01;03

Нелинейный анализ волнового движения на поверхности струи в продольном электрическом поле, движущейся в диэлектрической среде

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Н.А. Петрушов, Н.А. Полянцев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 5 декабря 2011 г.)

Проанализирована возможность вырожденного внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия капиллярных волн с произвольной симметрией (с произвольными азимутальными числами) на поверхности заряженной цилиндрической струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, движущейся относительно идеальной несжимаемой диэлектрической среды коллинеарно внешнему однородному электростатическому полю. Показано, что, в частности, для осесимметричных волн реализуются 6 различных резонансных ситуаций, при которых первичные волны и волны, порождаемые нелинейностью уравнений гидродинамики, обмениваются между собой энергией.

Введение

Исследование устойчивости цилиндрической струи, движущейся относительно среды в коллинеарном оси симметрии невозмущенной струи электростатическом поле, представляет интерес в связи с изучением электродиспергирования жидкости [1–3]. Дестабилизирующее влияние относительного движения внешней среды [4] и стабилизирующее влияние внешнего поля [5] делают проблему неоднозначной. Эта проблема частично исследована в работах [6,7], где, однако, расчеты проведены лишь в нелинейном приближении по безразмерной амплитуде волн.

Постановка задачи

Пусть струя идеальной несжимаемой жидкости с плотностью ρ_1 и диэлектрической проницаемостью ε_{in} движется с постоянной скоростью $\mathbf{U}_0$ относительно идеальной несжимаемой диэлектрический среды с плотностью ρ_2 и диэлектрической проницаемостью ε_{ex}. Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред σ.

Задачу будем решать в цилиндрической системе координат, начало отсчета которой связано с осью струи. Возмущенная колебаниями поверхность жидкости отклоняется от равновесной поверхности $r = R$ на величину ξ

$$r = R + \xi(\varphi, z, t).$$

Решение будем искать в безразмерных переменных, в которых $R = \sigma = \rho_1 = 1$. Обозначения физических величин оставим прежние. Для решения задачи воспользуемся асимптотическим методом многих временны́х масштабов [3]. Будем рассматривать 3 порядка малости — нулевой, первый и второй соответственно, для обозначения которых будем использовать индексы 0, 1, 2.

Математическая формулировка задачи

Математическая формулировка задачи состоит из уравнений Эйлера для струи и внешней среды, которую будем моделировать несжимаемой жидкостью,

$$\partial_t \mathbf{U}_{\text{ex}} + (\mathbf{U}_{\text{ex}}, \nabla)\mathbf{U}_{\text{ex}} = -\frac{1}{\rho}\nabla P_{\text{ex}},$$

$$\partial_t \mathbf{U}_{\text{in}} + (\mathbf{U}_{\text{in}}, \nabla)\mathbf{U}_{\text{in}} = -\nabla P_{\text{in}},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{U}_{\text{ex}} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{U}_{\text{in}} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E}_{\text{ex}} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E}_{\text{in}} = 0.$$

Индексом „ex“ отмечены величины, относящиеся к внешней среде, а индесом „in“ — к струе.

Граничные условия к задаче имеют вид

$$r \to 0: \qquad \mathbf{U}_{\text{in}} \to 0, \quad \mathbf{E}_{\text{in}} \to 0,$$

$$r \to \infty: \qquad \mathbf{U}_{\text{ex}} \to -\mathbf{U}_0, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}_0,$$

$$r = R + \xi: \qquad \frac{dF}{dt} = 0, \quad F = r - R - \xi(\varphi, z, t),$$

$$U_{n_{\text{ex}}} = U_{n_{\text{in}}} = U_n, \quad E_{n_{\text{ex}}} = \frac{\varepsilon_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{ex}}} E_{n_{\text{in}}}, \quad E_{\tau_{\text{in}}} = E_{\tau_{\text{ex}}},$$

$$-P_{\text{ex}} + P_{\text{in}} + P_E - P_\sigma = 0,$$

$$P_E = -\frac{\varepsilon_{\text{in}}}{8\pi}\left[E_{\text{ex}}^2 - 2E_{n_{\text{ex}}}^2\right] + \frac{\varepsilon_{\text{ex}}}{8\pi}\left[E_{\text{in}}^2 - 2E_{n_{\text{in}}}^2\right],$$

$$P_\sigma = \sigma \operatorname{div}\mathbf{n}.$$

Скаляризация

Считая движение среды потенциальным, воспользуемся моделью потенциального течения жидкости. Скорости выразятся через гидродинамические потенциалы следующим образом:

$$\mathbf{U}_{\text{ex}} = \nabla\varphi, \quad \mathbf{U}_{\text{in}} = \nabla\psi.$$

Уравнения неразрывности запишутся в следующем виде:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\psi = 0.$$

Введение гидродинамических потенциалов позволяет проинтегрировать уравнение Эйлера для струи и среды

$$P_{\text{ex}} = -\rho\partial_t\varphi - \frac{\rho}{2}(\nabla\varphi)^2 + \rho f_{\text{ex}}(t),$$

$$P_{\text{in}} = -\partial_t\psi - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + f_{\text{in}}(t),$$

где $f_{\text{in}}(t)$ и $f_{\text{ex}}(t)$ — константы интегрирования, $\rho \equiv \rho_{\text{ex}}/\rho_{\text{in}}$.

