

01;03

О неустойчивости плоской горизонтальной поверхности раздела между тонким слоем феррожидкости и тонким слоем немагнитной жидкости при наличии вертикального магнитного поля

© В.М. Коровин

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия
e-mail: l111@imec.msu.ru

(Поступило в Редакцию 10 января 2012 г.)

Проведен асимптотический анализ уравнений и граничных условий гидродинамики и построена нелинейная модель начальной стадии развития неустойчивости Розенцвейга в тонком горизонтальном слое покоящейся феррожидкости, покрытом тонким слоем более легкой немагнитной жидкости. Нижней границей феррожидкости является поверхность ненамагничивающейся пластины, а верхняя граница немагнитной жидкости является поверхностью раздела с газом. Давление в газе постоянно. Рассматриваемая неустойчивость возникает при включении достаточно сильного однородного вертикального магнитного поля. Предложенная модель содержит пять безразмерных параметров. Найдены величины критической намагниченности исходного слоя феррожидкости с плоской верхней границей и пороговое волновое число. В линейной постановке исследовано влияние определяющих параметров на область неустойчивости и длину волны наиболее быстро растущей моды.

Введение

Известно, что форма свободной поверхности покоящейся феррожидкости, находящейся в глубокой кювете, после включения однородного вертикального магнитного поля, создаваемого внешним устройством, зависит от уровня намагниченности жидкости, вызываемой этим полем.

В случае достаточно сильного поля на первоначально плоской горизонтальной свободной поверхности формируется периодический рельеф из высоких острых пиков. Переход феррожидкости к гидростатическому состоянию с такой формой свободной поверхности, существенно искажающей однородное приложенное поле, происходит под действием объемных и поверхностных магнитных сил и реализуется лишь в том случае, когда создаваемая приложенным однородным полем намагниченность феррожидкости с плоской свободной поверхностью превышает критическую величину, зависящую от физических параметров рассматриваемой жидкости. Если же намагниченность оказывается меньше критической величины, то свободная поверхность остается плоской. Исследованию этого явления — неустойчивости Розенцвейга — посвящено большое число экспериментальных и теоретических работ (см., например, библиографию в [1,2]).

Особый интерес представляют тонкие слои феррожидкостей, толщины которых много меньше капиллярной постоянной жидкости, используемой в эксперименте (см. работы [2,3] и приведенную в них библиографию). В этом случае при включении достаточно сильного вертикального поля сплошной слой, покрывающий горизонтальную пластину, распадается на вытянутые в вертикальном направлении удаленные друг от друга

капли с острыми вершинами. Образовавшиеся капли упорядоченно располагаются по поверхности пластины, образуя природическую структуру из гексагональных ячеек. Каждая ячейка состоит из шести капель, симметрично окружающих седьмую каплю, находящуюся в центре ячейки.

Подобного вида периодические структуры из остроконечных капель представляют интерес при создании сильных электрических полей в устройствах инжекции заряженных частиц [4].

В отличие от имеющихся работ в работе проведен анализ начальной стадии развития неустойчивости Розенцвейга в тонком слое феррожидкости, покрытом тонким слоем более легкой немагнитной жидкости, граничащей с газом.

Определяющие уравнения

Рассматривается плоское движение двуслойной жидкости, вызываемое вертикальным однородным достаточно сильным полем \mathbf{H}_0 , включенным в момент времени $t = 0$. Нижний слой образован феррожидкостью, покрывающей горизонтальную ненамагничивающуюся пластину, а верхний — более легкой немагнитной жидкостью, граничащей с газом, имеющим давление p_a . При $t < 0$ рассматриваемые несмешивающиеся жидкости находятся в состоянии гидростатического равновесия с плоскими поверхностями раздела. Далее физические параметры нижней жидкости отмечаются индексом 1, а верхней — индексом 2.

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y с базисом $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$, ось x которой параллельна поверхности пластины. Пусть уравнения $y = c_1(x, t)$,

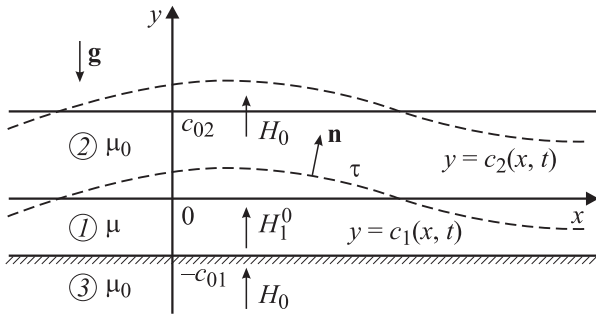


Рис. 1. Геометрия задачи и обозначения.

$y = c_2(x, t)$, $y = -c_{01} = \text{const}$ представляют соответственно поверхность раздела жидкостей, свободную поверхность и поверхность пластины (рис. 1). Будем отмечать индексами $j = 1, 2, 3$ магнитное поле $\mathbf{H}_j = (H_{jx}, H_{jy})$ и вектор магнитной индукции

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0(\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}), \quad \mathbf{B}_2 = \mu_0\mathbf{H}_2, \quad \mathbf{B}_3 = \mu_0\mathbf{H}_3$$

в областях, занятых феррожидкостью ($j = 1$) и немагнитными средами, расположенными выше ($j = 2$) и ниже ($j = 3$) слоя феррожидкости. Здесь $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}_1$ — вектор намагниченности, а $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/м — магнитная постоянная. Предполагается, что магнитная восприимчивость феррожидкости χ не зависит от напряженности магнитного поля.

Распределение поля описывается уравнениями магнитостатики

$$\frac{\partial H_{jy}}{\partial x} - \frac{\partial H_{jx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial H_{jy}}{\partial y} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Граничные условия на поверхностях раздела феррожидкости с немагнитными средами имеют вид

$$\text{при } y = c_1(x, t) \quad (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\mathbf{T} = 0, \quad (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)\mathbf{n} = 0, \quad (2)$$

$$\text{при } y = -c_{01} \quad H_{1x} = H_{3x}, \quad B_{1y} = B_{3y}, \quad (3)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к кривой $y = c_1(x, t)$, направленный из области 1 в область 2, а \mathbf{T} — единичный касательный вектор:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)^2}} \left(-\frac{\partial c_1}{\partial x} \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y \right),$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)^2}} \left(\mathbf{a}_x + \frac{\partial c_1}{\partial x} \mathbf{a}_y \right). \quad (4)$$

Вдали от слоя феррожидкости поле однородно и направлено вертикально вверх

$$\text{при } y \rightarrow \infty \quad \mathbf{H}_2 \rightarrow H_0 \mathbf{a}_y, \quad \text{при } y \rightarrow -\infty \quad \mathbf{H}_3 \rightarrow H_0 \mathbf{a}_y. \quad (5)$$

Движение жидкостей описывается уравнением неразрывности и уравнением Навье–Стокса

$$\frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{\partial v_l}{\partial y} = 0, \quad l = 1, 2, \quad (6)$$

$$\rho_l \left(\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial u_l}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p_l}{\partial x} + \eta_l \left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial y^2} \right) + f_{lx}, \quad l = 1, 2, \quad (7)$$

$$\rho_l \left(\frac{\partial v_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial v_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial v_l}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p_l}{\partial y} + \eta_l \left(\frac{\partial^2 v_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_l}{\partial y^2} \right) - \rho_l g + f_{ly}, \quad l = 1, 2. \quad (8)$$

Здесь (u_l, v_l) — компоненты вектора скорости, ρ_l , p_l , η_l — плотность, давление и коэффициент динамической вязкости соответствующей жидкости, g — величина ускорения свободного падения, а $f_{2x} = 0$, $f_{2y} = 0$.

