубе дрейфа было получено в „приближении замороженного пучка“, отражающего особенности процесса группировки в клистроне. В качестве иллюстрации этого решения получена зависимость максимального кпд от коэффициента усиления в двухрезонаторном клистроне.

1. Постановка задачи

Рассмотрим электронный пучок, движущийся внутри узкой трубы в продольном магнитном поле (рис. 1).

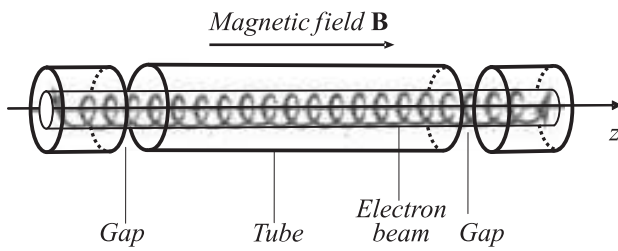


Рис. 1. Схема исследуемой системы.

Будем решать задачу в рамках следующих приближений.

1. Радиус трубки значительно меньше длины волны СВЧ-поля ($r_T/\lambda \ll 1$).
2. Радиус пучка в среднем постоянен и составляет фиксированную долю от радиуса трубки ($r_b/r_T \approx \text{const}$).
3. При фиксированном значении координаты z вдоль трубки плотность заряда не зависит от азимута ($\partial\rho/\partial\varphi = 0$).
4. Пучок узок, поэтому вместо радиального распределения плотности заряда можно брать среднее значение по радиусу ($\rho \approx \langle \rho \rangle_r$).
5. Релятивистские эффекты малы, поэтому можно считать, что $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$, где v_0 — невозмущенная скорость пучка.

Преобразуем общую систему уравнений (см. [12]), описывающую движение электронов в трубе, на основе сделанных предположений.

После интегрирования по азимуту и усреднения по радиусу получается уравнение

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\beta_{rel} \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \frac{\partial}{\partial z} \rho(z + u, t) du, \quad (1)$$

где

$$G(u) = \frac{2r_T}{\epsilon_0} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_k |u|}{r_T}\right) \left(\frac{J_1(\sigma_k \alpha)}{J_1(\sigma_k)}\right)^2 \frac{1}{\sigma_k^3} \quad (2)$$

— одномерная функция Грина [12,13], z — усредненная по азимуту и радиусу координата электронов пучка, $\alpha = r_b/r_T$ — отношение радиуса пучка к радиусу трубки, e, m — заряд и масса электрона, ϵ_0 — диэлектрическая постоянная, $\rho(z, t)$ — плотность пространственного заряда в зависимости от усредненной координаты и от времени, $J_1(x)$ — функция Бесселя, σ_k — k -й корень функции Бесселя $J_0(x)$, u — переменная интегрирования, имеющая смысл усредненной координаты относительно текущего значения, $\beta_{rel} = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ — релятивистский фактор.

В выражениях (1), (2) не входит магнитное поле, так как после усреднения по азимуту и радиусу уравнения исходной системы, содержащие компоненты магнитного поля обнуляются.

В левой части уравнения (1) стоит полная (лагранжева) вторая производная по времени от усредненной координаты. Можно считать, что левая часть имеет смысл ускорения некоторой „усредненной частицы“, а правая — силы, действующей на такую частицу. Таким образом, с точки зрения уравнения (1) пучок электронов можно рассматривать как одномерный поток „усредненных частиц“ — дисков, диаметр каждого из которых равен диаметру пучка, отношение заряда к массе — такое же, как у электрона, а толщина — $v dt$, где v — скорость вдоль трубы, а dt — дифференциал времени.

Усредненные частицы движутся вдоль трубы, т.е. вдоль силовых линий магнитного поля, поэтому магнитное поле не оказывает влияния на это движение, чем и объясняется отсутствие компонентов магнитного поля в выражениях (1), (2).

Обозначим через t_0 — момент прохода усредненной частицы через начальную плоскость $z = 0$. Будем считать, что в этой плоскости пучок еще не подвергся воздействию поля, поэтому скорость всех частиц в этой плоскости одинакова и равна v_0 .

Момент времени t_0 для каждой частицы свой, поэтому величина t_0 играет роль идентификатора частицы — лагранжевой переменной. Текущая координата каждой частицы зависит от времени t и от того, какая именно частица рассматривается (т.е. от t_0).

Таким образом, движение электронного пучка описывается функцией $z(t, t_0)$, относительно которой и записано уравнение (1). Для моделирования прибора вместо функции $z(t, t_0)$ удобнее рассматривать функцию прибытия $t(z, t_0)$ — обратную к функции $z(t, t_0)$.

Сформулируем постановку задачи Коши для уравнения (1). Пусть в некоторой плоскости $z = z_1$ заданы функции, определяющие условия Коши:

$$\begin{aligned} t_1(t_0) &= t(z_1, t_0), \\ v_1(t_0) &= \left. \frac{1}{\partial t(z, t_0)/\partial z} \right|_{z=z_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Необходимо найти функцию $t(z, t_0)$ в области $z > z_1$.

В рамках дискретно-аналитической модели [7,12] достаточно найти эту функцию в сравнительно небольшом диапазоне $z_1 < z < z_2$ с тем, чтобы определить условия Коши для $z = z_2$, построить решение для следующего диапазона и т.д.

Для замыкания задачи к уравнению (1) необходимо добавить связь между функциями $z(t, t_0)$ и $\rho(z, t)$. Наиболее просто эта связь получается, если предположить, что движение усредненных частиц происходит без обгона. Математически это означает, что $z(t, t_0)$ — монотонно убывающая функция t_0 в любой момент времени t , и производная $\partial z(t, t_0)/\partial t_0$ нигде не обращается в ноль. С одной стороны, такое предположение является весьма жестким и сильно сужает область адекватности модели. Несмотря на то что оптимальному режиму

клизтрона соответствует движение без обгона [3,6], при переборе неоптимальных вариантов в процессе оптимизации обгон может возникать. С другой стороны, решение задачи в рамках такого приближения позволяет получить простые и наглядные результаты, провести сравнение с полученными ранее результатами. Кроме того, как будет показано, в линейном приближении такое решение допускает естественное обобщение на случай произвольной (в том случае неперiodической) модуляции электронного пучка.

Рассмотрим далее последовательное решение двух задач.

1. Трансформация электронного пучка без обгона одних усредненных частиц другими при произвольной (в том числе и неперiodической) его модуляции.

2. Трансформация периодически модулированного пучка в общем случае, включая возможный обгон.