Запишем выражение для напряженности электрического поля через электростатический потенциал

$$\mathbf{E}_{\text{ex}} = -(\nabla\Phi_{\text{ex}}), \quad \mathbf{E}_{\text{in}} = -(\nabla\Phi_{\text{in}})$$

и подставим в уравнения Максвелла

$$\Delta\Phi_{\text{ex}} = 0, \quad \Delta\Phi_{\text{in}} = 0.$$

Граничные условия примут вид

$$r \to 0: \qquad \nabla\psi \to 0, \quad \nabla\Phi_{\text{in}} \to 0,$$

$$r \to \infty: \qquad \nabla\varphi \to U_0\mathbf{e}_z, \quad \nabla\Phi_{\text{ex}} \to -E_0\mathbf{e}_z,$$

$$r \to 1 + \xi: \qquad \frac{dF}{dt} = -\partial_t F + (\nabla, \nabla\psi) = 0,$$

$$(\mathbf{n}, \nabla\varphi) = (\mathbf{n}, \nabla\psi),$$

$$(\mathbf{n}, \nabla\Phi_{\text{in}}) = \frac{\varepsilon_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{ex}}}(\mathbf{n}, \nabla\Phi_{\text{ex}}), \quad (\tau, \nabla\Phi_{\text{in}}) = (\tau, \nabla\Phi_{\text{ex}}).$$

Выражение для давления электрических сил запишется следующим образом:

$$P_E = -\frac{\varepsilon_{\text{ex}}}{8\pi}\left[\nabla\Phi_{\text{ex}}^2 - 2(\mathbf{n}, \nabla\Phi_{\text{ex}})^2\right] + \frac{\varepsilon_{\text{in}}}{8\pi}\left[\nabla\Phi_{\text{in}}^2 - 2(\mathbf{n}, \nabla\Phi_{\text{in}})^2\right].$$

Разложение на порядки малости

Разложение будем проводить до второго порядка малости, используя метод многих временных масштабов. Разложения для гидродинамических и электрических потенциалов, давлений и возмущения поверхности струи имеют следующий вид:

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varepsilon\varphi^{(1)} + \varepsilon^2\varphi^{(2)} + O(\varepsilon^3),$$

$$\psi = \varepsilon\psi^{(1)} + \varepsilon^2\psi^{(2)} + O(\varepsilon^3),$$

$$\Phi_{\text{ex}} = \Phi_{\text{ex}}^{(0)} + \varepsilon\Phi_{\text{ex}}^{(1)} + \varepsilon^2\Phi_{\text{ex}}^{(2)} + O(\varepsilon^3),$$

$$\Phi_{\text{in}} = \Phi_{\text{in}}^{(0)} + \varepsilon\Phi_{\text{in}}^{(1)} + \varepsilon^2\Phi_{\text{in}}^{(2)} + O(\varepsilon^3),$$

$$P_{\text{ex}} = P_{\text{ex}}^{(0)} + \varepsilon P_{\text{ex}}^{(1)} + \varepsilon^2 P_{\text{ex}}^{(2)} + O(\varepsilon^3),$$

$$P_{\text{in}} = P_{\text{in}}^{(0)} + \varepsilon P_{\text{in}}^{(1)} + \varepsilon^2 P_{\text{in}}^{(2)} + O(\varepsilon^3),$$

$$\xi(\varphi, z, t) = \varepsilon\xi_1(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2\xi_2(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3). \tag{1}$$

Дифференцирование по времени проводится по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}. \tag{2}$$

Решения задачи в нулевом, первом и втором порядках малости

Подставляя разложения (1), (2) в решаемую задачу, разобъем ее по порядкам малости.

Задача нулевого порядка малости примет вид:

$$\Delta\varphi^{(0)} = 0, \quad \Delta\psi^{(0)} = 0, \quad \Delta\Phi_{\text{in}}^{(0)} = 0, \quad \Delta\Phi_{\text{ex}}^{(0)} = 0,$$

$$r \to 0: \qquad \nabla\Phi_{\text{in}}^{(0)} \to 0,$$

$$r \to \infty: \qquad \nabla\varphi^{(0)} \to U_0\mathbf{e}_z, \quad \nabla\Phi_{\text{ex}}^{(0)} \to -E_0\mathbf{e}_z,$$

$$r \to 1: \quad \Phi_{\text{in}}^{(0)} = \Phi_{\text{ex}}^{(0)}, \quad P_{\text{ex}} = -\frac{1}{2}\rho\partial_z\varphi^{(0)} + f_{\text{ex}}(T_0, T_1),$$

$$P_{\text{in}} = f_{\text{in}}(T_0, T_1), \quad P_\sigma = 1,$$

$$P_E = -\frac{E_{\text{ex}}}{8\pi}\left(\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(0)}\right)^2\Big|_{r\to 1} + \frac{E_{\text{in}}}{8\pi}\left(\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(0)}\right)^2\Big|_{r\to 1}.$$

Ее решения имеют вид

$$\varphi^{(0)} = U_0 z, \quad \Phi_{\text{ex}}^{(0)} = -E_0 z, \quad \Phi_{\text{in}}^{(0)} = -E_0 z.$$

Задача первого порядка малости

$$\Delta\varphi^{(1)} = 0, \quad \Delta\psi^{(1)} = 0, \quad \Delta\Phi_{\text{in}}^{(1)} = 0, \quad \delta\Phi_{\text{ex}}^{(1)} = 0,$$

$$r \to 0: \qquad \nabla\psi^{(1)} \to 0, \quad \nabla\Phi_{\text{in}}^{(1)} \to 0,$$

$$r \to \infty: \qquad \nabla\varphi^{(1)} \to 0, \quad \nabla\Phi_{\text{ex}}^{(1)} \to 0,$$

$$\frac{dF}{dt} = -\partial_{T_0}\xi_1 + \partial_r\psi^{(1)} = 0,$$

$$\partial_r\psi^{(1)} = -\partial_z\varphi^{(0)}\partial_z\xi_1 + \partial_r\varphi^{(1)},$$

$$\varepsilon_{\text{in}}\left(\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(0)}\partial_z\xi_1 - \partial_r\Phi_{\text{in}}^{(1)}\right) = \varepsilon_{\text{ex}}\left(\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(0)}\partial_z\xi_1 - \partial_r\Phi_{\text{ex}}^{(1)}\right),$$

$$\Phi_{\text{in}}^{(1)} = \Phi_{\text{ex}}^{(1)}, \quad P_{\text{ex}} = \rho\left(-\partial_{T_0}\varphi^{(1)} - \partial_z\varphi^{(0)}\partial_z\varphi^{(1)}\right),$$

$$P_{\text{in}} = \partial_{T_0}\psi^{(1)}, \quad P_\sigma = -\xi^{(1)} - \partial_{z,z}\xi^{(1)} - \partial_{\varphi,\varphi}\xi^{(1)},$$

$$P_E = -\frac{E_{\text{ex}}}{4\pi}\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(0)}\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(1)} + \frac{E_{\text{in}}}{4\pi}\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(0)}\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(1)}.$$

