

04;11;12

## Уточнение закона трех вторых и радиальной теории ионного тока на малый зонд или пылевую частицу в разреженной плазме

© В.И. Сысун, В.С. Игнахин

Петрозаводский государственный университет,  
185910 Петрозаводск, Россия  
e-mail: art101@mail.ru

(Поступило в Редакцию 17 августа 2011 г.)

Рассмотрен ионный ток на зонд или пылевую частицу в разреженной плазме по теории слоя и радиальной теории. Исследовано влияние начальной направленной скорости входящих в слой ионов в соответствии с критерием Бома на вольт-амперную характеристику слоя пространственного заряда. Расчеты по обеим теориям проведены для расширенного диапазона относительных размеров зондов  $(0.0001-20.0)r_p/\lambda_D$ , где  $r_p$  — размер зонда,  $\lambda_D$  — электронный дебаевский радиус. Проведено сравнение обеих теорий во всем расчетном диапазоне размеров зондов. Приведены аналитические аппроксимации для практического использования результатов.

### Введение

Закон трех вторых определяет вольт-амперную характеристику в приборах вакуумной электроники и используется при расчете тока на зонд или пылевую частицу в разреженной плазме.

Для плоского промежутка толщиной  $d$  решение уравнения Пуассона при нулевых начальных скоростях заряженных частиц приводит к известной формуле, впервые полученной Ленгмюром [1]:

$$d^2 = \frac{4\sqrt{2}}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{e}{M}} \frac{\varphi_p^{3/2}}{j_p} = F \frac{\varphi_p^{3/2}}{j_p}, \quad (1)$$

где  $j$  — плотность тока,  $\varphi$  — разность потенциалов,  $e$  и  $M$  — заряд и масса заряженных частиц. Индекс  $p$  означает, что параметры относятся к собирающему электроду.

Для цилиндрического и сферического промежутков уравнение Пуассона аналитического решения не имеет. По аналогии с плоским случаем Ленгмюр представил решение соответственно для цилиндрической и сферической геометрии в виде

$$\beta^2 = \frac{F\varphi_p^{3/2}}{j_p r_p^2}, \quad (2)$$

$$\alpha^2 = \frac{F\varphi_p^{3/2}}{j_p r_p^2}. \quad (3)$$

Значения безразмерных коэффициентов  $\beta$  и  $\alpha$  в зависимости от отношения радиусов эмиттера  $r_0$  и коллектора  $r_p$  численно получено в [2–4] разложением в ряды по значениям  $y = \ln r_p/r_0$

$$\beta = \gamma - 0.4\gamma^2 + \frac{11}{120}\gamma^3 - \frac{47}{3300}\gamma^4 + 0.00168\gamma^5 + \dots, \quad (4)$$

$$\alpha = \gamma - 0.3\gamma^2 + 0.075\gamma^3 - 0.0143\gamma^4 + 0.00216\gamma^5 + \dots \quad (5)$$

Однако сходимость рядов при больших отношениях радиуса эмиттера к радиусу коллектора недостаточна. В этом случае предлагались приближенные аналитические выражения

$$\beta^2 \approx 4.67 \frac{r_0}{r_p} \left( \log_{10} \frac{r_0}{r_p} - \log_{10} \sqrt{2} \right)^{3/2}, \quad (6)$$

$$(\alpha^2)^{2/3} \approx 1.11 \frac{r_0}{r_p} - 1.64. \quad (7)$$

Учет начальных скоростей электронов, эмитируемых в промежуток из катода с температурой  $T$ , рассмотрен Ленгмюром в [2,5]. Для плоского случая получены поправки к выражению (1), определяемые из таблиц. Для цилиндрического и сферического случаев предложена упрощенная поправка в виде множителя  $(1 + 2.66 \sqrt{kT/e\varphi})$  к правым частям (2), (3).

Поступление ионов из плазмы в призондовый слой отличается от поступления электронов из термокатода. Бомом [6] показано, что при пренебрежении температуры ионов они входят в слой со скоростью  $\sqrt{kT_e/M}$  при нулевом градиенте потенциала на границе слоя ( $T_e$  — температура электронов). Граница слоя при этом считается резкой, а наличием электронов в слое пренебрегается. В работах Беллюстина [7–9] рассмотрен слой с данными граничными условиями. Однако для цилиндрического и сферического случаев получены только приближенные разложения в виде рядов, дающие наибольшую ошибку при больших отношениях радиусов электродов.

