Журнал технической физики, 2012, том 82, вып. 10

01;03

Фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы

© Н.В. Малай, А.В. Лиманская, Е.Р. Щукин, А.А. Стукалов

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
308007 Белгород, Россия
e-mail: malay@bsuedu.ru, limanskayaanna@mail.ru

(Поступило в Редакцию 31 мая 2011 г. В окончательной редакции 6 декабря 2011 г.)

В приближении Стокса проведено теоретическое описание стационарного движения крупной твердой аэрозольной частицы сферической формы, на которую падает мощное электромагнитное излучение, в газе. При рассмотрении движения предполагалось, что средняя температура поверхности частицы может значительно отличаться от температуры окружающей ее газообразной среды. В процессе решения газодинамических уравнений получены аналитические выражения для силы и скорости фотофореза с учетом зависимостей плотности, вязкости газообразной среды и теплопроводности от температуры.

Введение

Явление фотофореза в газе заключается в движении аэрозольных частиц в поле электромагнитного излучения под действием радиометрической силы. Фотофорез может играть существенную роль в атмосферных процессах [1–3]; очистке промышленных газов от аэрозольных частиц, создании установок, предназначенных для селективного разделения частиц по размерам, и т.д. Механизм фотофореза можно кратко описать следующим образом. При взаимодействии электромагнитного излучения с частицей внутри нее происходит выделение тепловой энергии с некоторой объемной плотностью q_p, которая неоднородно нагревает частицу. Молекулы газа, окружающие частицу, после соударения с ее поверхностью отражаются от нагретой стороны частицы с большей скоростью, чем от холодной. В результате частица приобретает нескомпенсированный импульс, направленный от горячей стороны частицы к холодной. В зависимости от размеров и оптических свойств материала частицы более горячей сможет оказаться как освещенная, так и теневая сторона частицы. Поэтому имеет место как положительный (движение частицы в направлении излучения), так и отрицательный фотофорез. Кроме того, если поток излучения неоднороден по сечению, то может возникнуть поперечное относительно направления распространения электромагнитного излучения движение частицы в газе [4].

В опубликованных до настоящего времени работах по теории фотофореза это явление изучалось при малых относительных перепадах температуры [4–7], т.е. когда выполняется неравенство $(T_{pS} - T_{g\infty})/T_{g\infty} \ll 1$, где T_{pS} — средняя температура поверхности частицы. $T_{g\infty}$ — температура газообразной среды вдали от нее. При значительных относительных перепадах температуры, т.е. когда $(T_{pS} - T_{g\infty})/T_{g\infty} \approx 0(1)$, это явление изучено недостаточно. Индексы „g“ и „p“ здесь и далее относятся к газу и частице соответственно, индексом „S“ обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы, индексом „∞“ — физические величины, характеризующие газообразную среду в невозмущенном потоке.

Если средняя температура поверхности частицы существенно по величине отличается от температуры окружающей газообразной среды, то здесь мы сталкиваемся с серьезной проблемой. При решении уравнений газовой динамики необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры, т.е. система газодинамических уравнений ставится существенно нелинейной. В связи с этим в литературе имеется мало работ, посвященных исследованию движения частиц при больших перепадах температуры [8–10]. Следует отметить, что решения дифференциальных уравнений, описывающих поля скорости и давления в работе [9], искались в виде степенных рядов методом понижения порядка, что привело к довольно громоздким окончательным выражениям и сложным в практическом применении. В настоящей работе решения уравнений газовой динамики находятся непосредственно в виде обобщенных степенных рядов, что позволяет представить выражения для силы и скорости фотофореза в компактной форме и существенно упростить численные расчеты для практических приложений.

Постановка задачи

Рассмотрим твердую неоднородную нагретую аэрозольную частицу сферической формы радиуса R, взвешенную в газе с температурой T_g, плотностью ρ_g, теплопроводностью λ_g и вязкостью μ_g. Под нагретой частицей понимают частицу, средняя температура поверхности которой существенно отличается от температуры газообразной среды вдали от нее. В этом случае, как уже отмечалось выше, коэффициенты молекулярного переноса нельзя считать постоянными величинами. В работе при описании свойств газообразной среды (вязкости, теплопроводности) рассматривается степенной вид их зависимости от температуры [11]:

$$\mu_g = \mu_{g\infty}\left(\frac{T_g}{T_{g\infty}}\right)^{\beta},$$

$$\lambda_g = \lambda_{g\infty}\left(\frac{T_g}{T_{g\infty}}\right)^{\alpha}, \quad \lambda_p = \lambda_{p0}\left(\frac{T_g}{T_{g\infty}}\right)^{\nu},$$