Отыскание решений первого порядка малости не представляет трудности и может быть проведено по схеме, подробно описанной в работе [3]. Оно ищется в виде разложений по бегущим цилиндрическим волнам:

$$\xi^{(1)}(\varphi, z, t) = \int\limits_0^\infty \sum_{m=0}^\infty \alpha_m(t)\exp(im\varphi)\exp(ikz)dk,$$

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r},t)=\int\limits_0^\infty\sum_{m=0}^\infty C_m^{(1)}(t)I_m(kr)\exp(im\varphi)\exp(ikz)dk,$$

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r},t)=-Uz+\int\limits_0^\infty\sum_{m=0}^\infty C_m^{(2)}(t)K_m(kr)\exp(im\varphi)\exp(ikz)dk,$$

$$\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)=-E_0z+\int\limits_0^\infty\sum_{m=0}^\infty C_m^{(3)}(t)I_m(kr)\exp(im\varphi)\exp(ikz)dk,$$

$$\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)=-E_0z+\int\limits_0^\infty\sum_{m=0}^\infty C_m^{(4)}(t)K_m(kr)\exp(im\varphi)\exp(ikz)dk,$$

где i — мнимая единица, k — волновое число, m — азимутальный параметр, $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно [8], $\alpha_m(t)$ и $C_m^{(j)}(t)$ — зависящие от времени неизвестные амплитудные функции первого порядка малости.

Дисперсионное уравнение задачи получится из условия совместности граничных условий в виде

$$-\omega^2-\omega\frac{2\rho kU_0g_m(k)}{\rho g_m(k)-h_m(k)}+\frac{g_m(k)}{1-\rho\frac{g_m(k)}{h_m(k)}}\left(\frac{\rho k^2U_0^2}{h_m(k)}+\frac{1}{4\pi}\frac{(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}})^2k^2E_0^2}{\left(\varepsilon_{\text{in}}g_m(k)-\varepsilon_{\text{ex}}h_m(k)\right)}-(1-k^2-m^2)\right)=0,$$

$$h_m(k)\equiv\frac{kK_m'(k)}{K_m(k)},\quad g_m(k)\equiv\frac{kI_m'(k)}{I_m(k)}$$

и будет иметь два решения

$$\omega_1=kU_0\gamma_m(k)+\sqrt{k^2U_0^2\gamma_m^2(k)+4\omega_0(m,k)},$$

$$\omega_2=kU_0\gamma_m(k)-\sqrt{k^2U_0^2\gamma_m^2(k)+4\omega_0(m,k)},$$

$$\gamma_m(k)\equiv\frac{\rho g_m(k)}{\rho g_m(k)-h_m(k)},$$

$$\omega_0^2(m,k)\equiv\frac{g_m(k)}{1-\rho\frac{g_m(k)}{h_m(k)}}\left(\frac{\rho k^2U_0^2}{h_m(k)}+\frac{1}{4\pi}\frac{(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}})^2k^2E_0^2}{[\varepsilon_{\text{in}}g_m(k)-\varepsilon_{\text{ex}}h_m(k)]}-(1-k^2-m^2)\right),$$

где ω — циклическая частота. Частоты ω_1 и ω_2 соответствуют двум различным капиллярным волнам на поверхности струи. При определенных значениях физических параметров радикалы в полученных выражениях обращаются в нуль и волны сливаются в одну.

Задача второго порядка малости

$$\Delta\varphi^{(2)}=0,\quad \Delta\psi^{(2)}=0,\quad \Delta\Phi_{\text{in}}^{(2)}=0,\quad \Delta\Phi_{\text{ex}}^{(2)}=0,$$

$$r\to0:\qquad \nabla\psi^{(2)}\to0,\quad \nabla\Phi_{\text{in}}^{(2)}\to0,$$

$$r\to\infty:\qquad \nabla\varphi^{(2)}\to0,\quad \nabla\Phi_{\text{ex}}^{(2)}\to0,$$

$$\frac{dF}{dt}=-\partial_{T_0}\xi_2-\partial_{T_1}\xi_1+\partial_r\psi^{(2)}-\partial_z\xi_1\partial_z\psi^{(1)}-\partial_\varphi\xi_1\partial_\varphi\psi^{(1)}+\xi_1\partial_{rr}\psi^{(1)}=0,$$

$$\left(\partial_r\psi^{(2)}-\partial_z\xi_1\partial_z\psi^{(1)}-\partial_\varphi\xi_1\partial_\varphi\psi^{(1)}+\xi_1\partial_{rr}\psi^{(1)}\right)=\left(-\partial_z\varphi^{(0)}\partial_z\xi_2+\partial_r\varphi^{(2)}-\partial_z\xi_1\partial_z\varphi^{(1)}-\partial_\varphi\xi_1\partial_\varphi\varphi^{(1)}+\xi_1\partial_{rr}\varphi^{(1)}\right),$$

$$E_{\text{in}}\left(\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(0)}\partial_z\xi_2-\partial_r\Phi_{\text{in}}^{(2)}+\partial_z\xi_1\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(1)}+\partial_\varphi\xi_1\partial_\varphi\Phi_{\text{in}}^{(1)}-\xi_1\partial_{rr}\Phi_{\text{in}}^{(1)}\right)=E_{\text{ex}}\left(\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(0)}\partial_z\xi_2-\partial_r\Phi_{\text{ex}}^{(2)}+\partial_z\xi_1\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(1)}+\partial_\varphi\xi_1\partial_\varphi\Phi_{\text{ex}}^{(1)}-\xi_1\partial_{rr}\Phi_{\text{ex}}^{(1)}\right),$$