Компоненты вектора плотности объемной магнитной силы определяются выражениями

$$f_{1x} = \mu_0 M \frac{\partial H_1}{\partial x}, \quad f_{1y} = \mu_0 M \frac{\partial H_1}{\partial y},$$

$$M = \chi H_1, \quad H_1 = \sqrt{H_{1x}^2 + H_{1y}^2}. \quad (9)$$

На поверхности раздела феррожидкости и немагнитной жидкости $y = c_1(x, t)$ помимо непрерывности поля скоростей

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 \quad (10)$$

должны выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} = v_1 \quad (11)$$

и динамические условия, выражающие равенство нормальных и касательных составляющих сил, действующих на противоположные стороны поверхности раздела

$$p_1 - p_2 = \frac{2\eta_1}{1 + \left(\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)^2} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial c_1}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right\} - \frac{2\eta_2}{1 + \left(\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)^2} \times \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial c_1}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right\} - \frac{\alpha_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \mathbf{n})^2, \quad (12)$$

$$\eta_1 \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \left[1 - \left(\frac{\partial c_1}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right\}$$

$$= \eta_2 \left\{ \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \left[1 - \left(\frac{\partial c_1}{\partial x} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right\}. \quad (13)$$

Здесь через α_1 обозначен коэффициент поверхностного натяжения между феррожидкостью и немагнитной

жидкостью. Последнее слагаемое в правой части равенства (12) представляет магнитный скачок давления при переходе через поверхность раздела феррожидкости и немагнитной жидкости [5].

Граничные условия на свободной поверхности немагнитной жидкости $y = c_2(x, t)$ записываются аналогичным образом:

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial c_2}{\partial x} = v_2, \quad (14)$$

$$p_2 - p_a = \frac{2\eta_2}{1 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial x}\right)^2} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial c_2}{\partial x}\right)^2 - 1 \right] + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right\} - \frac{\alpha_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial x}\right)^2 \right]^{3/2}}, \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \left[1 - \left(\frac{\partial c_2}{\partial x}\right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \frac{\partial c_2}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

где α_2 — коэффициент поверхностного натяжения между немагнитной жидкостью и газом.

На поверхности пластины имеем

$$\text{при } y = -c_{01}: \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0. \quad (17)$$

В случае плоской поверхности раздела $y = 0$ жидкостей решение задачи магнитостатики (1)–(3), (5) имеет простой вид

$$\mathbf{H}_1^0 = \frac{\mu_0}{\mu} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{H}_2^0 = \mathbf{H}_3^0 = \mathbf{H}_0, \quad \mu = \mu_0(1 + \chi). \quad (18)$$

При этом после включения поля распределения давлений P_1^0, P_2^0 в покоящихся жидкостях описываются выражениями гидростатики

$$P_1^0 = p_a + g(\rho_2 c_{02} - \rho_1 y) - \frac{\mu_0}{2} M_0^2, \quad M_0 = \frac{\chi}{\mu_r} H_0,$$

$$P_2^0 = p_a + \rho_2 g(c_{02} - y), \quad (19)$$

где $\mu_r = 1 + \chi$ — относительная магнитная проницаемость феррожидкости, а c_{02} — толщина слоя немагнитной жидкости.

Как показывает проведенный далее для тонких слоев анализ, при $t \geq 0$ распределения (18), (19) реализуются в том случае, когда намагниченность плоского слоя феррожидкости M_0 не превышает некоторое критическое значение M_c .

Вычисление плотности объемной магнитной силы и магнитного скачка давления в случае тонкого слоя

При развитии неустойчивости Розенцвейга на стационарное магнитное поле \mathbf{H}_0 , создаваемое расположенным

на бесконечности источником, непрерывно накладывається возмущение, вызываемое изменением формы поверхности раздела жидкостей $y = c_1(x, t)$. Далее рассматривается неустойчивость тонкого слоя феррожидкости, когда его толщина c_{01} мала по сравнению с характерной длиной волны λ_m наиболее быстро растущей моды. Наличие малого параметра $\varepsilon = c_{01}/\lambda_m \ll 1$ позволяет существенно упростить задачу магнитостатики (1)–(3), (5).

Положим $H_j(x, y, t) = H_j^0 + h_j(x, y, t)$, $j = 1, 2, 3$. После подстановки этих выражений в систему уравнений (1) имеем

$$\frac{\partial h_{jy}}{\partial x} - \frac{\partial h_{jx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial h_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial h_{jy}}{\partial y} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Из первого уравнения (20), относящегося к слою феррожидкости, следует $h_{1x}/h_{1y} = O(\varepsilon)$. В результате второе уравнение (20) после отбрасывания величины порядка ε^2 принимает вид

$$\frac{\partial h_{1y}}{\partial y} = 0, \quad (21)$$

т.е. в рассматриваемом случае вертикальная компонента возмущения магнитного поля не изменяется поперек слоя феррожидкости.

Из выражений (9) с учетом проведенных оценок следует

$$f_{1x} = \mu_0 M_0 \frac{\partial h_{1y}}{\partial x} \left\{ 1 + \frac{h_{1y}}{H_1^0} [1 + O(\varepsilon^2)] \right\},$$

$$f_{1y} = \mu_0 \chi h_{1x} \frac{\partial h_{1x}}{\partial y}. \quad (22)$$

Принимая во внимание (4), для нестационарной части магнитного скачка давления аналогичным образом получаем

$$\frac{\mu_0}{2} [(\mathbf{Mn})^2 - M_0^2] = \mu_0 \chi M_0 h_{1y} \left[1 + \frac{h_{1y}}{2H_1^0} + O(\varepsilon^2) \right].$$

При $\varepsilon \ll 1$ на начальной стадии развития неустойчивости силовые линии магнитного поля внутри слоя феррожидкости локально параллельны и $h_{1y}/H_1^0 \ll 1$. Учитывая лишь члены лидирующего порядка, имеем

$$f_{1x} = \mu_0 M_0 \frac{\partial h_{1y}}{\partial x}, \quad f_{1y} = \mu_0 \chi h_{1x} \frac{\partial h_{1x}}{\partial y},$$

$$\frac{\mu_0}{2} [(\mathbf{Mn})^2 - M_0^2] = \mu_0 \chi M_0 h_{1y}. \quad (23)$$