где

$$\mu_{g\infty} = \mu_g(T_{g\infty}), \quad \lambda_{g\infty} = \lambda_g(T_{g\infty}), \quad \lambda_{p0} = \lambda_p(T_{g\infty}),$$

$$0.5 \le \alpha, \beta \le 1, \qquad -1 \le \gamma \le 1.$$

В частности, для воздуха $\alpha = 0.81$, $\beta = 0.72$; для азота $\alpha = 0.77$, $\beta = 0.69$ (диапазон температур от 300 до 900°K); для частицы меди до температуры плавления $\gamma = -0.1$, при этом $T_{g\infty} = 273$. Относительная погрешность приведенных формул (сравнение с экспериментальными данными) не превышает 5% [11].

Неоднородный нагрев частицы обусловлен поглощением электромагнитного излучения. Степень неоднородности зависит от оптических констант материала частицы и параметра дифракции [12]. Газ, взаимодействуя с неоднородно нагретой поверхностью, начинает двигаться вдоль поверхности в направлении возрастания температуры. Это явление называется тепловым скольжением газа. Тепловое скольжение вызывает появление фотофоретической силы и силы вязкого сопротивления среды. Когда величина фотофоретической силы становится равной по величине силе вязкого сопротивления среды, частица начинает двигаться равномерно. Скорость равномерного движения частицы называют фотофоретической скоростью ($\mathbf{U}_{\text{ph}}$).

Движение частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса, частица считается однородной по своему составу и крупной [13]. Относительно последнего отметим, что для классификации аэрозольных частиц по размерам применяют критерий Кнудсена $\text{Kn} = \lambda/R$, где λ — средняя длина свободного пробега молекул газообразной смеси. Частицы называются крупными, если $\text{Kn} \le 0.01$, умеренно крупными при $0.01 \le \text{Kn} \le 0.3$ и мелкими при $\text{Kn} \gg 1$. Задача решается гидродинамическим методом, т. е. решаются уравнения гидродинамики с соответствующими граничными условиями.

Движение частицы удобно описывать в сферической системе координат r, θ, φ, связанной с центром масс аэрозольной частицы. Ось OZ направлена в сторону распространения однородного потока излучения интенсивностью I_0. В этом случае объемная плотность внутренних источников тепла имеет стандартный вид [12]

$$q_p(\mathbf{r}) = 2\pi\chi k_0 I_0 B(\mathbf{r}), \tag{1}$$

где

$$B(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|E(r,\theta,\varphi)|^2}{E_0^2}\,d\varphi = B\left(r,\theta,\varphi=\frac{\pi}{4}\right)$$

— безразмерная функция источников электромагнитной энергии в случае неполяризованного падающего излучения; $E(r,\theta,\varphi)$ — локальная напряженность электрического поля внутри частицы; E_0 — амплитуда напряженности поля в падающей волне; $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ — волновое число; λ_0 — длина волны; $m(\lambda_0) = n + i\chi$ — комплексный показатель преломления вещества частицы для данной волны излучения. Обычно для вычисления безразмерной функции источников $B(\mathbf{r})$ пользуются решением задачи Ми для внутреннего поля (например, [4]). Поскольку система отсчета связана с центром движущейся аэрозольной частицы, то задача сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком, скорость газа на бесконечности равна с обратным знаком скорости фотофореза, т. е. $\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}_{\text{ph}}$.

В рамках сформулированных допущений уравнения гидродинамики, теплопроводности и граничные условия (представленные в сферической системе координат) имеют вид [15,16]

$$\frac{\partial}{\partial x_i}P_g = \frac{\partial}{\partial x_j} - \left\{\mu_g\left[\frac{\partial U_i^g}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^g}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_i^j\,\frac{\partial U_k^g}{\partial x_k}\right]\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_g U_k^g) = 0, \tag{2}$$

$$\text{div}(\lambda_g \nabla T_g) = 0, \qquad n_g = \frac{P_g}{kT_g}, \tag{3}$$

$$\text{div}(\lambda_p \nabla T_p) = -q_p. \tag{4}$$

где x_k — декартовые координаты, q_p — плотность тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы, за счет которых и происходит ее нагрев. $\rho_g = n_g m_g$, ρ_g, m_g, n_g — плотность, масса и концентрация молекул газообразной среды, k — постоянная Больцмана,