$$\left(\Phi_{\text{in}}^{(2)}+\xi_1\partial_r\Phi_{\text{in}}^{(1)}\right)=\left(\Phi_{\text{ex}}^{(2)}+\xi_1\partial_r\Phi_{\text{ex}}^{(1)}\right),$$

$$P_{\text{ex}}=\rho\Big(-\partial_{T_0}\varphi^{(2)}-\partial_z\varphi^{(0)}\partial_z\varphi^{(2)}-\partial_{T_1}\varphi^{(1)}-\frac12\big(\partial_z\varphi^{(1)}\big)^2-\frac12\big(\partial_\varphi\varphi^{(1)}\big)^2-\frac12\big(\partial_r\varphi^{(1)}\big)^2-\xi_1\partial_{r,T_0}\varphi^{(1)}-\xi_1\partial_z\varphi^{(0)}\partial_{r,z}\varphi^{(1)}\Big),$$

$$P_{\text{in}}=-\partial_{T_0}\psi^{(2)}-\partial_{T_1}\psi^{(1)}-\frac12\big(\partial_z\psi^{(1)}\big)^2-\frac12\big(\partial_\varphi\psi^{(1)}\big)^2-\frac12\big(\partial_r\psi^{(1)}\big)^2-\xi_1\partial_{r,T_0}\psi^{(1)},$$

$$P_\sigma=\big(\xi^{(1)}\big)^2-\xi^{(2)}-\partial_{z,z}\xi^{(2)}-\partial_{\varphi,\varphi}\xi^{(2)}-\frac12\big(\partial_z\xi^{(1)}\big)^2-\frac12\big(\partial_\varphi\xi^{(1)}\big)^2+2\xi^{(1)}\partial_{\varphi,\varphi}\xi^{(1)},$$

$$P_E=\frac{E_{\text{ex}}}{8\pi}\Big(-2\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(0)}\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(2)}+2\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(0)}\partial_z\xi^{(1)}-\big(\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(1)}\big)^2-\big(\partial_\varphi\Phi_{\text{ex}}^{(1)}\big)^2+\big(\partial_r\Phi_{\text{ex}}^{(1)}\big)^2-4\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(0)}\partial_z\xi^{(1)}\partial_r\Phi_{\text{ex}}^{(1)}-2\xi^{(1)}\partial_z\Phi_{\text{ex}}^{(0)}\partial_{r,z}\Phi_{\text{ex}}^{(1)}\Big)-\frac{E_{\text{in}}}{8\pi}\Big(-2\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(0)}\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(2)}+2\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(0)}\partial_z\xi^{(1)}-\big(\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(1)}\big)^2-\big(\partial_\varphi\Phi_{\text{in}}^{(1)}\big)^2+\big(\partial_r\Phi_{\text{in}}^{(1)}\big)^2-4\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(0)}\partial_z\xi^{(1)}\partial_r\Phi_{\text{in}}^{(1)}-2\xi^{(1)}\partial_z\Phi_{\text{in}}^{(0)}\partial_{r,z}\Phi_{\text{in}}^{(1)}\Big).$$

Перегруппируем слагаемые в уравнениях — потенциалы и функцию ξ перенесем влево, а все остальные слагаемые — вправо. В итоге получим неоднородную систему уравнений. Сгруппируем неоднородность по степеням экспоненты $\exp(-2i\omega_1 T_0)$, $\exp(2i\omega_2 T_0)$, $\exp[iT_0(\omega_2-\omega_1)]$. Решения для потенциалов и функции ξ будем искать в виде

$$\begin{aligned}\psi^{(2)} = \big\{&A_1\exp(-2i\omega_1 T_0) + A_2\exp(2i\omega_2 T_0)\\ &+ A_3\exp[iT_0(\omega_2-\omega_1)] + A_4\exp(-2i\omega_1 T_0 + iM\varphi)\\ &+ A_5\exp(2i\omega_2 T_0 + iM\varphi) + A_6\exp[iT_0(\omega_2-\omega_1)]\big\}\\ &\times \exp(iLz) I_M(Lr),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)} = \big\{&B_1\exp(-2i\omega_1 T_0) + B_2\exp(2i\omega_2 T_0)\\ &+ B_3\exp[iT_0(\omega_2-\omega_1)] + B_4\exp(-2i\omega_1 T_0 + iM\varphi)\\ &+ B_5\exp(2i\omega_2 T_0 + iM\varphi) + B_6\exp[iT_0(\omega_2-\omega_1)]\big\}\\ &\times \exp(iLz) K_M(Lr),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)}_{\text{in}} = \big\{&C_1\exp(-2i\omega_1 T_0) + C_2\exp(2i\omega_2 T_0)\\ &+ C_3\exp[iT_0(\omega_2-\omega_1)] + C_4\exp(-2i\omega_1 T_0 + iM\varphi)\\ &+ C_5\exp(2i\omega_2 T_0 + iM\varphi) + C_6\exp[iT_0(\omega_2-\omega_1)]\big\}\\ &\times \exp(iLz) I_M(Lr),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)}_{\text{ex}} = \big\{&D_1\exp(-2i\omega_1 T_0) + D_2\exp(2i\omega_2 T_0)\\ &+ D_3\exp[iT_0(\omega_2-\omega_1)] + D_4\exp(-2i\omega_1 T_0 + iM\varphi)\\ &+ D_5\exp(2i\omega_2 T_0 + iM\varphi) + D_6\exp[iT_0(\omega_2-\omega_1)]\big\}\\ &\times \exp(iLz) K_M(Lr),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi^{(2)} = \big\{&\alpha_1\exp(-2i\omega_1 T_0) + \alpha_2\exp(2i\omega_2 T_0)\\ &+ \alpha_3\exp[iT_0(\omega_2-\omega_1)] + \alpha_4\exp(-2i\omega_1 T_0 + iM\varphi)\\ &+ \alpha_5\exp(2i\omega_2 T_0 + iM\varphi) + \alpha_6\exp[iT_0(\omega_2-\omega_1)]\big\}\\ &\times \exp(iLz),\end{aligned}$$

где $L \equiv 2k$, $M \equiv 2m$ [8].