При расчете ионного тока из плазмы на зонд в теории слоя пренебрегают поправкой на начальную скорость ионов, ввиду ее малости и неопределенности. Толщину слоя рассчитывают с использованием формул (2), (3) и таблиц Ленгмюра, а плотность ионного тока из плазмы на слой считается по формуле Бома [6]:

$$j_0 = en_0 \exp\left(\frac{e\varphi_0}{kT_e}\right) \sqrt{-\frac{2e\varphi_0}{M}} = 0.607en_0 \sqrt{\frac{kT_e}{M}}, \quad (8)$$

где  $n_0$  — концентрация невозмущенной плазмы, а потенциал на границе слоя принимается  $\varphi_0 = -kT_e/2e$ , что соответствует скорости ионов на границе  $v_0 = \sqrt{kT_e/M}$ . Влияние этой направленной скорости ионов на вольт-амперную характеристику слоя не исследовалось.

С другой стороны, при пренебрежении температурой ионов возможен прямой расчет уравнения Пуассона по всей области до зонда без разбиения на слой и квазинейтральную плазму. Это так называемая „радиальная теория“ [10]. Уравнения Пуассона для цилиндрического и сферического случаев запишутся соответственно

$$\frac{1}{d} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{e}{\varepsilon_0} \left[ \frac{I_p}{4\pi r l_p e \sqrt{-2e\varphi/M}} - n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right) \right], \quad (9)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{e}{\varepsilon_0} \left[ \frac{I_p}{4\pi r^2 e \sqrt{-2e\varphi/M}} - n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right) \right]. \quad (10)$$

При заданном ионном токе  $I_p$  эти уравнения интегрировались численно [11–13] при граничных условиях:  $r \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow n_0$ ,  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $d\varphi/dr \rightarrow 0$  для отношений радиуса зондов к электронному дебаевскому радиусу  $r_p/\lambda_D \geq 0.25$  — цилиндр и  $r_p/\lambda_D \geq 0.05$  — сфера, где  $n_0$  — концентрация невозмущенной плазмы,  $\lambda_D = \sqrt{\varepsilon_0 kT_e/n_0 e^2}$  — электронный дебаевский радиус.

Расширение расчетных данных для малых  $r_p/\lambda_D$  является актуальным для диагностики сильно разреженной плазмы. Помимо этого, зондовая теория применяется для описания процессов зарядки пылевых частиц в плазме и образования плазменных кристаллов, где размеры частиц в эксперименте составляют  $(0.0001-0.05)r_p/\lambda_D$ . Кроме того, сравнение радиальной теории и теории слоя в этих условиях не проводилось.

### Слой пространственного заряда с учетом начальной скорости ионов

Для плоского случая уравнение Пуассона  $d^2\varphi/dr^2 = -j/\varepsilon_0 \sqrt{-2e\varphi/M}$  при граничных условиях  $r = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $d\varphi/dr = 0$  имеет аналитическое решение, проверяемое непосредственной подстановкой:

$$d^2 = \frac{4}{9} \frac{\varepsilon_0}{j} \sqrt{\frac{2e}{M}} \left( \varphi^{3/2} + 3\varphi\sqrt{\varphi_0} - 4\varphi_0^{3/2} \right). \quad (11)$$

Замена переменных  $\varphi^{3/2} = \varphi^{3/2} + 3\varphi\sqrt{\varphi_0} - 4\varphi_0^{3/2}$ ;  $d = 0$ ,  $\varphi' = 0$ ,  $d\varphi'/dr = 0$  позволяет использовать решение закона 3/2 при нулевой начальной скорости (1).

Отметим, что отношение  $\varphi'/\varphi$  имеет максимум при  $\varphi = 4\varphi_0$ , равный  $\varphi'/\varphi = 2^{2/3}$ , и при больших  $\varphi/\varphi_0$  стремится к единице.