$$r = R, \quad T_g = T_p, \quad \lambda_g\frac{\partial T_g}{\partial r} = \lambda_p\frac{\partial T_p}{\partial r} + \sigma_0\sigma_1(T_p^4 - T_{g\infty}^4),$$

$$U_r^g = 0, \quad U_0^g = K_{\text{IS}}\frac{\nu_g}{RT_g}\,\frac{\partial T_g}{\partial \theta}, \tag{5}$$

$$r \to \infty, \qquad U_r^g = U_\infty\cos\theta, \quad U_\theta^g = -U_\infty\sin\theta,$$

$$P_g = P_{g\infty}, \tag{6}$$

$$r \to 0, \qquad T_p \ne \infty. \tag{7}$$

Здесь U_r^g и U_0^g — компоненты массовой скорости газа $\mathbf{U}_g$: K_{IS} — коэффициент теплового скольжения, выражение для которого находится методами кинетической теории газов. При коэффициентах аккомодации тангенциального импульса α_τ и энергии α_E, равных единице, газокинетический коэффициент $K_{\text{IS}} = 1.152$ (например, [17]): σ_0 — постоянная Стефана–Больцмана, σ_1 — интегральная степень черноты [18].

В граничных условиях (5) на поверхности аэрозольной частицы учтено: равенство температур, непрерывность потоков тепла, условие непроницаемости для нормальной и тепловое скольжение для касательной компонент массовой скорости. На большом расстоянии от частицы ($r \to \infty$) справедливы граничные условия (6), а конечность физических величин, характеризующих частицу при $r \to 0$, учтено в (7).

Обезразмерим уравнения (2)–(4) и граничные условия (5)–(7), введя безразмерные координату, скорость и температуру следующим образом: $y_k = x_k/R$, $t = T/T_{g\infty}$, $\mathbf{V}_g = \mathbf{U}_g/U_\infty$, $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$.

При малых числах Рейнольдса набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решение уравнений гидродинамики следует искать в виде

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{V}_g^{(1)} + \varepsilon \mathbf{V}_g^{(2)} + \ldots, \qquad P_g = P_g^{(0)} + \varepsilon P_g^{(1)} + \ldots$$

$$\big(\varepsilon = Re_\infty = (\rho_{g\infty} U_\infty R)/\mu_{g\infty} \ll 1\big). \tag{8}$$

Вид граничных условий указывает на то, что выражения для компонент массовой скорости V_r^g и V_θ^g ищутся в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [16]. Известно [16], что для определения результирующей силы, действующей на частицу, достаточно определить первые члены этих разложений.

Поля температур вне и внутри частицы

При нахождении фотофоретической силы и скорости ограничимся поправками первого порядка малости. Чтобы их найти, нужно знать поля температур вне и внутри частицы. Для этого необходимо решить уравнения (3), (4). Решая эти уравнения методом разделения переменных, получаем следующие выражения для температур t_g и t_p:

$$t_g(y,\theta) = t_{g0}(y) + \varepsilon t_{g1}(y,\theta), \quad t_p(y,\theta) = t_{p0}(y) + \varepsilon t_{p1}(y,\theta), \tag{9}$$

где

$$t_{g0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{1/(1+\alpha)},$$

$$t_{p0}(y) = \left(B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y}\int_1^y \psi_0 dy + \int_1^y \frac{\psi_0}{y} dy\right)^{1/(1+\gamma)},$$

$$t_{g1}(y,\theta) = \frac{\cos\theta}{t_{g0}^{\alpha}} \frac{\Gamma}{y^2},$$

$$t_{p1}(y,\theta) = \frac{\cos\theta}{t_{p0}^{\gamma}} \left[By + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{3}\left(y\int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2}\int_1^y \psi_1 y dy\right)\right],$$

$$H_0 = \frac{R^2(1+\gamma)}{3\lambda_{p0}T_{g\infty}} J_0, \quad H_1 = \frac{R^2}{3\lambda_{p0}T_{g\infty}} J,$$

$$J_0 = \frac{1}{V}\int_V q_p dV, \quad J = \frac{1}{V}\int_V q_p z dV, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где $\int_V q_p z dV$ — дипольный момент плотности тепловых источников [1,4,6,7,9,12,14];

$$\psi_0 = -\frac{R^2(1+\gamma)}{2\lambda_{p0}T_{g\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_p(r,\theta) dx,$$

$$\psi_1 = -\frac{3R^2}{2\lambda_{p0}T_{g\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_p(r,\theta) x dx,$$

$$x = \cos\theta, \qquad z = r\cos\theta,$$

где $y = x/R$ — безразмерная радиальная координата.