Подставим решения в левые части уравнений полученной неоднородной системы и сгруппируем результат по экспонентам с различными показателями. В матричном виде результат представится как

$$\begin{pmatrix} -2i\omega_1 & iLU_0 & -iE_0L(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) & 1-L^2\\ -g_0(L) & g_0(L) & 0 & 2i\omega_1\\ 0 & -h_0(L) & 0 & -i\rho(2\omega_1 - LU_0)\\ 0 & 0 & \varepsilon_{\text{in}}g_0(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_0(L) & \frac{iE_0L}{4\pi}(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) \end{pmatrix}$$
$$\times \exp(-2i\omega_1 T_0)$$
$$+\begin{pmatrix} 2i\omega_2 & iLU_0 & -iE_0L(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) & 1-L^2\\ -g_0(L) & g_0(L) & 0 & -2i\omega_2\\ 0 & -h_0(L) & 0 & -i\rho(2\omega_2 - LU_0)\\ 0 & 0 & \varepsilon_{\text{in}}g_0(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_0(L) & \frac{iE_0L}{4\pi}(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) \end{pmatrix}$$
$$\times \exp(2i\omega_2 T_0)$$
$$+\begin{pmatrix} -i(\omega_1-\omega_2) & iLU_0 & -iE_0L(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) & 1-L^2\\ -g_0(L) & g_0(L) & 0 & 2i(\omega_1-\omega_2)\\ 0 & -h_0(L) & 0 & i\rho\Big(LU_0(\omega_1-\omega_2)\Big)\\ 0 & 0 & \varepsilon_{\text{in}}g_0(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_0(L) & \frac{iE_0L}{4\pi}(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) \end{pmatrix}$$
$$\times \exp[iT_0(\omega_2-\omega_1)]$$
$$+\begin{pmatrix} 2i\omega_1 & iLU_0 & -iE_0L(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) & 1-L^2-M^2\\ -g_M(L) & g_M(L) & 0 & 2i\omega_1\\ 0 & -h_M(L) & 0 & i\rho(LU_0 - 2\omega_1)\\ 0 & 0 & \varepsilon_{\text{in}}g_M(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_M(L) & \frac{iE_0L}{4\pi}(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) \end{pmatrix}$$
$$\times \exp(-2i\omega_1 T_0 + iM\varphi)$$
$$+\begin{pmatrix} 2i\omega_2 & iLU_0 & -iE_0L(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) & 1-L^2-M^2\\ -g_M(L) & g_M(L) & 0 & -2i\omega_2\\ 0 & -h_M(L) & 0 & i\rho(LU_0 - 2\omega_2)\\ 0 & 0 & \varepsilon_{\text{in}}g_M(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_M(L) & \frac{iE_0L}{4\pi}(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) \end{pmatrix}$$
$$\times \exp(-2i\omega_2 T_0 + iM\varphi)$$
$$+\begin{pmatrix} -i(\omega_1-\omega_2) & iLU_0 & -iE_0L(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) & 1-L^2-M^2\\ -g_M(L) & g_M(L) & 0 & 2i(\omega_1-\omega_2)\\ 0 & -h_M(L) & 0 & i\rho\Big(LU_0-(\omega_1-\omega_2)\Big)\\ 0 & 0 & \varepsilon_{\text{in}}g_M(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_M(L) & \frac{iE_0L}{4\pi}(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) \end{pmatrix}$$
$$\times \exp[iT_0(\omega_2-\omega_1) + iM\varphi] = f,$$

где f — функция неоднородности, сгруппированная по аналогичным экспонентам, а выражения в строках — коэффициенты при неизвестных амплитудах A, B, C и α.

Разбивая полученную систему на отдельные системы при экспонентах с различными показателями степени, получим 6 уравнений вида

$$\begin{pmatrix} -2i\omega_1 & iLU_0 & -iE_0L(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) & 1-L^2 \\ -g_0(L) & g_0(L) & 0 & 2i\omega_1 \\ 0 & -h_0(L) & 0 & -i\rho(2\omega_1-LU_0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\text{in}}g_0(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_0(L) & \frac{iE_0L}{4\pi}(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2ib(m,k)\big(2k^2-g_m(k)\big) \\ 2i\big(b(m,k)-f_1(m,k)\big)\big(2k^2-g_m(k)\big) \\ -\dfrac{2ikE_0(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}})^2\big(2k^2-g_m(k)\big)}{\big(-\varepsilon_{\text{in}}g_m(k)+\varepsilon_{\text{ex}}h_m(k)\big)} \\ 2+k^2-3m^2+b(m,k)^2\big(k^2-m^2-3g_m(k^2)\big) \\ +\rho f_1(m,k)^2\big(-k^2+m^2+h_m(k)^2\big) \\ +2\rho f_1(m,k)h_m(k)(-kU_0+\omega_1) \\ +\dfrac{E_0^2k^2(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}})}{4\pi\big(\varepsilon_{\text{in}}g_m(k)-\varepsilon_{\text{ex}}h_m(k)\big)^2} \\ \times\big[(k^2-m^2)(\varepsilon_{\text{ex}}-\varepsilon_{\text{in}})^2-3\big(\varepsilon_{\text{in}}g_m(k) \\ -\varepsilon_{\text{ex}}h_m(k)\big)^2-\varepsilon_{\text{ex}}\varepsilon_{\text{in}}\big(g_m(k)-h_m(k)\big)^2\big], \end{pmatrix} \quad (3)$$

где $b(m,k)$ и $f_1(m,k)$ —функции от m и k, явный вид которых не выписывается в связи с экономией места. Решать уравнение (3) будем методом Крамера. Обозначим матрицу, стоящую слева, M_1. Ее определитель после упрощения примет вид

$$\operatorname{Det}(M_1) = -[\rho g_0(L)-h_0(L)][\varepsilon_{\text{in}}g_0(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_0(L)]$$
$$\times[\omega_1(0,L)-2\omega_1(m,k)][2\omega_1(m,k)+\omega_2(0,L)],$$

где $\omega_1(0,L)$, $\omega_2(0,L)$ — частоты волн второго порядка малости, $\omega_1(m,k)$ — частота волны первого порядка малости. Решением для коэффициента A_1 будет отношение определителей

$$A_1 = \frac{\operatorname{Det}(M)}{\operatorname{Det}(M_1)}, \quad (4)$$

где $\operatorname{Det}(M)$ — определитель матрицы M_1, в которой первый столбец заменен на стоящий справа столбец функции неоднородности. Не будем записывать полученное выражение для A_1 ввиду его громоздкости. Решения для коэффициентов B_1, C_1, D_1 и α_1 находятся аналогично.