2. Движение пучка без обгона. Конвекционные волны

При движении без обгона связь между эйлеровыми и лагранжевыми координатами является взаимно-однозначной, и преобразовать друг в друга можно при помощи локальных дифференциальных соотношений. В частности, элемент заряда dq запишется в эйлеровых координатах как ρdz , а в лагранжевых как $-j_0 dt_0$, где j_0 — невозмущенная плотность тока в плоскости $z = 0$ (j_0 — заданная константа). Приравнявая эти выражения, получаем

$$\rho = -\frac{j_0}{\partial z / \partial t_0}. \tag{4}$$

Для дальнейшего упрощения исходного уравнения необходимо исследовать свойства функции Грина (2), представляющей собой бесконечный ряд, который необходимо аппроксимировать конечной суммой. Кроме аргумента u , имеющего смысл расстояния между источником потенциала и точкой наблюдения, функция G зависит еще от двух параметров — радиуса трубы r_T и коэффициента заполнения α .

Исследование показывает, что функция G имеет вид пика с экспоненциально убывающими хвостами с характерной шириной порядка r_T . Из рис. 2, на котором построена зависимость нормированной функции $G_{\text{norm}}(u, \alpha) = G(u, \alpha)/G(0, \alpha)$ от нормированного аргумента $u_{\text{norm}} = u/r_T$ при различных коэффициентах заполнения α , видно, что функция $G_{\text{norm}}(u_{\text{norm}})$ почти не изменяется в диапазоне реальных значений $0.4 \leq \alpha \leq 0.9$. Поэтому можно рассматривать только одно фиксированное значение, например, $\alpha = 0.5$.

Члены ряда (2) очень быстро убывают. Величина второго слагаемого составляет примерно 2% от величины первого (рис. 3), а величина третьего — 0.3% от величины первого. Поэтому ряд (2) можно заменить конечной суммой из n_s слагаемых, выбирая n_s

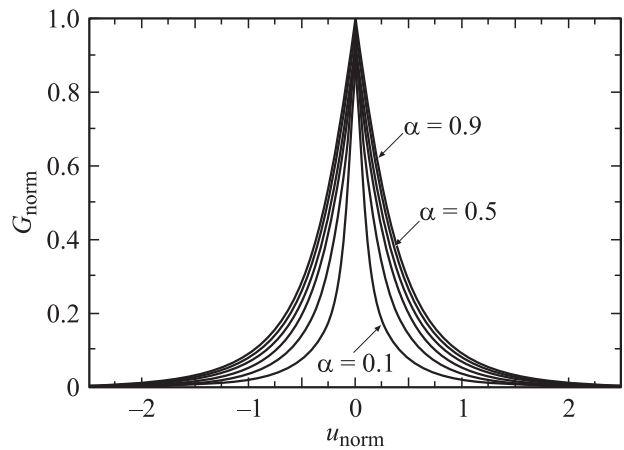


Рис. 2. Функции $G_{\text{norm}}(u, \alpha)$.

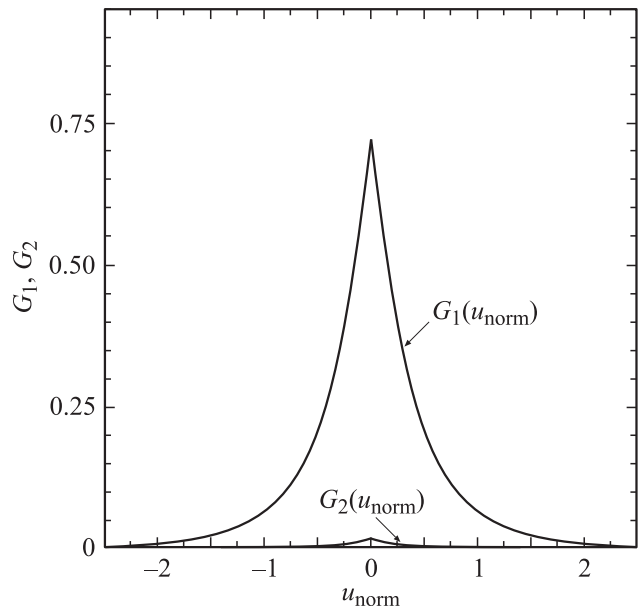


Рис. 3. Первые два слагаемых суммы (2).

из требований точности. В большинстве случаев будет достаточно $n_s = 2$ или 1.

Рассмотрим возможности упрощения исходного уравнения (1) на основе исследованных свойств функции Грина.

Предположим, что пучок слабо модулирован по плотности и по скорости:

$$\rho = \rho_0 + \rho_{\text{var}}, \quad v = v_0 + v_{\text{var}}, \quad \rho_{\text{var}} \ll \rho_0, \\ v_{\text{var}} \ll v_0, \quad v_0 = \text{const}, \quad \rho_0 = \text{const}.$$

Выведем в этих предположениях линейризованное уравнение, описывающее движение пучка в трубе в лагранжевых координатах.

Рассмотрим сначала уравнение относительно функции $z = z(t, t_0)$. Разложим плотность $\rho(z + u, t)$ в ряд Тейлора по переменной u и подставим полученное выражение

в уравнение (1). С учетом выражения (2) после такой подстановки и изменения порядка суммирования и интегрирования правая часть уравнения (1) превращается в сумму интегралов, которые берутся аналитически. Так как $G(u)$ — четкая функция, то все интегралы, содержащие нечетные степени u , зануляются. Оставшиеся интегралы представляют собой коэффициенты разложения в ряд. Непосредственным вычислением можно показать, что они образуют убывающую последовательность.

Ограничимся первым ненулевым слагаемым. При этом результат интегрирования функции Грина представится как

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(u)du = \frac{4r_0^2}{\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n_s} \left(\frac{J_1(\sigma_k \alpha)}{J_1(\sigma_k)} \right)^2 \frac{1}{\sigma_k^4}. \quad (5)$$

Обозначим величину, определяемую выражением (5), через Ω_p^2 . Уравнение (1) переписывается в виде

$$\frac{d^2 z(t, t_0)}{dt^2} = -\beta_{rel} \frac{e}{m} j_0 \Omega_p^2 \frac{1}{(\partial z(t, t_0)/\partial t_0)^3} \frac{\partial^2 z(t, t_0)}{\partial t_0^2}. \quad (6)$$

Далее будем считать, что

$$z(t, t_0) = z^{(0)}(t, t_0) + z_{var}(t, t_0),$$

$$z^{(0)}(t, t_0) = z_1 + v_0[t - t_1(t_0)], \quad t_1(t_0) = t_0 + \frac{z_1}{v_0}$$

(между плоскостями $z = 0$ и $z = z_1$ пучок не модулирован), и линеаризуем полученное уравнение относительно функции $z_{var}(t, t_0)$. Получаем

$$\frac{\partial^2 z_{var}(t, t_0)}{\partial t^2} - \Omega_p^2 \frac{\partial^2 z_{var}(t, t_0)}{\partial t_0^2} = 0, \quad (7)$$

где

$$\Omega_p^2 = \beta_{rel} \frac{e}{m} \frac{j_0}{v_0^3} \Omega_0^2. \quad (8)$$

Уравнение (7) является волновым уравнением, а величина Ω_p , определяемая выражением (8), имеет смысл безразмерной фазовой скорости.