Уравнение Пуассона в сферическом случае при замене переменных  $x = r/r_0$  ( $r_0$  — внешняя граница слоя),  $Y = -\varphi(j_0 r_0^2/\varepsilon_0 \sqrt{2e/M})^{-2/3}$  имеет вид

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dY}{dx} = \frac{1}{x^2 \sqrt{Y}}. \quad (12)$$

**Таблица 1.** Значения  $\alpha^2$ : по (3) — числители при  $Y_0 = 0$ ; знаменатели при  $Y_0 = 0$  — приближение (13); числители при  $Y_0 > 0$  — численный расчет; знаменатели при  $Y_0 > 0$  — приближение (14)

$\frac{r_p}{r_0}$	$Y_0$			
	0	$1.893 \cdot 10^{-3}$	0.040786	0.8787
$1 \cdot 10^{-5}$	$3.715 \cdot 10^7$	$3.43 \cdot 10^7$	$2.62 \cdot 10^7$	$1.03 \cdot 10^7$
	$3.715 \cdot 10^7$	$3.70 \cdot 10^7$	$3.78 \cdot 10^7$	$3.60 \cdot 10^7$
$1 \cdot 10^{-4}$	$1.175 \cdot 10^6$	$1.08 \cdot 10^6$	$8.29 \cdot 10^5$	$3.24 \cdot 10^5$
	$1.175 \cdot 10^6$	$1.17 \cdot 10^6$	$1.18 \cdot 10^6$	$1.13 \cdot 10^6$
$1 \cdot 10^{-3}$	$3.708 \cdot 10^4$	$3.42 \cdot 10^4$	$2.61 \cdot 10^4$	$1.02 \cdot 10^4$
	$3.707 \cdot 10^4$	$3.67 \cdot 10^4$	$3.67 \cdot 10^4$	$3.53 \cdot 10^4$
$1 \cdot 10^{-2}$	$1.147 \cdot 10^3$	$1.06 \cdot 10^3$	806	316
	$1.148 \cdot 10^3$	$1.13 \cdot 10^3$	$1.12 \cdot 10^3$	$1.15 \cdot 10^3$
$1 \cdot 10^{-1}$	29.20	26.7	19.85	8.30
	29.24	28.6	28.0	32.0
0.9	0.0118	0.00787	0.00797	0.0369
	0.0117	0.0117	0.0117	0.012

Примечание. Знаменатели во всех строках близки к числителю в первом столбце, что указывает на хорошее приближение выражений (13), (14).

Численное решение (12) с учетом начальной скорости:  $x = 1$ ,  $Y = Y_0$ ,  $dY/dx = 0$  проведено нами для значений  $\alpha^2 = (4/9)Y^{3/2}$ , соответствующих (3), и расширено на область малых зондов до  $r_p/r_0 = 10^{-5}$ . Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Решение при нулевой начальной скорости можно аппроксимировать следующим аналитическим приближением:

$$\alpha^2 = \left(\frac{r_0}{r_p}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{r_p}{r_0}\right)^2 \left\{1 + 0.175 \left[1 - \frac{r_p}{r_0}\right]^2\right\}. \quad (13)$$

В предельных случаях вместо формулы (13) можно использовать выражения:

$$\alpha^2 = 1.175 \left(\frac{r_0}{r_p}\right)^{3/2} \quad \text{при} \quad \frac{r_p}{r_0} \ll 1;$$

$$\alpha^2 \approx \left(1 - \frac{r_p}{r_0}\right)^2 \quad \text{при} \quad r_p \sim r_0.$$

Учет начальной скорости показывает, что выражение (13) при  $Y \leq 1$  сохраняет вид при определении  $\alpha^2$  по следующей формуле:

$$\alpha^2 = \frac{4}{9} Y^{3/2} \left(1 + 3\sqrt{\frac{Y_0}{Y}} - 4\left(\frac{Y_0}{Y}\right)^{3/2}\right) \times \left\{1 + 2.8Y_0^{0.56} \left[1 - \left(\frac{r_p}{r_0}\right)^{1/4}\right]\right\}. \quad (14)$$

Отметим, что значение  $Y = 1$  является большим и соответствует закону 3/2 для плоского случая (11) при толщине слоя, равном внешнему радиусу  $d = r_0$ .