После введения потенциалов магнитных полей

$$\mathbf{H}_j = \nabla \Phi_j(x, y, t), \quad \nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad j = 1, 2, 3$$

задача магнитостатики (1)–(3), (5) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2} = 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$\text{при } y = c_1(x, t) \quad \Phi_1 = \Phi_2, \quad \mu_r \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n},$$

$$\text{при } y = -c_{01} \quad \Phi_1 = \Phi_3, \quad \mu_r \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial y},$$

$$\text{при } y \rightarrow \infty \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \rightarrow H_0,$$

$$\text{при } y \rightarrow -\infty \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \rightarrow H_0.$$

Полагая далее $\Phi_j = \Phi_j^0(y) + \varphi_j(x, y, t)$, $\mathbf{h}_j = \nabla \varphi_j$, $j = 1, 2, 3$, где

$$\Phi_1^0 = \frac{1}{\mu_r} H_0 y, \quad \Phi_2^0 = H_0 y, \quad \Phi_3^0 = H_0 y + c_{01} M_0,$$

с учетом выражений (4), (21) и оценки $h_{1x}/h_{1y} = O(\varepsilon)$ получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} = 0, \quad j = 2, 3; \quad (24)$$

$$\text{при } y = c_1(x, t) \quad \varphi_1 - \varphi_2 = M_0 c_1, \quad \mu_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad (25)$$

$$\text{при } y = -c_{01} \quad \varphi_1 = \varphi_3, \quad \mu_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}, \quad (26)$$

$$\text{при } y \rightarrow \infty \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \text{при } y \rightarrow -\infty \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \rightarrow 0. \quad (27)$$

Отметим, что в задаче о расчете потенциалов возмущений магнитных полей (24)–(27) граничные условия на поверхности раздела жидкостей (25) нелинейны.

Асимптотический анализ уравнений Навье–Стокса и граничных условий

Для упрощения дальнейших выкладок целесообразно выделить нестационарные части полей давления

$$p_l = P_l^0(y) + p_l'(x, y, t), \quad l = 1, 2, \quad (28)$$

где P_l^0 определены выражениями (19). С учетом (23), (28) уравнения движения феррожидкости (7), (8) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p_1'}{\partial x} \\ &+ \eta_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \mu_0 M_0 \frac{\partial h_{1y}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p_1'}{\partial y} \\ &+ \eta_1 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \chi h_{1x} \frac{\partial h_{1x}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Пренебрегая в динамических граничных условиях (12), (13) заведомо малыми величинами, с учетом (4), (23), (28) получаем условия при $y = c_1(x, t)$:

$$\begin{aligned} p_1' - p_2' &= c_1 g (\rho_1 - \rho_2) + 2\eta_1 \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right] \\ &+ 2\eta_2 \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right] \\ &- \alpha_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi M_0 h_{1y}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 \left[\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right] \\ = \eta_2 \left[\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

Далее рассматривается случай, когда коэффициенты вязкости η_1, η_2 , коэффициенты поверхностного натяжения α_1, α_2 , а также толщины c_{01}, c_{02} плоских слоев по порядку величины в каждой из пар одинаковы.

Учитывая наличие малого параметра ε , оценим порядки фигурирующих в (29), (30) величин. С этой целью введем безразмерные переменные (со звездочками)

$$x_* = \frac{\varepsilon x}{c_{01}}, \quad y_* = \frac{y}{c_{01}}, \quad t_* = \frac{\varepsilon u_0}{c_{01}} t, \quad c_l^*(x_*, t_*) = \frac{c_l}{c_{01}},$$

$$u_l^*(x_*, y_*, t_*) = \frac{u_l}{u_0}, \quad v_l^*(x_*, y_*, t_*) = \frac{v_l}{\varepsilon u_0},$$

$$p_l'^*(x_*, y_*, t_*) = \frac{\varepsilon c_{01}}{\eta_l u_0} p_l', \quad (31)$$

$$h_{1x}^*(x_*, y_*, t_*) = \frac{h_{1x}}{\varepsilon h_0^0}, \quad h_{1y}^*(x_*, y_*, t_*) = \frac{h_{1y}}{h_0^0}, \quad l = 1, 2,$$

где u_0 — характерная продольная скорость, а h_{1y}^0 — характерное возмущение вертикальной компоненты поля в слое феррожидкости.

После перехода к безразмерным переменным в уравнениях (29) и в граничных условиях (30) получаем (далее звездочки и штрихи опущены)

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathbf{R}_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\ = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \varepsilon S \frac{\partial h_{1y}}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \mathbf{R}_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \\ = -\frac{\partial p_1}{\partial y} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon^3 h_{1y}^0}{H_1^0} S h_{1x} \frac{\partial h_{1x}}{\partial y}, \end{aligned}$$

а при $y = c_1(x, t)$ имеем

$$p_1 - \frac{\eta_2}{\eta_1} p_2 = \varepsilon G_1 c_1 + 2\varepsilon^2 \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right] - \frac{\varepsilon^3}{Ca_1} \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + 2\varepsilon^2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right] - \varepsilon \chi S h_{1y},$$

$$\eta_1 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial v_1}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right] \right\} = \eta_2 \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial y} + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial v_2}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right] \right\}.$$

Здесь $R_1 = \frac{\rho_1 u_0 c_{01}}{\eta_1}$ — число Рейнольдса, $S = \frac{\mu_0 h_{1y} c_{01}}{\eta_1 u_0} M_0$ — характерное отношение магнитных сил к силам вязкости, $G_1 = \frac{c_{01}^2 g (\rho_1 - \rho_2)}{\eta_1 u_0}$ — гравитационное число, а $Ca_1 = \frac{\eta_1 u_0}{\alpha_1}$ — капиллярное число.

Далее рассматривается случай $R_1 = O(1)$, $S = O(\varepsilon^{-1})$, $G_1 = O(\varepsilon^{-1})$, $Ca_1 = O(\varepsilon^{-3})$. Пренебрегая величинами порядков ε и выше, получаем

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} (p_1 - \varepsilon S h_{1y}), \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0;$$

при $y = c_1(x, t)$

$$p_1 - \frac{\eta_2}{\eta_1} p_2 = \varepsilon G_1 c_1 - \frac{\varepsilon^3}{Ca} \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - \varepsilon \chi S h_{1y},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

В размерных переменных эти уравнения и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial}{\partial x} (p_1 - \mu_0 M_0 h_{1y}), \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0; \quad (32)$$

при $y = c_1(x, t)$

$$p_1 - p_2 = c_1 g (\rho_1 - \rho_2) - \alpha_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi M_0 h_{1y}; \quad (33)$$

$$\text{при } y = c_1(x, t) \quad \eta_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \eta_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}. \quad (34)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении возмущение давления не изменяется поперек слоя феррожидкости, а влияние горизонтальной компоненты возмущения магнитного поля $h_{1x}(x, y, t)$ на динамику жидкости пренебрежимо мало.