Величину Ω_p будем называть параметром пространственного заряда. Эту величину можно записать в несколько другом виде, если вместо плотности тока j_0 и скорости пучка v_0 использовать соответственно полный ток пучка I_0 и ускоряющее напряжение U_0 . Сделаем это, считая движение пучка нерелятивистским. В этом случае:

$$\beta_{rel} = 1, \quad j_0 = \frac{I_0}{\pi r_b^2}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}.$$

Подставляя эти соотношения в выражение (8), получим

$$\Omega_p^2 = p \sqrt{\frac{2m}{e}} \frac{1}{\pi \varepsilon_0 \alpha^2} \sum_{k=1}^{n_s} \left(\frac{J_1(\sigma_k \alpha)}{J_1(\sigma_k)} \right)^2 \frac{1}{\sigma_k^4}, \quad (9)$$

где $p = I_0/U_0^{3/2}$ — перванс пучка, имеющий размерность $[A/V^{3/2}]$. Далее вместо p будем рассматривать микроперванс — $p \rightarrow p \cdot 10^{-6}$.

Рассмотрим величину Ω_p как функцию от α, p (рис. 4). Как видно из графика, для практически важного диапазона значений $\alpha = 0.4-0.6, p = 0.3-1$ (что соответствует параметрам пучка в мощных клистродах), величина Ω_p находится в диапазоне 0.06–0.13. Таким образом, Ω_p является малой по сравнению с 1 величиной, что позволяет всегда рассматривать влияние пространственного заряда на движение пучка как поправку.

Ранее в работах [14–16] были получены решения для движения слабозмущенного пучка при синусоидальной модуляции. В этих работах был получен аналогичный (9) параметр пространственного заряда, интерпретированный как плазменная частота. Сравним полученные в работах параметры пространственного заряда с выражением (9). Обозначим через Ω_{pz} параметр, полученный в работе [15], а через Ω_{ps} — параметр, полученный в работе [16]. На рис. 5 величины Ω_{pz} и Ω_{ps} представлены сериями графиков, так как

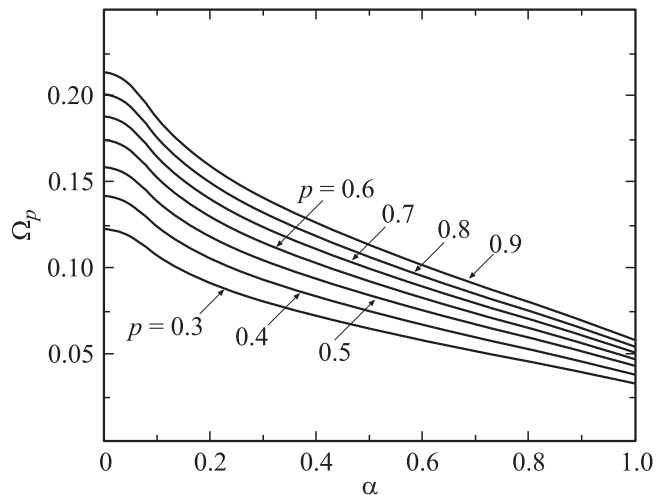


Рис. 4. Зависимость параметра пространственного заряда Ω_p от α, p .

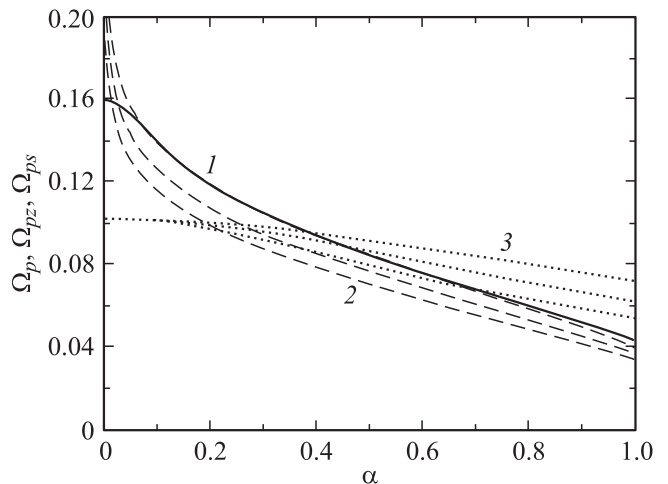


Рис. 5. Сравнение параметров пространственного заряда: 1 — Ω_p , 2 — Ω_{pz} , 3 — Ω_{ps} .

соответствующие выражения содержат в качестве дополнительного параметра ω — частоту синусоидальной модуляции. Как видно из рис. 5, в практически важном диапазоне значений $\alpha = 0.4-0.6$ оба семейства кривых, а также кривая Ω_p дают близкие значения с разбросом около 0.02. Это означает, что для малой синусоидальной модуляции любая из этих формул применима.

Следует заметить, что уравнение (7) и выражение (8) (или (9)) получены без предположения о синусоидальности и вообще без предположения о каком-то конкретном виде модуляции, поэтому они имеют большую общность, чем результаты, полученные в цитированных работах.

Рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть в плоскости $z = z_1$ однородный пучок подвергнется некоторому возмущению, так что скорость каждой частицы изменилась на величину $v_{var1}(t_0)$ и стала равной $v_1(t_0) = v_0 + v_{var1}(t_0)$. Необходимо найти $z(t, t_0)$ при $z > z_1$.

Общее решение уравнения (7) в этом случае дается формулой Даламбера

$$z_{var}(t, t_0) = \frac{1}{2\Omega_p} \int_{t_0 - \Omega_p t}^{t_0 + \Omega_p t} v_{var1}(s) ds. \quad (10)$$

Выражение (10) можно рассматривать как общий вид волны смещения частиц (конвекционной волны). Рассмотрим эти волны при различных начальных возмущениях скорости.

Гармоническое возмущение

Пусть

$$v_{var1}(t_0) = a \sin(\omega t_0 - \phi). \quad (11)$$

После взятия интеграла в выражении (10) окончательно получаем

$$z_{var}(t, t_0) = \frac{v_{var1}(t_0)}{\omega \Omega_p} \sin(\Omega_p \omega t). \quad (12)$$

Фазовые траектории, соответствующие выражению (12), изображены на рис. 6.

Выражение (12) можно интерпретировать как стоячую конвекционную волну. Это выражение практически совпадает (отличие состоит только в выражении (8) для параметра Ω_p) с аналогичными выражениями, полученными из других соображений в работах [14,15] и интерпретированных там как плазменные колебания. Но, как видно из выражения (10), конвекционные волны, распространяющиеся по электронному пучку, не являются плазменными колебаниями, так как они могут сильно отличаться от колебаний, описываемых выражением (12). Но даже в выражении (12) величина Ω_p не является собственной частотой (и вообще не является частотой). Это безразмерный параметр, на который умножается частота внешнего возмущения. Далее рассмотрим пример конвекционной волны, существенно отличающейся от гармонической.