**Таблица 2.** Значения  $\beta^2 r_p/r_0$ :  $\beta^2 r_p/r_0 = \frac{4}{9} Y^{3/2}$  — числители при  $Y_0 = 0$ ; знаменатели при  $Y_0 = 0$  — приближение (16); числители при  $Y_0 > 0$  — численный расчет; знаменатели при  $Y_0 > 0$  — приближение (17)

$\frac{r_p}{r_0}$	$Y_0$			
	0	$1.8931 \cdot 10^{-3}$	$4.0786 \cdot 10^{-2}$	0.8787
$1 \cdot 10^{-5}$	49.90	46.56	36.37	15.31
	49.22	49.88	49.22	49.24
$1 \cdot 10^{-4}$	35.29	32.87	25.61	11.00
	35.22	35.29	35.00	36.1
$1 \cdot 10^{-3}$	22.48	20.89	16.18	7.20
	22.83	22.48	22.36	23.80
$1 \cdot 10^{-2}$	11.76	10.87	8.32	3.98
	12.24	11.74	11.69	12.8
$1 \cdot 10^{-1}$	3.71	3.38	2.49	1.52
	3.86	3.68	3.65	4.06
0.5	0.4226	0.365	0.237	0.500
	0.4204	0.418	0.414	0.445
0.9	0.01086	0.00722	0.00756	0.369
	0.01083	0.01082	0.01077	0.01087

Таким образом, вычисляя  $\alpha^2$  с учетом начальной скорости по (14) и используя (13) или первую колонку табл. 1 (или таблицы Ленгмюра), можно найти  $r_p/r_0$  методом итераций.

Для цилиндрической геометрии уравнение Пуассона для тех же безразмерных параметров  $x$  и  $Y$  имеет вид

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dY}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{Y}}. \quad (15)$$

Уточненное численное решение (15), расширенное на область малых значений до  $r_p/r_0 = 10^{-5}$  при начальных скоростях  $0 \leq Y_0 < 1$ , приведено в табл. 2. При  $Y_0 = 0$  значение  $\beta^2 r_p/r_0 = (4/9)Y^{3/2}$  аппроксимируется следующим выражением:

$$\frac{r_p}{r_0} \beta^2 \approx 1.26 \left(1 - \frac{r_p}{r_0}\right)^2 \ln^{3/2} \left\{1.36 + \frac{r_0}{r_p}\right\}. \quad (16)$$

Поправку на начальную скорость можно аппроксимировать выражением

$$\frac{r_p}{r_0} \beta^2 = \frac{4}{9} Y^{3/2} \left\{1 + 3\sqrt{\frac{Y_0}{Y}} - 4\left[\frac{Y_0}{Y}\right]^{3/2}\right\} \times \left\{1 + 0.9Y_0^{0.48} \left[1 - \left(\frac{r_p}{r_0}\right)^{0.3}\right]\right\}. \quad (17)$$

## Ионный ток на зонд по радиальной теории

Уравнения Пуассона радиальной теории (9), (10) в безразмерном виде соответственно для сферы и цилиндра принимают вид

$$\frac{d^2 U}{x^2} + \frac{2}{x} \frac{dU}{dx} = \frac{-j'_p a^2}{x^2 \sqrt{-2U}} + \exp U, \quad (18)$$

$$\frac{d^2 U}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{dU}{dx} = \frac{-j'_p a}{x \sqrt{-2U}} + \exp U, \quad (19)$$

где  $a = r_p/\lambda_D = r_p e/\sqrt{\varepsilon_0 k T_e/n_0}$ ;  $x = r/\lambda_D$ ;  $U = e\phi/kT_e$ ;  $j' = j/en_0\sqrt{kT_e/M}$ .

Решение уравнений (18), (19) затрудняется нулевыми условиями для потенциала и его градиента на бесконечности, откуда и необходимо начинать расчет. В [10–13] решение начиналось на выбранном конечном радиусе  $x_0$ , где предполагалась квазинейтральность, левыми частями уравнений пренебрегалось, а экспоненты в правых частях заменялись единицей. Тогда в первых двух точках счета потенциал определяется по формулам:  $U = -j'_p a^4/2x^4$  — для сферы и  $U = -j'_p a^2/2x^2$  — для цилиндра.

При малом  $x_0$  в таком случае начальный потенциал вычисляется достаточно грубо. В случае же больших  $x_0$  резко увеличивается машинное время счета и накапливаются счетные ошибки из-за малых величин потенциала и его градиента.

Эти трудности существенно возрастают при уменьшении радиуса зонда. Для повышения точности и устойчивости начальное решение нами уточнялось аналитически последовательной подстановкой в (18), (19) и отбрасыванием высших членов малости. В результате в первых двух точках счета принималось

$$U = -\frac{c^2}{2x^4} \left(1 + \frac{c^2}{x^4} - \frac{12c^2}{2x^6} + \frac{3}{2} \frac{c^4}{x^8}\right), \quad c = j'_p a^2 \text{ — сфера};$$

$$U = -\frac{c^2}{2x^2} \left(1 + \frac{c^2}{x^2} - \frac{4c^2}{x^4} + \frac{3}{2} \frac{c^4}{x^4}\right), \quad c = j'_p a \text{ — цилиндр}.$$

Далее уравнения (18), (19) решались численно по трехточечной схеме. Примеры решений приведены на рис. 1.