Считая выполненными условия

$$R_2 = \frac{\rho_2 u_0 c_{02}}{\eta_2} = O(1), \quad G_2 = \frac{c_{02}^2 \rho_2 g}{\eta_2 u_0} = O(\varepsilon^{-1}),$$

$$Ca_2 = \frac{\eta_2 u_0}{\alpha_2} = O(\varepsilon^{-3}),$$

нетрудно показать, что уравнения движения немагнитной жидкости (7), (8) и динамические условия на свободной поверхности (15), (16) после упрощения принимают вид

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial p_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial y} = 0 \quad (35)$$

при $y = c_2(x, t)$

$$p_2 = \rho_2 g (c_2 - c_{02}) - \alpha_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0. \quad (36)$$

Следует отметить, что при масштабах величин, выбранных для введения безразмерных переменных (31), все члены в каждом из уравнений (6), (11), (14) имеют одинаковый порядок.

Таким образом, на некотором интервале времени после включения магнитного поля неустойчивость Розенцвейга рассматриваемой тонкой двуслойной конфигурации описывается системой уравнений (6), (24), (32), (35) с граничными условиями (10), (11), (14), (17), (25)–(27), (33), (34), (36).

Эволюционные уравнения и постановка задачи

Формулировка гидродинамической задачи о развитии неустойчивости Розенцвейга в тонкой двуслойной конфигурации, базирующаяся на использовании уравнений (6), (32), (35) и граничных условий (10), (11), (14), (17), (33), (34), (36), допускает существенное упрощение. Из проекций уравнений движения на ось y (32), (35) и динамических условий на поверхностях раздела (33), (36) следует

$$p_1 = \rho_2 g (c_2 - c_{02}) - \alpha_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + c_{1g} (\rho_1 - \rho_2) - \alpha_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi M_0 h_{1y},$$

$$p_2 = \rho_2 g (c_2 - c_{02}) - \alpha_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}. \quad (37)$$

С учетом этих выражений нетрудно найти решения первых уравнений (32), (35), удовлетворяющие условию прилипания (17), условиям непрерывности горизонтальных компонент скоростей (10) и касательных напряжений (34) на поверхности раздела жидкостей и условию отсутствия касательных напряжений (36) на свободной поверхности,

$$u_1(x, y, t) = \frac{1}{2\eta_1} \left\{ b(x, t) [y^2 - 2c_1(c_{01} + y) - c_{01}^2] + 2(c_{01} + y)(c_1 - c_2) \frac{\partial p_2}{\partial x} \right\},$$

$$u_2(x, y, t) = \frac{1}{2\eta_1} \left[2(c_{01} + c_1)(c_1 - c_2) \frac{\partial p_2}{\partial x} - b(x, t) \right. \\ \left. \times (c_{01} + c_1)^2 \right] + \frac{1}{2\eta_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} [y^2 - 2c_2y - c_1(c_1 - 2c_2)], \quad (38)$$

где

$$b(x, t) = \frac{\partial p_1}{\partial x} - \mu_0 M_0 \frac{\partial h_{1y}}{\partial x} \equiv \frac{\partial p_2}{\partial x} \\ + g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial c_1}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial^3 c_1}{\partial x^3} - \mu M_0 \frac{\partial h_{1y}}{\partial x}.$$

Используя эти выражения, из уравнений неразрывности (6) находим распределения вертикальных компонент скоростей, удовлетворяющие условию непроницаемости на пластине (17) и условию непрерывности на поверхности раздела жидкостей (10)

$$v_1(x, y, t) = - \int_{-c_{01}}^y \frac{\partial u_1}{\partial x} dy, \quad v_2(x, y, t) \\ = - \int_{c_1(x,t)}^y \frac{\partial u_2}{\partial x} dy - \int_{-c_{01}}^{c_1(x,t)} \frac{\partial u_1}{\partial x} dy. \quad (39)$$

Легко видеть, что с учетом первого выражения (39) кинематическое условие на поверхности раздела жидкостей (11) приводится к виду

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-c_{01}}^{c_1(x,t)} u_1 dy = 0. \quad (40)$$

При подстановке второго выражения (39) в кинематическое условие на свободной поверхности немагнитной жидкости (14) имеем

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + u_2 \Big|_{y=c_2(x,t)} \frac{\partial c_2}{\partial x} = - \int_{-c_{01}}^{c_1(x,t)} \frac{\partial u_1}{\partial x} dy - \int_{c_1(x,t)}^{c_2(x,t)} \frac{\partial u_2}{\partial x} dy.$$

Поскольку

$$\int_{-c_{01}}^{c_1(x,t)} \frac{\partial u_1}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-c_{01}}^{c_1(x,t)} u_1 dy - u_1 \Big|_{y=c_1(x,t)} \frac{\partial c_1}{\partial x}, \\ u_1[x, c_1(x, t), t] = u_2[x, c_1(x, t), t], \\ \int_{c_1(x,t)}^{c_2(x,t)} \frac{\partial u_2}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{c_1(x,t)}^{c_2(x,t)} u_2 dy \\ - u_2 \Big|_{y=c_2(x,t)} \frac{\partial c_2}{\partial x} + u_2 \Big|_{y=c_1(x,t)} \frac{\partial c_1}{\partial x},$$

то в результате получаем

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-c_{01}}^{c_1(x,t)} u_1 dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{c_1(x,t)}^{c_2(x,t)} u_2 dy = 0. \quad (41)$$

Из уравнений (40), (41) следует

$$\frac{\partial}{\partial t} (c_2 - c_1) + \int_{c_1(x,t)}^{c_2(x,t)} u_2 dy = 0. \quad (42)$$

С учетом (37), (38) уравнения (40), (42) описывают в терминах $c_1(x, t)$, $c_2(x, t)$, $h_{1y}(x, t)$ изменение локальных толщин каждого из слоев с ростом времени.