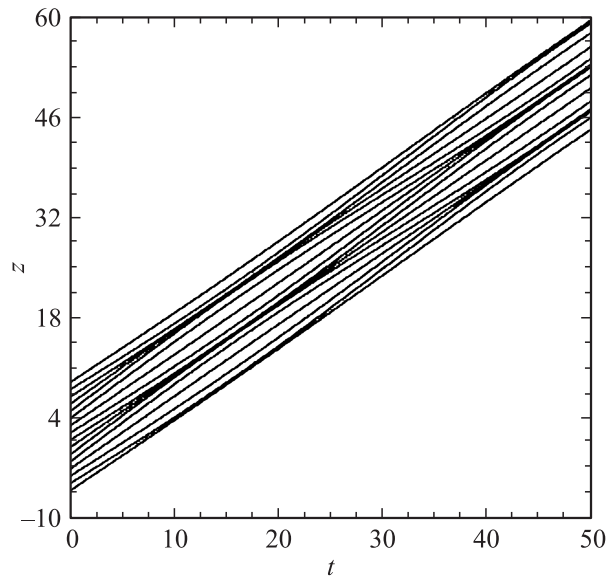


Рис. 6. Фазовые траектории $z(t, t_0)$ при синусоидальном возмущении.

Возмущение в виде δ -функции

Пусть однородный пучок подвергается начальному возмущению скорости вида $v_{var1}(t_0) = A\delta(t_0)$ — в плоскости $z = z_1$ частица $t_0 = 0$ получает мгновенное сильное изменение скорости, а все остальные частицы возмущению не подвергаются. Взятие интеграла в выражении (10) приводит в этом случае к следующему выражению:

$$z_{var}(t, t_0) = \begin{cases} \frac{A}{2\Omega_p}, & \text{если } t_0 - \Omega_p t \leq 0 \leq t_0 + \Omega_p t \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}. \quad (13)$$

Полные фазовые траектории, т.е. зависимости $z(t, t_0)$ в координатах z, t , имеют вид ломаных линий (рис. 7),

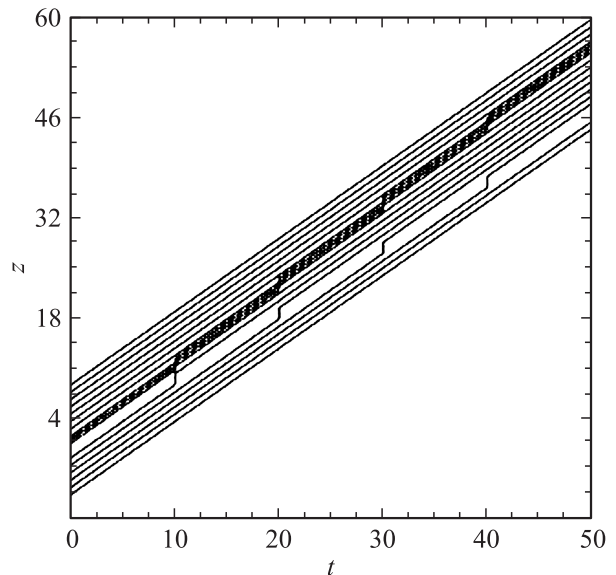


Рис. 7. Фазовые траектории $z(t, t_0)$ при δ -возмущении.

причем каждая форма траектории испытывает ровно один излом. Области сгущения и разрежения образуют при этом два расходящихся луча, и трансформация пучка представляется суперпозицией двух конвекционных неперидических δ -волн (быстрой и медленной). Таким образом, в электронном пучке могут распространяться и неперидические конвекционные волны. Более подробно характер распространения этих волн рассмотрим в следующем примере.

Локальное немгновенное возмущение

Рассмотрим начальное возмущение скорости вида

$$v_{var1}(t_0) = \frac{A}{\sigma} \exp\left(-\frac{t_0^2}{2\sigma^2}\right), \quad (14)$$

где σ — малый параметр, задающий ширину импульса. В этом случае фазовые траектории становятся гладкими линиями, но в целом характер картины сохраняется — две волны (разрежения и сжатия), расходящиеся под углом друг относительно друга.

Построим зависимости $\rho(t_0)$ и $v(t_0)$ в различные моменты времени, нормировав величины t и t_0 на характерное время $t_{char} = r_T/v_0$, скорость — на невозмущенную скорость v_0 , плотность — на невозмущенную плотность $\rho_0 = j_0/v_0$, т.е. $t \rightarrow t/t_{char}$, $t_0 \rightarrow t_0/t_{char}$.

Как видно из рис. 8, возмущение скорости преобразуется в возмущение плотности такого же вида и распространяется в виде двух волн, первая из которых — волна сжатия — движется быстрее пучка, вторая — волна разрежения — медленнее пучка.

Для моделирования процессов в клистронах и в других приборах o -типа необходимо знать не зависимость $z(t, t_0)$, а функцию прибытия $t(z, t_0)$. Выведем уравнение, аналогичное уравнению (7), для функции прибытия $t(z, t_0)$. Произведя замену переменных в уравнении (1) $z(t, t_0) \rightarrow t(z, t_0)$, представив функцию прибытия $t(z, t_0)$ в виде

$$t(z, t_0) = t_1(t_0) + \frac{z - z_1}{v_0} + t_{var}(z, t_0)$$

и линеаризовав полученное уравнение относительно переменной добавки $t_{var}(z, t_0)$, получим

$$\frac{\partial^2 t_{var}}{\partial z^2} = -\Omega_p^2 \left(-\frac{1}{v_0} \frac{\partial^2 t_{var}}{\partial z \partial t_0} + \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 t_{var}}{\partial t_0^2} \right). \quad (15)$$

Задача Коши для уравнения (15) будет иметь вид

$$t_{var}(z_1, t_0) = t_{var1}(t_0), \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial t_{var}}{\partial z} \right|_{z=z_1} = \frac{-v_{var1}(t_0)}{v_0^2}. \quad (17)$$

Уравнение (15) относится к тому же типу, что и уравнение (7), поэтому их решения аналогичны.

При больших амплитудах возмущений, воздействующих на пучок, ограничиваться линейным приближением

нельзя, и необходимо искать решения нелинейного волнового уравнения (6). Эти решения будут представлять собой нелинейные конвекционные волны. Их нелинейность проявится, например, в искажении профиля возмущения на рис. 8. Однако для исследования процессов группирования пучка в клистроне такие решения не представляют большого интереса, потому что возрастание амплитуды возмущения может привести к обгону, а при обгоне само уравнение (6) становится неверным.

3. Приближение модели „замороженного пучка“ для режима большой модуляции плотности

Будем теперь считать, что модуляции скорости и плотности не являются малыми (условие $\rho_{var} \ll \rho_0$ не выполнено), и при движении электронного пучка возможен обгон одних усредненных частиц другими. В этом случае задача значительно усложняется, поэтому будем искать решение не для общего случая, а при дополнительных предположениях, соответствующих режиму группировки в клистроне.

В клистроне все характеристики пучка являются периодическими функциями времени, поэтому далее будем рассматривать только периодические зависимости.