Выпишем определители всех матриц, стоящих в уравнениях слева,

$$\operatorname{Det}(M_2) = -[\rho g_0(L)-h_0(L)][\varepsilon_{\text{in}}g_0(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_0(L)]$$
$$\times[\omega_2(0,L)-2\omega_2(m,k)][2\omega_2(m,k)+\omega_1(0,L)],$$

$$\operatorname{Det}(M_3) = -[\rho g_0(L)-h_0(L)][\varepsilon_{\text{in}}g_0(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_0(L)]$$
$$\times[\omega_1(0,L)-\Omega(m,k)][\Omega(m,k)+\omega_2(0,L)],$$

$$\operatorname{Det}(M_4) = -[\rho g_M(L)-h_M(L)][\varepsilon_{\text{in}}g_M(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_M(L)]$$
$$\times[\omega_1(M,L)-2\omega_1(m,k)][2\omega_1(m,k)+\omega_2(M,L)],$$

$$\operatorname{Det}(M_5) = -[\rho g_M(L)-h_M(L)][\varepsilon_{\text{in}}g_M(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_M(L)]$$
$$\times[\omega_2(M,L)-2\omega_2(m,k)][2\omega_2(m,k)+\omega_1(M,L)],$$

$$\operatorname{Det}(M_6) = -[\rho g_M(L)-h_M(L)][\varepsilon_{\text{in}}g_M(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_M(L)]$$
$$\times[\omega_1(M,L)-\Omega(m,k)][\Omega(m,k)+\omega_2(M,L)],$$
$$\Omega(m,k)\equiv\omega_1(m,k)-\omega_2(m,k). \quad (5)$$

Полученные определители стоят в знаменателях выражений типа (4). Если какой-либо из определителей обратится в нуль, то соответствующая амплитуда колебаний будет стремиться к бесконечности. В теории колебаний это интерпретируется как резонансное взаимодействие волн [9,10].

Проведем анализ полученных определителей, имея в виду зависимости положений резонансных ситуаций от физических параметров.

Анализ результатов

Проанализируем знаменатель в (3), соответствующий резонансному взаимодействию волны с частотой с индексом „один“, с произвольной симметрией с осесимметричной модой с удвоенным волновым числом. Он имеет вид

$$\operatorname{Det}(M_1) = -[\rho g_0(L)-h_0(L)][\varepsilon_{\text{in}}g_0(L)-\varepsilon_{\text{ex}}h_0(L)]$$
$$\times[\omega_1(0,L)-2\omega_1(m,k)][2\omega_1(m,k)+\omega_2(0,L)].$$

Видно, что при определенных соотношениях между частотами $\omega_1(0,L)$ и $\omega_1(m,k)$ знаменатель обратится в нуль за счет третьего сомножителя, пропорционального разности $[\omega_1(0,L)-2\omega_1(m,k)]$. Результаты расчетов для осесимметричной моды капиллярных волн приведены на рис. 1, *a*. Видно, что при докритических (в смысле реализации электростатической неустойчивости поверхности струи, реализующейся, согласно [3], при $W\approx 2.9$) зарядах на границе раздела сред и скоростях движения струи менее 40 резонансное взаимодействие реализуется в области малых значений волновых чисел. Следует отметить, что скорость обезразмеривается на $\sigma/R\rho_{\text{in}}$. Принятые при расчетах (приведенные на графиках) значения скорости, например для струи воды, следует умножить на ~ 30 при $R=0.1$ cm, чтобы получить значение скорости, имзеренное в cm/s. Реальная скорость спонтанных струй измеряется в сотнях сантимеров в секунду [11]. Увеличение напряженности внешнего поля приведет к смещению резонансных значений в сторону меньших значений волновых чисел и в сторону увеличения скоростей. Увеличение плотности окружающей среды приведет к смещению резонансных значений в сторону меньших значений волновых чисел и в сторону уменьшения скоростей. На рис. 1, *b* приведены результаты расчетов для изгибной волны ($m=1$) на поверхности