Постоянные интегрирования, входящие в выражения для полей температур, определяются из граничных условий на поверхности частицы. В частности, для коэффициента Γ имеем

$$\frac{\Gamma}{t_{gS}^{\alpha}} = \frac{R}{\lambda_{pS}T_{g\infty}\delta} J. \tag{10}$$

Здесь $\delta = 1 + 2\frac{\lambda_{gS}}{\lambda_{pS}} + 4\frac{\sigma_0\sigma_1 R}{\lambda_{pS}} T_{g\infty}^3 t_{pS}^3$, $\lambda_{pS} = \lambda_{p0} t_{pS}^{\gamma}$, $\lambda_{gS} = \lambda_{g\infty} t_{gS}^{\alpha}$, $t_{pS} = t_{p0}(y=1)$, $t_{gS} = t_{g0}(y=1)$.

Среднее значение температуры поверхности частицы T_{pS} определяется из решения следующей системы уравнений, в которой $T_{pS} = t_{pS}T_{g\infty}$, $T_{gS} = t_{gS}T_{g\infty}$, $l^{(S)} = \Gamma_0/(1+\Gamma_0)$:

$$\begin{cases} T_{pS} = T_{gS} \\ \dfrac{l^{(S)}}{1+\alpha} t_{gS} = \dfrac{R^2}{2\lambda_{gS}T_{g\infty}} J_0 - \\ \qquad - \sigma_0\sigma_1 \dfrac{RT_{g\infty}^3}{\lambda_{gS}} \left[\left(\dfrac{T_{pS}}{T_{g\infty}}\right)^4 - 1\right]. \end{cases} \tag{11}$$

При выполнении неравенства $\lambda_g \ll \lambda_p$ (имеет место для большинства газов), коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа, тогда в коэффициенте динамической вязкости можно пренебречь зависимостью по углу θ в системе „частица–газ“ (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры). С учетом этого можно считать, что вязкость связана только с температурой $t_{g0}(r)$, т.е. $\mu_g(t_g(r,\theta)) \approx \mu_g(t_{g0}(r))$. Это допущение позволяет рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется через граничные условия.

Подставляя (9) в выражение для формулы зависимости коэффициента динамической вязкости от температуры, имеем

$$\mu_g(y,\theta) = \mu_{g\infty} t_{g0}^{\beta}(y). \tag{12}$$

Полученное выражение для динамической вязкости (12) в дальнейшем используется при нахождении полей скорости и давления в окрестности нагретой аэрозольной частицы сферической формы.

Решение гидродинамической задачи. Нахождение выражений для полей скорости и давления

Исследование линеаризованного по скорости уравнения Навье–Стокса в сферической системе координат показало, что если предположить коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа (слабая угловая асимметрия распределения температуры), то это уравнение может быть в конечном итоге сведено к неоднородному дифференциальному уравнению 3-го порядка с изолированной особой точкой. Решение этого уравнения можно искать в виде обобщенных степенных рядов.

Исходя из граничных условий (5)–(7), выражения для компонент массовой скорости нулевого приближения (8) будем искать в виде

$$U_r^g(y,\theta) = U_\infty \cos\theta G(y),$$

$$U_\theta^g(y,\theta) = -U_\infty g(y)\sin\theta. \tag{13}$$

Здесь $G(v)$ и $g(y)$ — произвольные функции, зависящие от координаты y.

Из уравнения непрерывности (2) и уравнения состояния (3) находим связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$:

$$g(y) = \frac{1}{2}y\frac{dG(y)}{dy} + \left(1 + \frac{1}{2(1+\alpha)}l\right)G(y),$$

$$l = l(y) = \frac{\Gamma}{y+\Gamma_0}. \tag{14}$$

Подставляя в линеаризованное по скорости уравнение Навье–Стокса (2) выражения (13), (14), учитывая (12), разделяя переменные после преобразований, в конечном итоге получаем следующее неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка для определения функции $G(y)$:

$$y^4\frac{d^3G}{dy^3} + y^3(4+\gamma_1 l)\frac{d^2G}{dy^2} - y^2(4+\gamma_2 l - \gamma_3 l^2)\frac{dG}{dy}$$

$$-y(2-l)\gamma_3 l^2 G = -\frac{6A_2}{t_{g0}^\beta}. \tag{15}$$

Здесь

$$\gamma_1 = \frac{1-\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_2 = 2\frac{1+\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_3 = \frac{2+2\alpha-\beta}{(1+\alpha)^2},$$

$$A_2 = \text{const}. \tag{16}$$

Найдем сначала решение однородного уравнения (15), т.е.