В дискретно-аналитической модели [7,12] на каждом шаге параметры пучка (скорость, плотность заряда, плотность тока и т.д.) рассматриваются как заданные величины в некоторой плоскости $z = z_1$, и необходимо их найти в плоскости $z = z_2$. Если плоскость z_2 достаточно близка к плоскости z_1 , а скорость перегруппировки является медленной по сравнению со скоростью пучка v_0 , то можно ввести следующее дополнительное приближение.

Рассмотрим плотность заряда как функцию $\rho = \rho(t, z)$ и введем вместо переменной t новую переменную

$$\xi = \frac{\omega z}{v_{01}} - \omega t. \quad (18)$$

где ω — частота СВЧ-поля, v_{01} — средняя скорость пучка в плоскости $z = z_1$. Переменная ξ имеет смысл фазы частицы относительно пучка. Обозначив $\Delta z = z - z_1$, получим функцию $\rho = \rho(\xi, z_1 + \Delta z)$, которую можно разложить в ряд Тейлора по степеням Δz .

Учитывая медленность процесса изменения плотности заряда в трубе дрейфа клистрона, ограничимся в разложении только первым слагаемым. В этом случае плотность заряда станет функцией только одной переменной ξ :

$$\rho(t, z) \rightarrow \rho(\xi). \quad (19)$$

Приближение, определяемое выражениями (18), (19), будем называть приближением модели „замороженного пучка“ (ПЗП).

Разложим функцию $\rho(\xi)$ в ряд Фурье и подставим полученное выражение в уравнение (1). Получим урав-

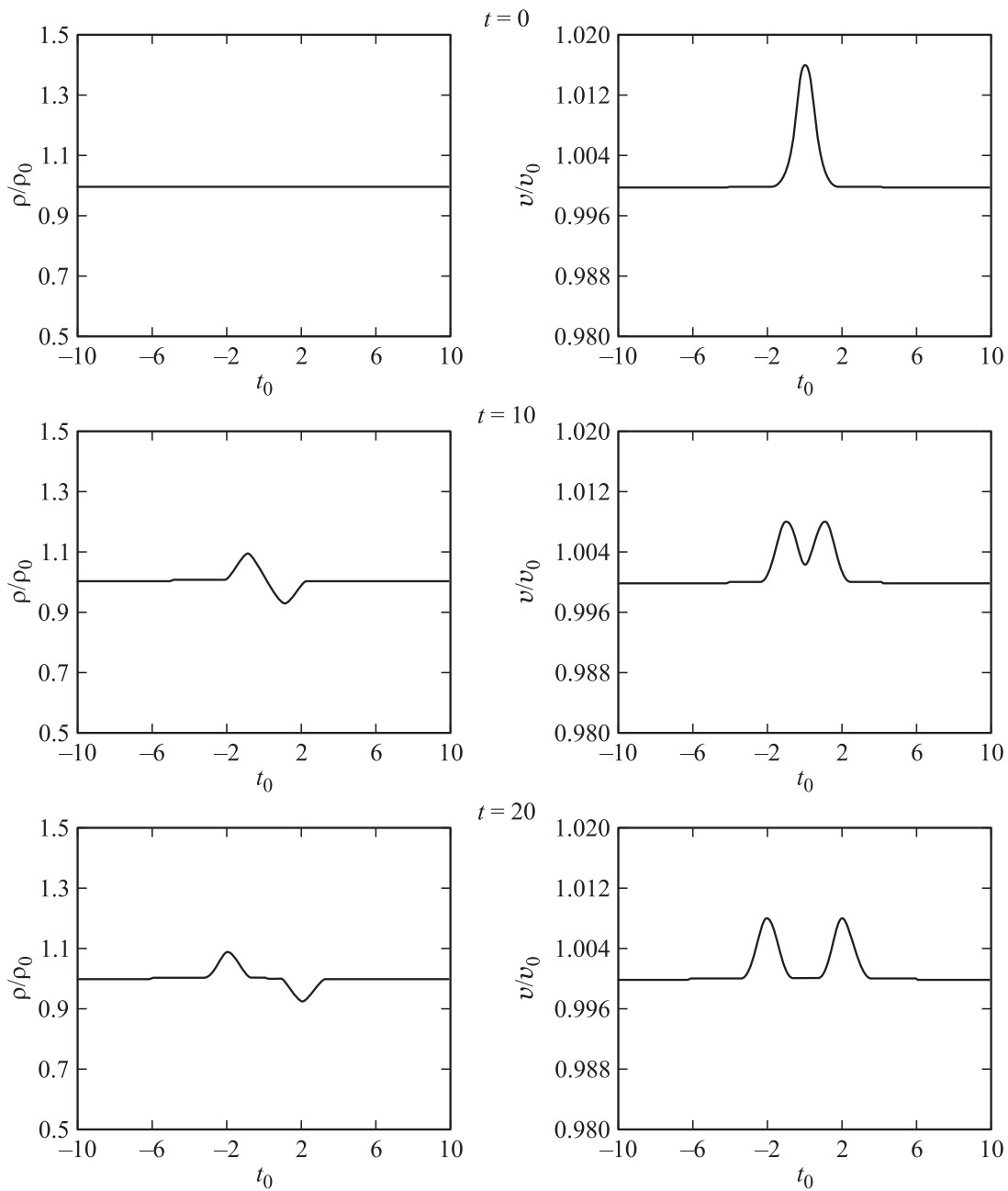


Рис. 8. Плотность заряда ρ/ρ_0 и скорость пучка v/v_0 в зависимости от t_0 в различные моменты времени t после воздействия локального возмущения (14).

нение

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\beta_{\text{rel}} \frac{e}{m} \left(\frac{\omega}{v_{01}} \right)^2 \times \sum_{l=1}^{n_s} (A_l \cos(l\xi) - B_l \sin(l\xi)) \Omega_l'^2, \quad (20)$$

где

$$\Omega_l'^2 = \frac{4r_T^2}{\epsilon_0} \sum_{k=1}^{n_G} \frac{1}{\sigma_k^4} \left(\frac{J_1(\sigma_k \alpha)}{J_1(\sigma_k)} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 l^2 r_T^2}{\sigma_k^2 v_{01}^2}}, \quad (21)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \xi|_{z=z_1} = \frac{\omega z_1}{v_{01}} - \omega t_1(t_0), \\ \frac{d\xi}{dt}|_{z=z_1} = \frac{\omega v_1(t_0)}{v_{01}} - \omega. \end{cases} \quad (22)$$

Уравнение (20) интегрируется, в результате чего получается следующее квадратурное выражение, связывающее координату z с временем прибытия усредненной