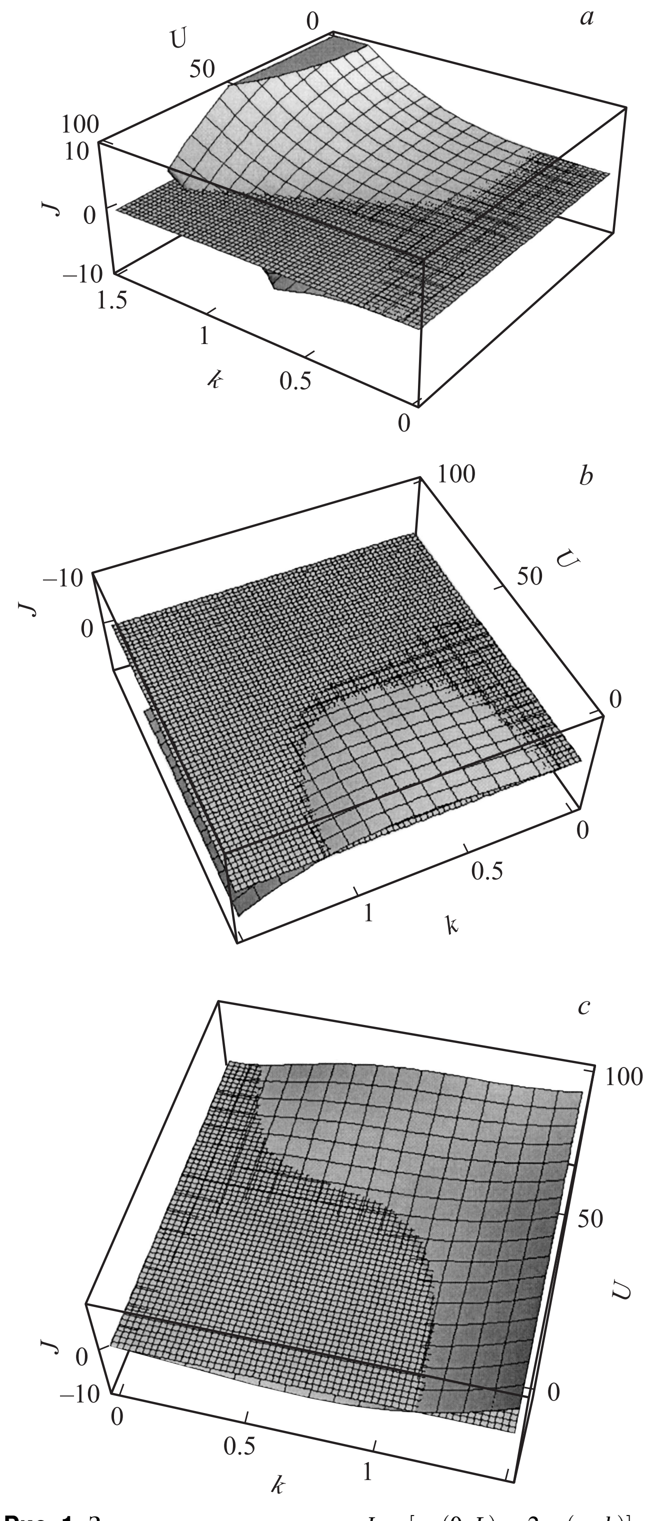


Рис. 1. Зависимости поверхности $J \equiv [\omega_1(0, L) - 2\omega_1(m, k)] \times [2\omega_1(m, k) + \omega_2(0, L)]$ от безразмерных скорости и волнового числа (U и k), рассчитанные при безразмерной плотности окружающей среды $\rho = 0.001$: a — $m = 0$, $W = 1$; b — $m = 1$, $W = 1$; c — $m = 1$, $W = 2$.

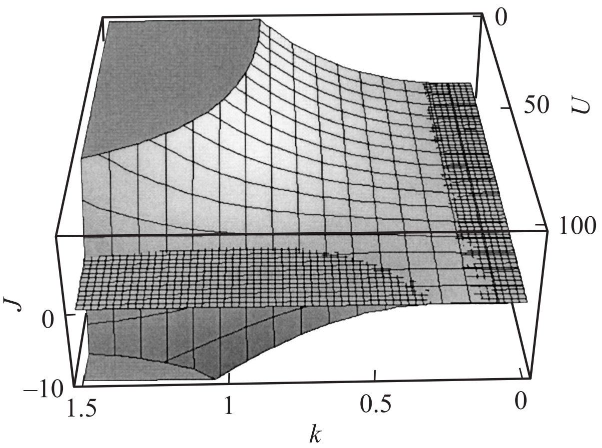


Рис. 2. Зависимость поверхности $J \equiv [\omega_1(0, L) - \Omega(m, k)] \times [\Omega(m, k) + \omega_2(0, L)]$ от безразмерных скорости и волнового числа (U и k), рассчитанная при фиксированном $W = 1$, $m = 0$, $\rho = 0.001$.

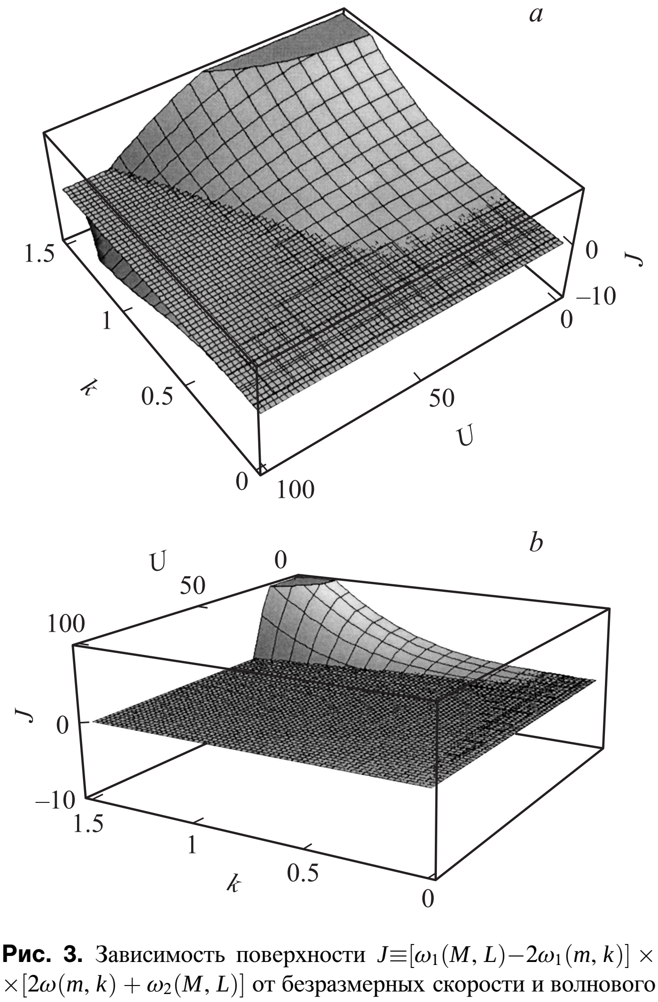
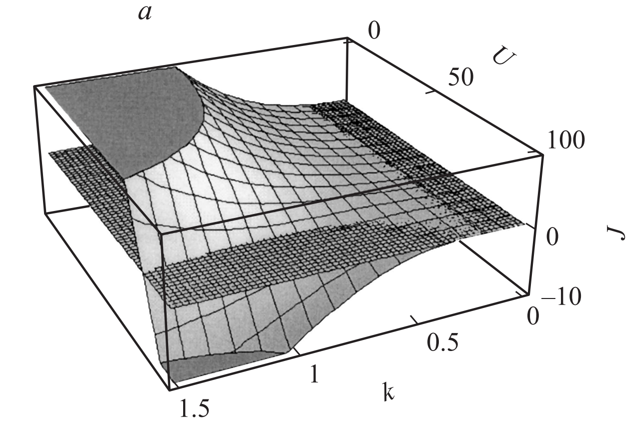