Для малого сферического зонда ( $a \leq 0.01$ ) для величины безразмерной плотности ионного тока достаточно хорошо подходит аппроксимация

$$j'_p = \frac{U_p}{a} \text{ или } j_p = \frac{e\phi_p}{r_p} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 n_0}{M}}. \quad (20)$$

Тогда ток на зонд пропорционален потенциалу зонда, корню из концентрации плазмы и радиусу зонда и не зависит от электронной температуры.

При  $a < 10$  хорошо подходит аппроксимирующая формула

$$j'_p = \frac{4 + 0.6a}{1 + a} + \left(\frac{U_p}{a}\right)^{(3+0.5a)/(3+a)}. \quad (21)$$

Для цилиндра при  $a < 0.1$  и при  $0.1 < a < 10$  применимы выражения

$$j'_p = \frac{0.53}{a^{0.9}} U_p^{2/3}; \quad j'_p = \frac{0.2 + 0.5a^{1/3}}{a} U_p^{2/3} + 0.6. \quad (22)$$

**Таблица 3.** Сравнение значений  $j'_{\text{appr}}$  по (25) с численным расчетом

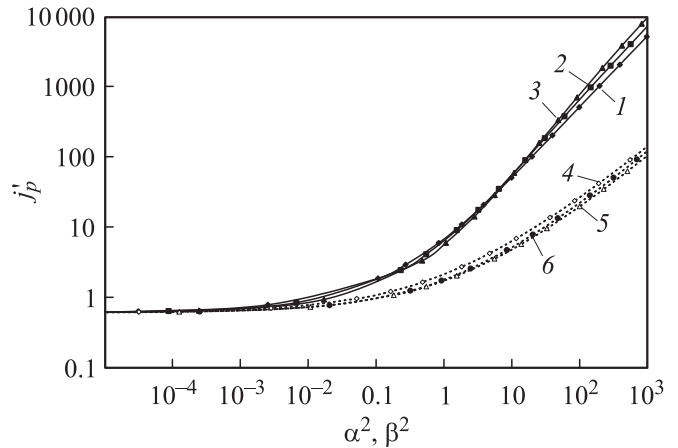
$\beta^2$	$1.083 \cdot 10^{-4}$	0.00796	0.131	0.395	6.45	26.65	165.8	1060	13 830	30 360
$j'_p$	0.624	0.730	1.074	1.42	4.50	10.0	35.0	140	1100	2100
$j'_{\text{appr}}$	0.630	0.734	1.071	1.41	4.46	10.1	35.3	142	1106	2098

При  $a > 0.1$  вычисления совпадают с результатами [10–13].

### Удобная для использования перестройка зондовых характеристик

Определение концентрации плазмы по графикам рис. 1 и формулам (20)–(22) требует задания параметра  $a = r_p/\lambda_D$ . Однако  $\lambda_D$  зависит от концентрации, которая заранее неизвестна, что требует нескольких итераций с ее подбором.

Для исключения итераций возможна перестройка зондовых характеристик в новых переменных. В работе [14] Сонин показал, что в качестве независимых переменных можно использовать коэффициенты  $\alpha^2, \beta^2$  (см. (2), (3)), введенные Ленгмюром при определении толщины слоя пространственного заряда и вычисляемые по экспериментальным данным. Эти коэффициенты яв-



**Рис. 2.** Зависимости величины  $j'_p$  от  $\alpha^2, \beta^2$  для радиальной теории: 1 —  $U_p = 10$ , сфера; 2 —  $U_p = 20$ , сфера; 3 —  $U_p = 40$ , сфера; 4 —  $U_p = 10$ , цилиндр; 5 —  $U_p = 20$ , цилиндр; 6 —  $U_p = 40$ , цилиндр.