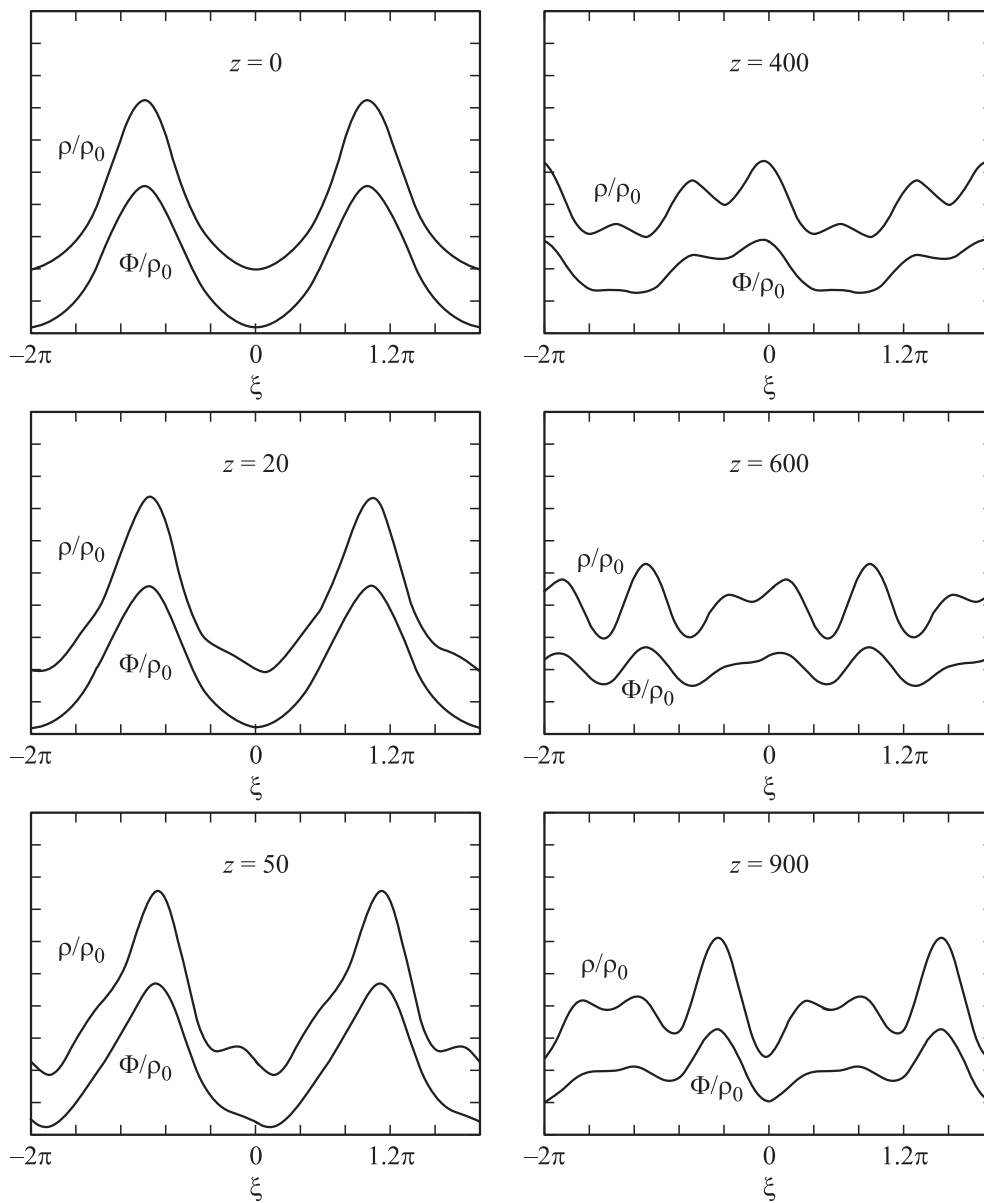


Рис. 9. Рассыпание моноскоростного сгустка.

частицы:

$$t = t_1 + \int_{\frac{\omega z_1}{v_{01}} - \omega t_1}^{\frac{\omega z}{v_{01}} - \omega t} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_1^2 - 2\beta_{rel} \frac{e}{m} \left(\frac{\omega}{v_{01}}\right)^2 \Omega_0^2 [\Phi(\xi) - \Phi(\xi_1)]}}, \quad (23)$$

где

$$\Phi(\xi) = \sum_{l=1}^{n_s} \gamma_l^2 (A_l \sin(l\xi) + B_l \cos(l\xi)) \quad (24)$$

— функция распределения потенциала в сгруппированном пучке, $\gamma_l^2 = \Omega_l^2 / \Omega_0^2$, а

$$\xi_1 = \frac{\omega z_1}{v_{01}} - \omega t_1(t_0).$$

Разложение в подынтегральном выражении разности $\Phi(\xi) - \Phi(\xi_1)$ в ряд Тейлора до квадратичного члена позволяет вычислить интеграл в выражении (23) и получить аналитические решения (см. [11]), которые определяют зависимость $z(t, t_0)$.

Для решения задачи группирования необходима обратная зависимость — функция прибытия $t(z, t_0)$. Обратив выражения для $z(t, t_0)$ методом Ньютона, получим

$$t(z_1 + \Delta z, t_0) = t_1(t_0) + \frac{\Delta z}{v_{01}} + \tau(\Delta z, t), \quad (25)$$

где функция $\tau(\Delta z, t)$ вычисляется итерационной процедурой

$$\tau_0 = 0,$$

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{\tau_n + \alpha \sin[\Omega_\Phi(\frac{\Delta z}{v_{01}} + \tau_n)] - \beta \{1 - \cos[\Omega_\Phi(\frac{\Delta z}{v_{01}} + \tau_n)]\}}{1 + \alpha \Omega_\Phi \cos[\Omega_\Phi(\frac{\Delta z}{v_{01}} + \tau_n)] - \beta \Omega_\Phi \sin[\Omega_\Phi(\frac{\Delta z}{v_{01}} + \tau_n)]} \quad (26)$$

при $\Phi''(\xi_1) > 0$ и

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{\tau_n + \alpha \operatorname{sh}[\Omega_\Phi(\frac{\Delta z}{v_{01}} + \tau_n)] - \beta \{1 - \operatorname{ch}[\Omega_\Phi(\frac{\Delta z}{v_{01}} + \tau_n)]\}}{1 + \alpha \Omega_\Phi \operatorname{ch}[\Omega_\Phi(\frac{\Delta z}{v_{01}} + \tau_n)] + \beta \Omega_\Phi \operatorname{sh}[\Omega_\Phi(\frac{\Delta z}{v_{01}} + \tau_n)]} \quad (27)$$

при $\Phi''(\xi_1) < 0$.

В выражениях (25)–(27) использованы обозначения

$$\Delta z = z - z_1, \quad \Delta t = t - t_1(t_0), \quad \tau = \Delta t - \frac{\Delta z}{v_{01}},$$

$$\alpha = \frac{v_1 - v_{01}}{v_{01} \Omega_\Phi}, \quad \beta = \frac{1}{\omega} \frac{\Phi'(\xi_1)}{\Phi''(\xi_1)}.$$

Выражения (25)–(27) являются основными формулами, описывающими группировку электронного пучка в рамках модели ПЗП.