Рис. 3. Зависимость поверхности $J \equiv [\omega_1(M, L) - 2\omega_1(m, k)] \times [2\omega(m, k) + \omega_2(M, L)]$ от безразмерных скорости и волнового числа (U и k), рассчитанная при $m = 0$, $W = 1$: a — $\rho = 0.001$, b — $\rho = 0.01$.

струи в воздухе. Видно, что при реально отмечаемых в эксперименте скоростях струи резонансной передачи энергии не происходит. Увеличение напряженности



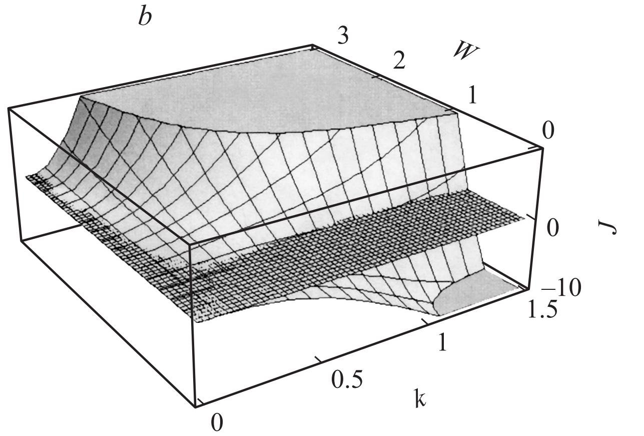


Рис. 4. Зависимости поверхности $J \equiv [\omega_1(M, L) - \Omega(m, k)] \times \times[\Omega(m, k) + \omega_2(M, L)]$, рассчитанные при $\rho = 0.001$, $m = 0$: a — от безразмерных скорости и волнового числа (U и k) при $W = 1$; b — от безразмерных полевого параметра W и волнового числа k, при значении безразмерной скорости $U = 75$.

внешнего поля вдвое приводит к появлению резонансов для разумных значений волновых чисел и разумных скоростей струи, как это видно из рис. 1, *c*.

Для исследования второй резонансной ситуации, когда волна с частотой с индексом „два“ с произвольной симметрией резонансно взаимодействует с осесимметричной модой с удвоенным волновым числом, нужно проанализировать $\mathrm{Det}\,(M_2)$ (см. (5)). В качественном отношении ситуация складывается такая же, как в уже проанализированном случае.

Третья резонансная ситуация определяется $\mathrm{Det}\,(M_3)$ и соответствует взаимодействию осесимметричной волны с частотой с индексом „один“ и удвоенным волновым числом k с волной частотой $\omega_1(m, k) - \omega_2(m, k)$. Тенденции изменения решений такие же, как отмечены выше, как видно из рис. 2.

Четвертая резонансная ситуация определяется $\mathrm{Det}\,(M_4)$, проиллюстрирована рис. 3, *a* и соответствует взаимодействияю волны с произвольной симметрией и частотой с индексом „один“ с удвоенным волновым числом k с волной с частотой индекса „один“. При увеличении плотности окружающей среды геометрическое место точек, соответствующее реализации резонанса, смещается в область меньших значений скорости, как это видно из рис. 3, *b*.

Пятая резонансная ситуация определяется $\mathrm{Det}\,(M_5)$ и аналогична предыдущей, только для волны с индексом „два“.

Шестая резонансная ситуация определяется $\mathrm{Det}\,(M_6)$, аналогична разобранной выше третьей резонансной ситуации, только реализуется не для взаимодействия осесимметричной волны с волной произвольной симметрии, а для взаимодействия двух волн с произвольной симметрией и проиллюстрирована рис. 4. Из рис. 4, *b*, в частности, видно, что резонансное взаимодействие возможно только при внешних полях большой напряженности.

Заключение

Нелинейное исследование во втором порядке малости по безразмерной амплитуде капиллярных волн на поверхности струи идеальной жидкости, движущейся с постоянной скоростью относительно материальной среды, демонстрирует наличие шести вырожденных резонансов, из которых все могут реализоваться при реально регистрируемых скоростях движения струи и докритических (в смысле реализации электростатической неустойчивости) напряженностях внешнего поля.

Работа выполнена при поддержке грантов Рособрнауки № РНП 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.

Список литературы

[1] *Бураев Т.К., Верещагин И.П., Пашин Н.М.* // Сильные электрические поля в технологических процессах. М.: Энергия, 1979. № 3. С. 87–105.
[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[3] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В.* Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2007. 340 с.
[4] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 2. С. 47–51.
[5] *Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 3. С. 57–68.
[6] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Полянцев Н.А.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 12. С. 56–62.
[7] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Полянцев Н.А.* // ЭЖ „Исследовано в России“. htt//zhur[nal.ape.relarn..ru/articles/2011/011.pdf
[8] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
[9] *Tsamopoulos J.A., Brown R.* // J. Fluid. Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
[10] *Natarayan R., Brown R.A.* // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1987. Vol. 410. N 1838. P. 209–227.
[11] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А.* Классификация режимов работы электрогидродинамических источников ионов. Препринт ИМ РАН № 25. Ярославль, 1993. 118 с.