Уравнения (40), (41) после вычисления интегралов записываются следующим образом:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} - \frac{1}{6\eta_1} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (c_{01} + c_1)^2 \left[2(c_{01} + c_1) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial c_1}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial^3 c_1}{\partial x^3} - \mu M_0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + (2c_{01} - c_1 + 3c_2) \left(\rho_2 g \frac{\partial c_2}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial^3 c_2}{\partial x^3} \right) \right] \right\} = 0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} - \frac{1}{6\eta_1} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (c_{01} + c_1)^2 (c_1 - 2c_{01} - 3c_2) \right. \\ \left. \times \left[g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial c_1}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial^3 c_1}{\partial x^3} - \mu M_0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right] \right. \\ \left. + \left\{ (c_1 - c_2) \left[3(c_{01} + c_1)(c_{01} - c_1 + 2c_2) \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\eta_1}{\eta_2} (c_1 - c_2)^2 \right] + (c_{01} + c_1)^2 (c_1 - 2c_{01} - 3c_2) \right\} \\ \left. \times \left(\rho_2 g \frac{\partial c_2}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial^3 c_2}{\partial x^3} \right) \right\} = 0. \quad (44)$$

Таким образом, на начальном после включения магнитного поля интервале времени эволюция форм плоских при $t \leq 0$ поверхности раздела жидкостей и свободной поверхности немагнитной жидкости описывается решением нелинейной задачи (24), (43), (44), (25)–(27). После нахождения функций $c_1(x, t)$, $c_2(x, t)$, $\varphi_j(x, y, t)$, $j = 1, 2, 3$ возмущения давлений и распределения скоростей вычисляются с помощью выражений (37)–(39).

Ограничимся исследованием линейной стадии развития неустойчивости. Полагая $c_2(x, t) = c_{02} + \xi(x, t)$, $|\xi|/c_{02} \ll 1$, $\xi/c_1 = O(1)$, линеаризуем

уравнения (43), (44)

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial t} - \frac{c_{01}^2}{6\eta_1} \left\{ 2c_{01} \left[g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - \alpha_1 \frac{\partial^4 c_1}{\partial x^4} \right. \right. \\ \left. \left. - \mu M_0 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y} \right] + (2c_{01} + 3c_{02}) \right. \\ \left. \times \left(\rho_2 g \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} \right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{1}{6\eta_1} \left\{ (2c_{01}^3 + 3c_{01}^2 c_{02}) \left[g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_1 \frac{\partial^4 c_1}{\partial x^4} - \mu M_0 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y} \right] + 2 \left(c_{01}^3 + 3c_{01}^2 c_{02} \right. \right. \\ \left. \left. + 3c_{01} c_{02}^2 + \frac{\eta_1}{\eta_2} c_{02}^3 \right) \left(\rho_2 g \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Граничные условия (25) ввиду малости $c_1(x, t)$ перенесем на невозмущенную поверхность раздела жидкостей

$$\text{при } y = 0 \quad \varphi_1 - \varphi_2 = M_0 c_1, \quad \mu_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}. \quad (47)$$

Далее рассматриваются уравнения (24), (45), (46) с граничными условиями (26), (27), (47).

Дисперсионное уравнение и его анализ

Возникшие в начальный момент возмущения $c_1(x, 0)$, $\xi(x, t)$ плоских поверхностей раздела, достаточно быстро убывающие при $x \rightarrow \pm\infty$, можно представить в виде интегралов Фурье. Обозначим через $Z_1(k)$, $Z_2(k)$, $F_j(k, y)$, $j = 1, 2, 3$ фурье-компоненты соответственно функцией $c_1(x, 0)$, $\xi(x, 0)$ и функций $\varphi_j(x, y, 0)$, связанных в начальный момент времени соответствующими условиями согласования с функцией $\xi(x, 0)$. Поскольку коэффициенты линеаризованных эволюционных уравнений (45), (46) и уравнений магнитостатики (24) не зависят от времени, то решения этих уравнений $c_1(x, t)$, $\xi(x, t)$, $\varphi_j(x, y, t)$ можно представить в виде линейных суперпозиций нормальных мод

$$\begin{aligned} Z_l(k) \exp[i(kx - \omega t)], \quad F_j(y, k) \exp[i(kx - \omega t)], \\ l = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь i — мнимая единица, k — волновой вектор (действительный параметр), а функция $\omega(k)$ подлежит нахождению.

После подстановки выражений (48) в уравнения и в граничные условия магнитостатики (24), (26), (27), (47) имеем

$$\frac{d^2 F_1}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2 F_j}{dy^2} - k^2 F_j = 0, \quad j = 2, 3,$$

$$\text{при } y = -c_{01} \quad F_1 = F_3, \quad \mu_r \frac{dF_1}{dy} = \frac{dF_3}{dy},$$

$$\text{при } y = 0 \quad F_1 = F_2 = M_0 Z_1, \quad \mu_r \frac{dF_1}{dy} = \frac{dF_2}{dy},$$

$$\text{при } y \rightarrow \infty \quad \frac{dF_2}{dy} \rightarrow 0; \quad \text{при } y \rightarrow -\infty \quad \frac{dF_3}{dy} \rightarrow 0.$$

С точностью до малых порядка $k c_{01}$ решение этой задачи записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2\mu_r} M_0 Z_1 [k(c_{01} + y) + \mu_r], \\ F_2 &= -\frac{1}{2} M_0 Z_1 \exp(-ky), \\ F_3 &= \frac{1}{2} M_0 Z_1 \exp[k(c_{01} + y)]. \end{aligned} \quad (49)$$

Принимая во внимание первое выражение (49) и подставляя (48) в уравнения (45), (46), получаем

$$\begin{aligned} \left[-i\omega + \frac{c_{01}^3}{3\eta_1} k^2 \psi_1(k) \right] Z_1 \\ + \frac{c_{01}^2}{6\eta_1} k^2 (2c_{01} + 3c_{02}) \psi_2(k) Z_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{01}^2}{6\eta_1} k^2 (2c_{01} + 3c_{02}) \psi_1(k) Z_1 + \left[-i\omega + \frac{k^2}{3\eta_1} \right. \\ \left. \times \left(c_{01}^3 + 3c_{01}^2 c_{02} + 3c_{01} c_{02}^2 + \frac{\eta_1}{\eta_2} c_{02}^3 \right) \psi_2(k) \right] Z_2 = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(k) &= g(\rho_1 - \rho_2) - \frac{\mu_0}{2} M_0^2 k + \alpha_1 k^2, \\ \psi_2(k) &= \rho_2 g + \alpha_2 k^2. \end{aligned}$$

Дисперсионное уравнение — условие существования нетривиального решения выписанной системы однородных алгебраических уравнений — имеет вид

$$\begin{vmatrix} -i\omega + \frac{c_{01}^3}{3\eta_1} k^2 \psi_1(k) & \frac{s_1 c_{01}^3}{3\eta_1} k^2 \psi_2(k) \\ \frac{s_1 c_{01}^3}{3\eta_1} k^2 \psi_1(k) & -i\omega + \frac{s_2 c_{01}^3}{3\eta_1} k^2 \psi_2(k) \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 + \frac{3}{2} \gamma, \quad s_2 = 1 + 3\gamma + 3\gamma^2 + \beta\gamma^3, \\ \beta &= \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad \gamma = \frac{c_{02}}{c_{01}}. \end{aligned}$$