Рассмотрим на основе модели ПЗП решения двух задач.

Задача о рассыпании моноскоростного сгустка

Рассмотрим задачу о трансформации пучка, сгруппированного в короткие сгустки, но не модулированного по скорости (все частицы движутся со скоростью v_{01}).

Попытка решить эту задачу в линейном приближении приводит к качественно неверному результату: все частицы пучка должны продолжить движение с той же постоянной скоростью. Однако из физических соображений ясно, что частицы пучка, испытывая кулоновское отталкивание, должны смещаться относительно своего исходного положения в пучке, а именно из области сгустка они должны перемещаться в область ямы. Таким образом, сгустки должны расплываться, превращая пучок в более однородный. Этот процесс может носить немонотонный характер: каждый сгусток распадается на более мелкие сгустки, при этом плотность может локально увеличиваться.

Если плотность пучка в среднем уменьшается, то уменьшается и потенциальная энергия электростатического взаимодействия частиц. В соответствии с законом сохранения энергии это приводит к увеличению кинетической энергии, т. е. пучок при разгруппировании должен в среднем самоускоряться.

На рис. 9 приведены графики распределения плотности заряда $\rho(\xi)$ и потенциальной функции $\Phi(\xi)$ в различных плоскостях z . Левый столбец рисунков соответствует начальной стадии рассыпания сгустка ($z/z_{\text{char}} < 50$, где $z_{\text{char}} = v_0/\omega$, т. е. расстояние измеряется в радианах СВЧ-поля). Частицы из области сгустка начинают постепенно перемещаться в область ямы, формируя там

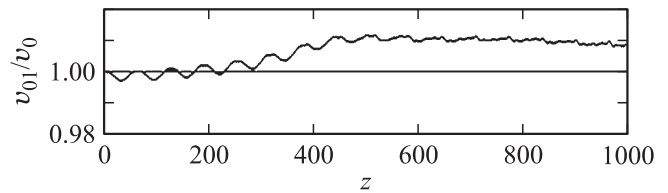


Рис. 10. Изменение средней скорости пучка при рассыпании моноскоростного сгустка.

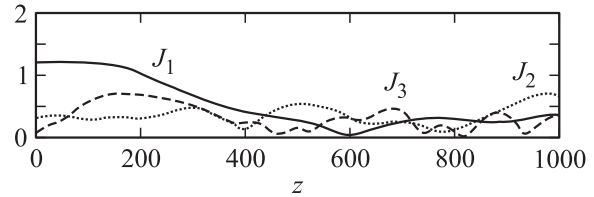


Рис. 11. Изменение первых трех гармоник тока J_1, J_2, J_3 при рассыпании моноскоростного сгустка.

новый сгусток. Правый столбец рисунков соответствует процессу окончательной перегруппировки пучка. Первоначальная структура пучка полностью разрушается и преобразуется в новую. Полученные результаты полностью соответствуют картине трансформации пучка, вытекающей из качественных физических соображений.

Как видно из рис. 10, описывающего изменение средней скорости пучка в процессе его трансформации, разгруппировка пучка действительно сопровождается увеличением его средней скорости.

Изменения первых трех гармоник тока в зависимости от координаты представлены на рис. 11. Рассыпание моноскоростного сгустка сопровождается немонотонным уменьшением первой гармоники. Изменения второй и третьей гармоник носят пульсирующий характер, что связано с перегруппировкой пучка и образованием 2–3 вторичных сгустков внутри периода.

Следует отметить, что существенное изменение характеристик моноскоростного сгустка происходит на достаточно больших расстояниях $z/z_{\text{char}} > 200$, т. е. рассматриваемый процесс происходит достаточно медленно. Для сравнения отметим, что суммарная нормированная длина всех труб дрейфа типичного клистрона составляет 35–45 радиан СВЧ-поля.

3.1. Кпд и коэффициент усиления двухрезонаторного клистрона

Двухрезонаторный клистрон — это простейший прибор клистронного типа, включающий 2 резонатора — входной и выходной, зазоры которых соединены трубой дрейфа. Электронный пучок модулируется по скорости в зазоре входного резонатора, затем группируется в трубе дрейфа, превращаясь в последовательность сгустков, и, пролетая зазор выходного резонатора, возбуждает его.

Электронный КПД двухрезонаторного клистрона — это отношение мощности взаимодействия пучка с СВЧ-полем выходного зазора к мощности пучка

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}U_{out}I_{out}}{U_0I_0}, \quad (28)$$

где U_{out} — амплитуда 1-й гармоники напряженности в выходном зазоре; I_{out} — амплитуда 1-й гармоники наведенного тока в выходном резонаторе; U_0, I_0 — напряжение и ток невозмущенного пучка.

В простейшей модели клистрона зазоры резонатора считаются бесконечно тонкими [17]. В этом случае максимальная амплитуда 1-й гармоники напряжения в выходном зазоре равна U_0 (при большем значении начнется отражение электронов), а гармоники наведенного тока совпадают с гармониками тока пучка (конвекционного тока) в данном сечении.

Таким образом, для клистрона с бесконечно тонкими зазорами максимально возможный КПД определяется соотношением

$$\eta_{max} = \frac{I_{1max}}{2I_0}, \quad (29)$$

где I_{1max} — максимальное значение 1-й гармоники конвекционного тока пучка. Из выражения (29) следует, что задача о максимальном КПД двухрезонаторного клистрона с бесконечно тонкими зазорами сводится к задаче нахождения максимума 1-й гармоники конвекционного тока.

Кроме КПД еще одним важным параметром клистрона является измеряемый в дебаях коэффициент усиления, который определяется отношением амплитуды 1-й гармоники выходного напряжения U_{out} к амплитуде 1-й гармоники входного напряжения U_{in} ,

$$K_u = 10 \lg \left(\frac{U_{out}}{U_{in}} \right). \quad (30)$$

Для клистрона с бесконечно тонкими зазорами можно зафиксировать $U_{out} = U_0$, поэтому коэффициент усиления такого клистрона определяется только амплитудой входного напряжения.

Ранее в кинематической теории группирования в клистроне [17] были получены следующие результаты: максимальный КПД равен 0.58, максимальный коэффициент усиления не ограничен и определяется только длиной трубки, КПД и коэффициент усиления не зависят друг от друга. На самом же деле из-за влияния пространственного заряда пучка коэффициент усиления двухрезонаторного клистрона ограничен и связан с КПД: при малом входном сигнале пучок не может сгруппироваться и КПД падает.

Исследуем эту связь на основе полученного решения. Рассмотрим двухрезонаторный клистрон с типичными значениями параметров пучка [17] $\Omega_p = 0.1$, $\alpha = 0.5$, $\omega r_T / v_0 = 1$.