ляются комбинацией используемых в радиальной теории безразмерных параметров

$$\alpha^2, \beta^2 = \frac{4\sqrt{2}}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{e}{M}} \frac{\varphi_p^{3/2}}{j_p r_p^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{U_p^{3/2}}{j'_p a^2}. \quad (23)$$

Перестройка заключается в выборе параметров  $e\varphi_p/kT_e$  и  $r_p/\lambda_D$ , расчета  $j'_p$ , затем вычисления  $\alpha^2, \beta^2$  и построения зависимостей  $j'_p$  от  $\alpha^2, \beta^2$  при фиксированных  $e\varphi_p/kT_e$ . Параметр  $r_p/\lambda_D$  при этом выпадает. На рис. 2 показаны зависимости  $j'_p$  от  $\alpha^2, \beta^2$  для  $e\varphi_p/kT_e = 10, 20, 40$ . Ход кривых слабо зависит от потенциала, особенно в цилиндрическом случае.

При малых коэффициентах  $\alpha^2, \beta^2 \rightarrow 0$  значения  $j'_p$  стремятся к определенному критерию Бомы значению  $j'_p = 0.607$ . При  $\alpha^2 > 0.1$  для сферического зонда применимы приближения

$$U_p = 10: \quad j'_p = 5\alpha^2 + 1.2;$$

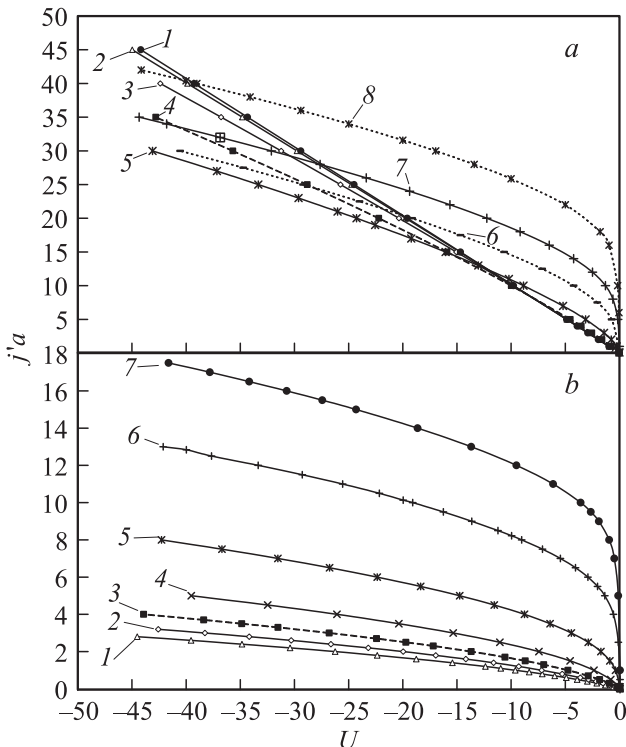
$$U_p = 20: \quad j'_p = 4.6(\alpha^2)^{1.07} + 1.2; \quad (24)$$

$$U_p = 40: \quad j'_p = 4.4(\alpha^2)^{1.12} + 1.2.$$

Для более часто используемых цилиндрических зондов можно предложить аппроксимацию, применимую для всей области значений  $\beta^2$ :

$$j'_{\text{appr}} = 0.607 + 0.92(\beta^2)^{0.42} + 0.396(\beta^2)^{0.83}. \quad (25)$$

Аппроксимация (25) имеет погрешность менее 1% для  $U_p = 20$  и менее 3% для  $U_p = 10$  и 40. В табл. 3



**Рис. 1.** Зависимости величины  $j'_a$  от безразмерного потенциала  $U$  (радиальная теория): *a* — сфера: 1 —  $a = 0.0001$ ; 2 —  $a = 0.001$ ; 3 —  $a = 0.01$ ; 4 —  $a = 0.1$ ; 5 —  $a = 1.0$ ; 6 —  $a = 5$ ; 7 —  $a = 10$ ; 8 —  $a = 20$ ; *b* — цилиндр: 1 —  $a = 0.0001$ ; 2 —  $a = 0.001$ ; 3 —  $a = 0.01$ ; 4 —  $a = 0.1$ ; 5 —  $a = 1.0$ ; 6 —  $a = 5$ ; 7 —  $a = 10$ .

приведено сравнение значений  $j'_p$ , полученных численным расчетом, и значений  $j'_{\text{appr}}$  по (25).

Значения  $j'_p$  изменяются значительно слабее, чем  $\beta^2$ , что повышает точность определения концентрации.