С целью приведения этого выражения к безразмерному виду умножим каждую из строк определителя на $3\alpha_1 \eta_1 c_{01}^{-3} g^{-2} (\rho_1 - \rho_2)^{-2}$. В результате получаем

$$\begin{vmatrix} -3i\Omega + \kappa^2 f_1(\kappa) & s_1 \kappa^2 f_2(\kappa) \\ s_1 \kappa^2 f_1(\kappa) & -3i\Omega + s_2 \kappa^2 f_2(\kappa) \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\Omega = \frac{\alpha_1 \eta_1 \omega}{c_{01}^3 g^2 (\rho_1 - \rho_2)^2},$$

$$f_1(\kappa) = 1 - 2q^2\kappa + \kappa^2, \quad f_2(\kappa) = r + \sigma\kappa^2,$$

$$\kappa = k\sqrt{\frac{\alpha_1}{g(\rho_1 - \rho_2)}}, \quad q = \frac{1}{2}M_0\sqrt{\frac{\mu_0^2}{\alpha_1 g(\rho_1 - \rho_2)}},$$

$$r = \frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2}, \quad \sigma = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Таким образом, безразмерное дисперсионное уравнение содержит пять безразмерных параметров: $\beta, \gamma, q, r, \sigma$ и имеет вид

$$9\Omega^2 + 3i\kappa^2(f_1 + s_2f_2)\Omega + \kappa^4(s_1^2 - s_2)f_1f_2 = 0.$$

Корни дисперсионного уравнения записываются следующим образом:

$$\Omega_{1,2} = \frac{i}{6}\kappa^2 \left[-(f_1 + s_2f_2) \pm \sqrt{(f_1 + s_2f_2)^2 + 4(s_1^2 - s_2)f_1f_2} \right], \quad (50)$$

причем

$$s_1^2 - s_2 = -\frac{9}{4}\gamma - \frac{3}{4}\gamma^2 - \beta\gamma^3 < 0.$$

Функция $\Omega_1(\kappa)$ фигурирует в интегральном представлении возмущения поверхности раздела жидкостей, а $\Omega_2(\kappa)$ — в представлении возмущения свободной поверхности немагнитной жидкости.

Легко видеть, что в отсутствие магнитного поля (случай $q = 0$) корни Ω_1, Ω_2 являются чисто мнимыми, причем $\text{Im } \Omega < \text{Im } \Omega_1 < 0$. Таким образом, в отсутствие поля созданное в некоторый момент времени возмущение свободной поверхности затухает быстрее, чем возникшее при этом возмущение поверхности раздела жидкостей.

Обозначим $\Omega_i = \text{Im } \Omega_1$. Из рис. 2, на котором представлена дисперсионная зависимость $\Omega_i(\kappa)$ при фиксированных β, γ, δ, r и различных q , видно, что при любом фиксированном κ , где $0 \leq \kappa < 1$, с ростом q функция $\Omega_i(\kappa)$ возрастает, но при этом ее значения лежат в нижней полуплоскости, т.е., несмотря на увеличение q , моды с безразмерными волновыми числами $0 \leq \kappa < 1$ являются устойчивыми.

Безразмерная критическая намагниченность q_c исходного плоского слоя феррожидкости и безразмерное волновое число κ_c , определяющие порог устойчивости, находятся из уравнений

$$\Omega_i(\kappa_c, q_c) = 0, \quad \frac{d\Omega_i(\kappa_c, q_c)}{d\kappa} = 0.$$

Обращаясь к (50), нетрудно показать, что с учетом первого из выписанных уравнений второе уравнение приводится к виду

$$\frac{1}{3\kappa_c^2} \frac{(s_1^2 - s_2) \frac{d}{d\kappa}(\kappa^4 f_1 f_2)}{\sqrt{(f_1 + s_2 f_2)^2 + 4(s_1^2 - s_2) f_1 f_2}} \Big|_{\substack{\kappa=\kappa_c \\ q=q_c}} = 0.$$

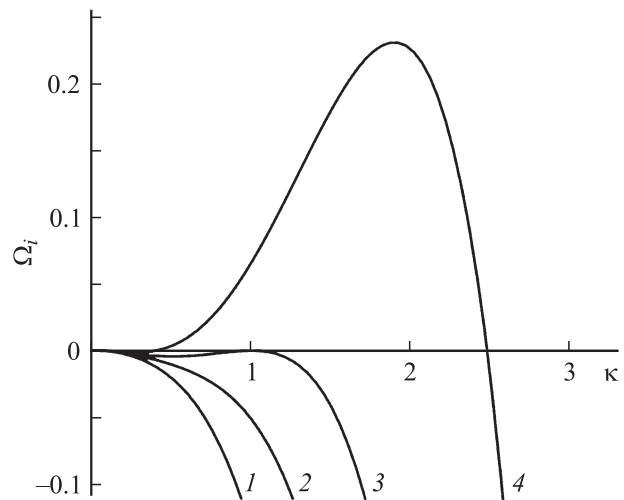


Рис. 2. Дисперсионные зависимости при $\beta = \gamma = \sigma = r = 1$ и различных q : 1 — 0, 2 — 0.8, 3 — 1, 4 — 1.2.

Легко видеть, что условие $\Omega_i(\kappa_c, q_c) = 0$ выполняется при $f_1(\kappa_c, q_c) = 0$. В результате для вычисления κ_c, q_c получаем систему уравнений

$$\kappa_c^2 - 2q_c^2\kappa_c + 1 = 0,$$

$$\sigma(4\kappa_c^4 - 7q_c^2\kappa_c^3) + 3(\sigma + r)\kappa_c^2 + r(2 - 5q_c^2\kappa_c) = 0.$$

Отсюда находим $\kappa_c = 1, q_c = 1$ или в размерном виде

$$\kappa_c = \sqrt{\frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\alpha_1}}, \quad M_c = 2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\mu_0^2} g(\rho_1 - \rho_2)}.$$

Таким образом, можем записать $q = M_0/M_c$.

В полной аналогии со случаями рэлей-тейлоровской неустойчивости безграничных как невязких, так и вязких жидкостей с учетом эффекта поверхностного натяжения на горизонтальной поверхности их раздела [6] в рассматриваемом случае неустойчивости Розенцвейга слоя вязкой феррожидкости, покрытого более легкой вязкой немагнитной жидкостью, пороговое волновое число κ_c совпадает с результатом, полученным для безграничных невязких феррожидкости и немагнитной жидкости [7]. При этом в отличие от случая безграничных жидкостей критическая намагниченность M_c не зависит от относительной магнитной проницаемости феррожидкости и оказывается больше величины, приведенной в [7].