Пусть во входном зазоре действует синусоидальное напряжение, амплитуду которого мы можем задать. Это

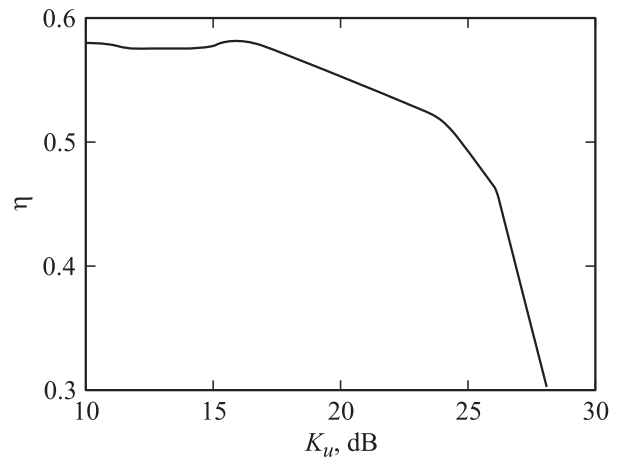


Рис. 12. Связь между КПД и коэффициентом усиления в двухрезонаторном клистроне.

приводит к синусоидальной модуляции скорости пучка с заданной амплитудой [17]

$$\frac{v_{1var}}{v_0} = \frac{U_{in}}{U_0}.$$

Далее для каждого значения v_{1var} можно вычислить распределение 1-й гармоники тока по трубе, найти максимум этого распределения и по формуле (29) вычислить максимальный КПД.

Результаты этих расчетов приведены на рис. 12, из которого видно, что максимальный КПД практически совпадает с кинематическим значением 0.58, но достигается этот КПД только при достаточно малом коэффициенте усиления (не более 17 дБ). При увеличении коэффициента усиления выше 24 дБ КПД резко падает.

Полученные результаты соответствуют как физическому смыслу рассматриваемых процессов (при малой входной модуляции пучок не может хорошо сгруппироваться), так и известным экспериментальным данным (не существует многорезонаторных клистронов, коэффициент усиления которого превышал бы 20 дБ на каскад).

Заключение

Таким образом, исследована задача о трансформации электронного пучка в узкой трубе.

Получены решения исходных уравнений в линейном приближении и показано, что все такие возмущения (а не только синусоидальное) распространяются в виде двух волн (быстрой и медленной), сохраняя свою форму.

Для режима большой модуляции плотности реализовано ПЗП, заключающееся в предположении о неизменности плотности пучка на одном пространственном шаге. В этом приближении было получено основное ПЗП-решение (25)–(27), на основе которого решены задачи о расспадании моноскоростного сгустка и о связи максимального КПД с коэффициентом усиления в двухрезонаторном клистроне.

Для моноскоростного сгустка показано, что ПЗП-решение дает качественно правильную картину его распыления, причем проявляются эффекты формирования нескольких малых вторичных сгустков внутри периода, пульсирующего изменения гармоник тока и самоускорения пучка за счет уменьшения потенциальной энергии взаимодействия в сгустке. Показано, что для проявления эффекта распыления моноскоростного сгустка труба дрейфа должна иметь нормированную длину (угол пролета) не менее 200 рад.

Для двухрезонаторного клистрона показано, что максимальный КПД составляет 0.57–0.58, что очень хорошо согласуется со значением максимального КПД, вытекающим из кинематической теории (0.58). Однако в отличие от кинематической теории получена связь между максимальным КПД и коэффициентом усиления (рис. 12). Оказалось, что при увеличении коэффициента усиления больше 22–23 дБ максимальный КПД резко падает, что полностью соответствует физическому смыслу процесса группирования (при слишком малой начальной модуляции скорости пучок не может полностью сгруппироваться ни при какой длине трубы дрейфа).

Полученное ПЗП-решение может быть использовано в дискретно-аналитической модели клистрона для быстрого и точного моделирования клистронов в широком диапазоне значений частоты и выходной мощности, для синтеза клистронов с максимально возможным КПД и для моделирования других мощных вакуумных резонансных приборов *O*-типа.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, программы ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009–2013 гг., контракты П681 и П1093.

Список литературы

- [1] *Артюх И.Г., Байков А.Ю., Петров Д.М.* // Тр. 52-й научной сессии, посвященной Дню радио. М.: 1997. Ч. 2. С. 68–71.
- [2] *Лебединский С.В., Канавец В.И., Васильев Е.И., Гранит Я.А., Журавлев С.В., Кучугурный В.И., Сандалов А.Н.* // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1977. № 1. С. 41–51.
- [3] *Доколин О.А., Кучугурный В.И., Лебединский С.В., Мальных А.В., Петров Д.М.* // Изв. вузов МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника. Киев, 1984. Т. 27. № 12. С. 47–55.
- [4] *Байков А.Ю., Петров Д.М.* // Тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. „Актуальные проблемы электронного приборостроения“. Саратов, 1996. Ч. 1. С. 22–23.
- [5] *Байков А.Ю., Д.М. Петров.* // Тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. „Актуальные проблемы электронного приборостроения“. Саратов. СГТУ. 1998. Т. 1. С. 56–58.
- [6] *Bajkov A.Yu., Petrov D.V.* // International University Conference „Electronics and Radiophysics of Ultra-high Frequencies“. St. Petersburg, 1999. P. 5–8.
- [7] *Байков А.Ю., Петров Д.М.* // Тез. докл. междунар. конф. посвященной 100-летию изобретения радио. М., 1995. С. 85–88.
- [8] *Байков А.Ю.* // Тр. конф. „Математика, информатика, естествознание в экономике и в обществе“. М.: МФА, 2006. С. 84. <http://conf.mfua.ru/2006>.
- [9] *Байков А.Ю., Грушина О.А.* // Математика, информатика, естествознание в экономике и в обществе / Тр. междунар. науч.-практ. конф. Т. 1. М.: МФЮА, 2009. С. 97–100. <http://conf.mfua.ru/2009>.
- [10] *Байков А.Ю., Грушина О.А.* // Научная сессия НИЯУ МИФИ-2010. Аннотации докладов в 3-х томах. Т. 2. Нанопизика и нанотехнология. Фундаментальные проблемы науки. М.: НИЯУ МИФИ, 2010. С. 329.
- [11] *Байков А.Ю., Грушина О.А.* // Тр. Российского науч.-техн. общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова. Серия: научная сессия, посвященная Дню радио. Выпуск LXV, М., 2010. С. 339–342.
- [12] *Байков А.Ю.* // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2010. Т. 8. № 4. С. 36–46.
- [13] *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 604 с.
- [14] *Branch G.M., Mihran T.G.* // IRE Transactions on Electron Devices. Vol. 2. Issue 2. P. 3–11. DOI: 10.1109/T-ED.1955.14065.
- [15] *Засмановский С.А., Хапланова З.И.* // Вопр. радиоэлектр. Сер. СВЧ-электроника. М.: 1959. № 6.
- [16] *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысококачественной электронике. М.: Советское радио, 1973. 400 с.
- [17] *Гайдук В.И., Палатов К.И., Петров Д.М.* Физические основы электроники СВЧ. М.: Сов. радио, 1971. 600 с.