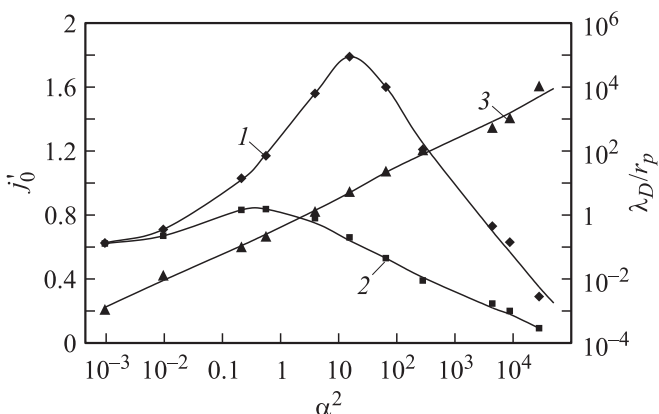
## Сравнение радиальной теории ионного тока на зонд и теории слоя

В радиальной теории, учитывающей одновременно ионную и электронную концентрации во всей области, по экспериментальным значениям тока и напряжения на зонде вычисляются коэффициенты  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  (2), (3); далее с использованием рис. 2 или формул (24), (25) находится относительная плотность тока на зонд  $j'_p = j_p / en_0 \sqrt{kT_e / M}$  и по ней концентрация плазмы  $n_0$ .

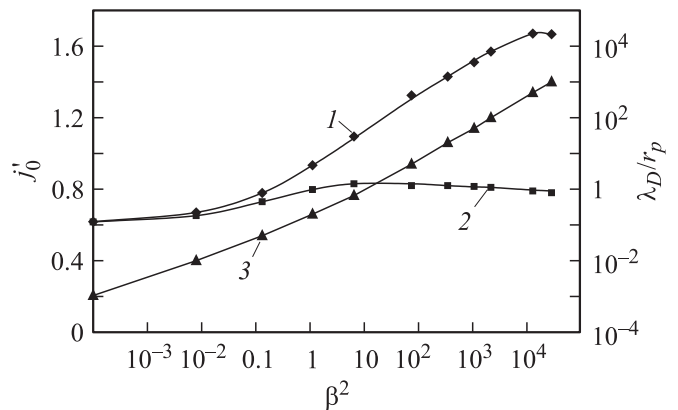
В теории слоя область возмущения разбивается на квазинейтральную область и слой, в котором отсутствуют электроны. По коэффициентам  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  определяется  $r_0 / r_p$  (аппроксимации (13), (16) или табл. 1, 2 и таблицы Ленгмюра), плотность тока на слой берется по формуле Бома  $j'_0 = j_0 / en_0 \sqrt{kT_e / M}$  и далее определяется концентрация  $n_0$ .

Для сравнения обеих теорий авторы принимали в теории слоя относительную плотность тока на зонд, определяемую из радиальной теории, а затем вычислялась относительная плотность тока на слой  $j'_0 = j_p r_p^2 / r_0^2$  в сферическом и  $j'_0 = j'_p r_p / r_0$  в цилиндрическом случаях. На рис. 3, 4 приведены зависимости при  $U_p = 20$ , где также приведены соответствующие значения  $\lambda_D / r_p$ . При вычислении  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  по (23) без учета начальных скоростей ионов плотность тока  $j'_0$  достаточно сильно зависит от  $\alpha^2$ , сначала при  $\alpha^2 \lesssim 1$  возрастая, а затем при  $\alpha^2 \gg 1$  уменьшаясь.

Учет начальных скоростей ионов (14), (17) уменьшает начальный рост  $j'_0$ . Начальная скорость  $U_0$  при  $j'_0 < 0.607$  определялась из выражения  $j'_0 = \exp(-U_0) \sqrt{2U_0}$ , а при  $j'_0 > 0.607$  из выражения



**Рис. 3.** Зависимости  $j'_0$  и  $\lambda_D$  от  $\alpha^2$  при  $U_p = 20$ : 1 —  $j'_0$  по теории слоя без учета начальных скоростей ионов; 2 —  $j'_0$  по теории слоя с учетом начальных скоростей ионов; 3 —  $\lambda_D / r_p$  по теории слоя без учета начальных скоростей ионов.