Обращаясь к (50), легко видеть, что при $f_1(\kappa, q) = 0$ выполняется условие $\Omega_i = 0$, т.е. уравнение нейтральной кривой не зависит от параметров β, γ, σ, r и при $q \geq 1$ записывается с использованием двузначной функции

$$\kappa = q^2 \pm \sqrt{q^4 - 1}. \quad (51)$$

График этой функции представлен на рис. 3. Естественно, что с ростом намагниченности исходного плоского слоя M_0 диапазон неустойчивых мод (затемненная на рис. 3 область) увеличивается.

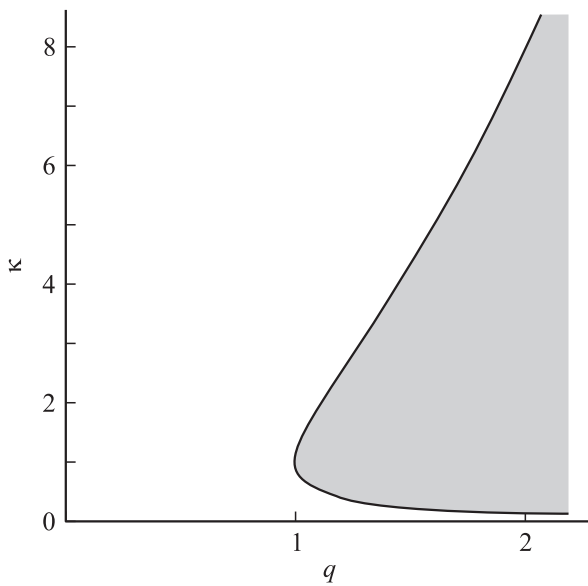


Рис. 3. Нейтральная кривая $\kappa = q^2 \pm \sqrt{q^4 - 1}$.

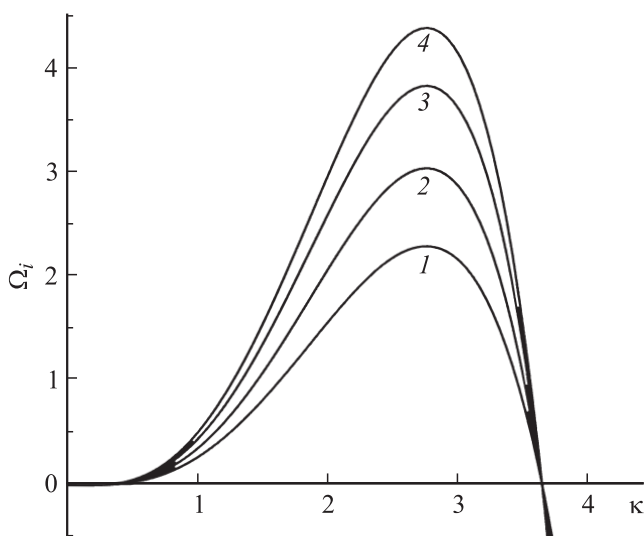


Рис. 4. Дисперсионные зависимости при $\sigma = r = 1$, $\gamma = 2$, $q = 1.4$ и различных β : 1 — 1, 2 — 2, 3 — 4, 4 — 7.

Влияние параметров σ, r на величину $[\Omega_i(\kappa_m)]^{-1}$ проявляется значительно слабее.

Из рис. 4, 5 видно, что параметры β, γ весьма слабо влияют на величину κ_m , т.е. на безразмерную длину волны $\lambda_m/\lambda_c = \kappa_m^{-1}$ наиболее быстро растущей моды; здесь $\lambda_m = 2\pi\kappa_m^{-1}$, $\lambda_c = 2\pi\kappa_c^{-1}$. Эта величина определяется в основном уровнем намагниченности исходного плоского слоя феррожидкости. Представленный на рис. 6 график показывает, что с ростом q величина λ_m/λ_c уменьшается.

В рассмотренном приближении основной вклад в интегральном представлении возмущения толщины плоского слоя феррожидкости создают моды с волновыми векторами, лежащими в малой окрестности точки κ_m .

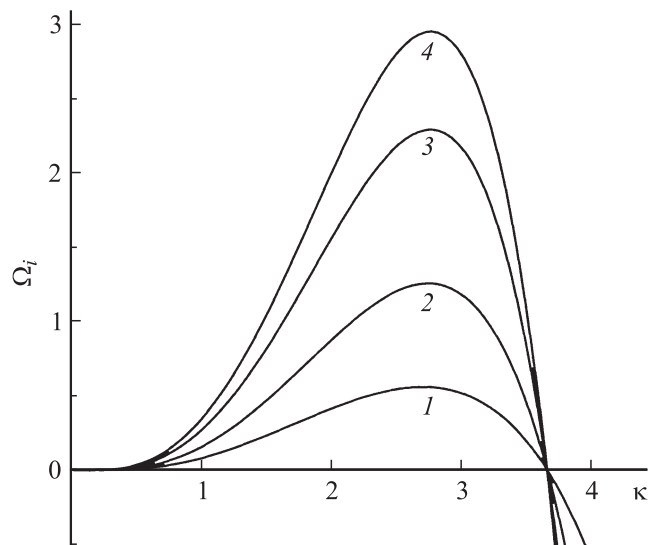


Рис. 5. Дисперсионные зависимости при $\beta = \sigma = r = 1$ и $q = 1.4$ и различных γ : 1 — 0.5, 2 — 1, 3 — 2, 4 — 3.

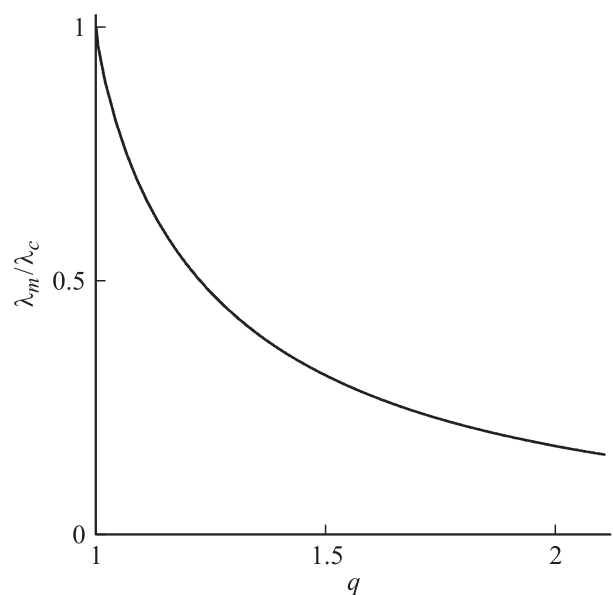


Рис. 6. Изменение длины волны наиболее быстро растущей моды с ростом намагниченности нижнего слоя при $\beta = \sigma = r = 1$, $\gamma = 2$.

В рамках линейной теории, как следует из (50), входящие в интегральное представление возмущения свободной поверхности моды, у которых κ и $q \geq 1$ и связаны равенством (51), с ростом времени затухают при любых допустимых значениях β, γ, σ, r .