**Рис. 4.** Зависимости  $j'_0$  и  $\lambda_D / r_p$  от  $\beta^2$  при  $U_p = 20$ : 1 —  $j'_0$  по теории слоя без учета начальных скоростей ионов; 2 —  $j'_0$  по теории слоя с учетом начальных скоростей ионов; 3 —  $\lambda_D / r_p$  по теории слоя без учета начальных скоростей ионов.

$j'_0 = 0.607 \sqrt{2U_0}$ , т.е. предполагалось увеличение плотности тока за счет увеличения скорости.

Рост  $j'_0$  при малых  $\alpha^2$  можно объяснить увеличением плотности тока ионов в квазинейтральной области с уменьшением радиуса. Спад  $j'_0$  с ростом  $\alpha^2$  при  $\alpha^2 \gg 1$ , когда  $r / r_p \gg 1$ , объясняется ростом плотности тока и объемного заряда вблизи зонда, что при фиксированном общем падении напряжения требует уменьшения плотности тока на слой. Для цилиндрических зондов, где плотность тока слабее зависит от радиуса, эти оба фактора слабее и частично компенсируют друг друга.

## Заключение

В радиальной теории, учитывающей одновременно ионную и электронную концентрации во всей области, по экспериментальным значениям тока и напряжения на зонде вычисляются коэффициенты  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  (2), (3), далее с использованием рис. 2 или формул (24), (25) находится относительная плотность тока на зонд  $j'_p = j_p / en_0 \sqrt{kT_e / M}$  и по ней концентрация плазмы  $n_0$ .

В теории слоя область возмущения разбивается на квазинейтральную область и слой, в котором отсутствуют электроны. По коэффициентам  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  определяется  $r_0 / r_p$  (аппроксимации (13), (16) или табл. 1, 2 и таблицы Ленгмюра), плотность тока на слой берется по формуле Бома  $j'_0 = j_0 / en_0 \sqrt{kT_e / M} = 0.607$  и далее определяется концентрация  $n_0$ .

Следует отметить, что цилиндрическая и особенно сферическая геометрии ухудшают приближение разбиения на область квазинейтральной плазмы и слоя, особенно при  $r_p / \lambda_D < 1$ . Применение элементарной теории слоя можно уточнить, принимая значения плотности тока на слой в зависимости от коэффициентов  $\alpha^2$  и  $\beta^2$ . Однако это требует двойной аппроксимации  $r_0 / r_p$  и

$j'_p$  по  $\alpha^2$  или  $\beta^2$ . Это делает применение теории слоя нецелесообразным по сравнению с радиальной теорией.

Данная работа была выполнена в рамках Федеральной целевой программы Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг., контракт 16.740.11.0329.

## Список литературы

- [1] *Langmuir I.* // Phys. Rev. 1913. Vol. 2. P. 450–486.
- [2] *Langmuir I., Blodgett K.B.* // Phys. Rev. 1923. Vol. 22. P. 347–356.
- [3] *Langmuir I., Blodgett K.B.* // Phys. Rev. 1924. Vol. 24. P. 49–59.
- [4] *Богуславский С.А.* // Труды ГЭЭИ. 1924. Вып. 3. С. 18–27.
- [5] *Langmuir I.* // Phys. Rev. 1923. Vol. 21. P. 419–435.
- [6] The Characteristic of electrical discharges in magnetic fields / Ed. by A. Guthrie, R.K. Wakerling. N. Y.: Mc Graw-Hill, 1949. P. 77–86.
- [7] *Беллюстин С.В.* // ЖЭТФ. 1939, Т. 9. Вып. 6. С. 742–759.
- [8] *Беллюстин С.В.* // ЖЭТФ. 1939, Т. 9. Вып. 7. С. 840–856.
- [9] *Беллюстин С.В.* // ЖЭТФ. 1939, Т. 9. Вып. 7. С. 857–863.
- [10] *Allen J.E., Boyd R.L.F., Reynolds P.* // Proc. Phys. Soc. R. 1957. Vol. 70. N 3. P. 297–305.
- [11] *Allen J.E., Turrin A.* // Proc. Phys. Soc. 1964. Vol. 83. P. 177–179.
- [12] *Chen F.F.* // J. Nucl. Energy. Part C. 1965. Vol. 7. P. 47–67.
- [13] *Nairn C.M.C., Annaratone B.M., Allen J.E.* // Plasma Sourc. Sci. Technol. 1998. Vol. 7. N 4. P. 478–491.
- [14] *Sonin A.A.* // AIAA J. 1966. Vol. 4. P. 1588–1596.