Представленные на рис. 4, 5 графики показывают, что параметры β, γ оказывают заметное влияние на характерное время $[\Omega_i(\kappa_m)]^{-1}$ развития наиболее быстро растущей моды, безразмерное волновое число которой κ_m (реализующее максимум функции $\Omega_i(\kappa)$) находится из уравнения

$$\left. \frac{d\Omega_i}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_m} = 0, \quad \text{где} \quad \kappa_m = k_m \sqrt{\frac{\alpha_1}{g(\rho_1 - \rho_2)}}.$$

Ввиду этого при асимптотическом анализе определяющих уравнений в качестве малого параметра ε использовалась величина $k_m c_{01}/(2\pi)$. Поскольку в не слишком сильных магнитных полях $\lambda_m/\lambda_c = O(1)$, то в качестве одного из условий применимости полученной выше упрощенной системы уравнений допустимо принять условие $k_c c_{01} \ll 2\pi$.

Заключение

Изучено плоское движение при развитии неустойчивости Розенцвейга в тонкой двуслойной конфигурации. Нижний слой образован линейно намагничивающейся феррожидкостью, покрывающей горизонтальную ненамагничивающуюся пластину, а верхний — более легкой немагнитной жидкостью, граничащей с газом. Давление в газе постоянно. В рассмотренном случае толщины слоев, плотности жидкостей ρ_1, ρ_2 , их коэффициенты динамической вязкости η_1, η_2 , а также коэффициенты поверхностного натяжения α_1, α_2 между двумя жидкостями и между немагнитной жидкостью и газом одинаковы по порядку величины; индексами 1, 2 отмечены величины, относящиеся соответственно к феррожидкости и к немагнитной жидкости.

Движение вызывается объемными и поверхностными магнитными силами, возникающими при включении в момент времени $t = 0$ однородного вертикального достаточно сильного магнитного поля, намагничивающего феррожидкость. При $t < 0$ рассматриваемые несмешивающиеся жидкости находятся в состоянии гидростатического равновесия с плоскими границами.

Проведен асимптотический анализ уравнений и граничных условий гидродинамики. Малым параметром $\varepsilon \ll 1$, используемым при оценках, является отношение характерной толщины слоев к длине волны λ_m наиболее быстро растущей моды неустойчивости Розенцвейга в слое феррожидкости.

Изменение формы верхней границы этого слоя вызывает возмущение $h_1 = (h_{1x}, h_{1y})$ приложенного однородного вертикального магнитного поля. Из уравнений магнитостатики следует, что горизонтальная компонента возмущения поля h_{1x} , а также приращение Δh_{1y} , испытываемое возмущением вертикальной компоненты h_{1y} поперек слоя феррожидкости, малы: $h_{1x}/h_{1y} = O(\varepsilon)$, $\Delta h_{1y}/h_{1y} = O(\varepsilon^2)$. Ввиду этого существенно упрощается задача магнитостатики о расчете поля в неограниченной кусочно-постоянной среде, содержащей тонкий по сравнению с λ_m слой феррожидкости с изменяющейся формой верхней границы.

Показано, что влияние h_{1x} на динамику феррожидкости пренебрежимо мало.

Формулировка краевой задачи о движении двуслойной жидкости, записанная в безразмерных переменных, содержит следующие безразмерные параметры: числа Рейнольдса R_l , капиллярные числа Ca_l , гравитационные числа G_l , $l = 1, 2$, отношение характерной толщины объемных магнитных сил к силам вязкости S , отношение

характерной толщины верхнего слоя к толщине нижнего слоя γ , а также $\beta = \eta_1/\eta_2$, $\sigma = \alpha_2/\alpha_1$, $r = \rho_2/(\rho_1 - \rho_2)$.

Рассмотрен случай $R_l = O(1)$, $G_l = O(\varepsilon^{-1})$, $S = O(\varepsilon^{-1})$, $Ca_l = O(\varepsilon^{-3})$. С использованием уравнений и граничных условий гидродинамики, учитывающих лишь члены лидирующего порядка, выведены нелинейные уравнения, описывающие эволюцию локальных толщин каждого из слоев на начальном после включения поля интервале времени, когда характерный угол наклона поверхности раздела жидкостей является величиной порядка ε .

В линейной постановке на базе эволюционных уравнений и задачи магнитостатики исследовано влияние верхнего слоя на развитие неустойчивости Розенцвейга в нижнем слое. Получено дисперсионное уравнение и проведен его анализ. Безразмерная форма записи дисперсионного уравнения наряду с β, γ, σ, r содержит также параметр q — безразмерную намагниченность исходного плоского слоя феррожидкости. Выведенное уравнение имеет два корня, описывающих дисперсионные зависимости возмущений поверхности раздела жидкостей и свободной поверхности.

Вычислена величина критической намагниченности M_c тонкого плоского слоя феррожидкости, при превышении которой возникают неустойчивость Розенцвейга и переход каждого из сплошных жидких слоев к стационарному состоянию в виде капель. Найденное значение M_c оказывается больше критической намагниченности, полученной в задаче о вызываемой полем неустойчивости плоской поверхности раздела невязких феррожидкости и более легкой немагнитной жидкости, занимающих соответственно нижнее и верхнее полупространства [7]. Кроме того, в отличие от [7] в рассмотренном случае критическая намагниченность не зависит от величины относительной магнитной проницаемости феррожидкости. При этом, как и в случае рэлей-тейлоровской неустойчивости с учетом капиллярных сил [6], силы вязкости не влияют на величину порогового волнового числа, найденную в [7].

В плоскости параметров безразмерная намагниченность — безразмерное волновое число построена область неустойчивости. С ростом намагниченности диапазон неустойчивых мод, естественно, увеличивается. Найденное уравнение нейтральной кривой, представляющей границу области неустойчивости, не содержит параметров β, γ, σ, r .

Проведенный анализ показал, что при $M_0 > M_c$ длина волны наиболее быстро растущей моды λ_m определяется величиной намагниченности M_0 исходного плоского слоя и весьма слабо зависит от β, γ, σ, r . С ростом M_0 происходит увеличение λ_m .

Параметры β, γ, σ, r оказывают влияние на характерное время развития неустойчивых мод.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11–01–0051).

Список литературы

- [1] *Abou B., Wesfreid J.-E., Roux S.* // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 416. P. 217–237.
- [2] *Chen Ch.-Yao, Cheng Z.-Y.* // Phys. Fluids. 2008. Vol. 20. N 5. P. 054105/1–0540105/8.
- [3] *Диканский Ю.И., Закирян А.Р., Мкртчян Л.С.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 9. С. 38–43.
- [4] *Zahn M.* // J. Nanopart. Res. 2001. Vol. 3. P. 73–78.
- [5] *Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С.* Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
- [6] *Bellman R., Rennington R.H.* // Quart. Appl. Math. 1954. Vol. 12. P. 151–162.
- [7] *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.