$$y^4\frac{d^3G}{dy^3} + y^3(4+\gamma_1 l)\frac{d^2G}{dy^2} - y^2(4+\gamma_2 l - \gamma_3 l^2)\frac{dG}{dy}$$

$$-y(2-l)\gamma_3 l^2 G = 0. \tag{17}$$

Точка $y = 0$ для уравнения (17) является регулярной особой точкой [19–21]. Это следует из уравнения (17), если в нем перейти к новой переменной $l(y)$. Поэтому будем искать его решение в виде обобщенного степенного ряда [19–21]

$$G(y) = y^\rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n l^n, \qquad C_0 \neq 0. \tag{18}$$

Подставляя ряд (18) в (17) и приравнивая коэффициенты при y^ρ, получаем определяющее уравнение $\rho(\rho+3)(\rho-2) = 0$, корни которого равны соответственно $\rho_1 = -3$, $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = 0$. Заметим, что разность корней (по модулю) равна целому числу. Следовательно, согласно общей теории решения дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса), в остальных решениях, кроме первого решения (в нашем случае $\rho_1 = -3$), появляется добавочное слагаемое с логарифмом, помноженным на первое решение [19–21]. Рекуррентные выражения для соответствующих коэффициентов определяются методом неопределенных коэффициентов.

Большему из корней (по модулю) отвечает решение

$$G_1(y) = \frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty} C_{1,n} l^n. \tag{19}$$

Решение, отвечающее корню $\rho_2 = 2$, не приводим, так как оно не удовлетворяет краевым условиям (16) (конечности решения при $y \to \infty$).

Третье решение уравнения (17), линейно независимое с решением G_1 (пропорциональное корню $\rho_3 = 0$), ищем в виде

$$G_3(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{3,n} l^n + \omega_3 \ln(y) G_1(y). \tag{20}$$

Вид правой части неоднородного уравнения (15) указывает на то, что его частное решение следует искать в виде

$$\tilde{G}(y) = A_2 G_2(y),$$

$$G_2(y) = \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty} C_{2,n} l^n + \omega_2 \ln(y) G_1(y). \tag{21}$$

Значения коэффициентов $C_{1,n}$ $(n \geq 1)$, $C_{2,n}$ $(n \geq 3)$ и $C_{3,n}$ $(n \geq 4)$ находятся методом неопределенных коэффициентов и их можно определять с помощью соответствующих рекуррентных соотношений

$$C_{1,n} = \frac{1}{n(n+3)(n+5)}\Big\{\big[(n-1)(3n^2+13n+8)$$

$$+\gamma_1(n+2)(n+3) + \gamma_2(n+2)\big]C_{1,n-1}$$

$$-\big[(n-1)(n-2)(3n+5) + 2\gamma_1(n^2-4) + \gamma_2(n-2)$$

$$+\gamma_3(n+3)\big]C_{1,n-2} + (n-2)\big[(n-1)(n-3)$$

$$+\gamma_1(n-3) + \gamma_3\big]C_{1,n-3}\Big\},$$

$$C_{2,n}=\frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)}$$

$$\times\Big\{\big[(n-1)(3n^2+n-6)+\gamma_1 n(n+1)+n\gamma_2\big]C_{2,n-1}$$

$$-\big[\gamma_3(n+1)+(n-1)(n-2)(3n-1)$$

$$+2\gamma_1 n(n-2)+\gamma_2(n-2)\big]C_{2,n-2}$$

$$+(n-2)\big[(n-1)(n-3)+\gamma_3+\gamma_1(n-3)\big]C_{2,n-3}$$

$$+\frac{\omega_2}{\Gamma_0^2}\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)\Delta_k$$

$$-6\,\frac{(-\gamma_4)(1-\gamma_4)\dots(n-1-\gamma_4)}{n!}\Big\},$$

$$C_{3,n}=\frac{1}{n(n+2)(n-3)}\Big\{(n-1)$$

$$\times\big[3n^2-5n-4+\gamma_1 n+\gamma_2\big]C_{3,n-1}$$

$$-\big[(n-1)(n-2)(3n-4)+2\gamma_1(n-1)(n-2)$$

$$+\gamma_2(n-2)+n\gamma_3\big]C_{3,n-2}$$

$$+(n-2)\big[(n-1)(n-3)+\gamma_1(n-3)+\gamma_3\big]C_{3,n-3}$$

$$+\frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3}\sum_{k=0}^{n-3}(n-k-2)(n-k-1)\Delta_k\Big\},$$

$$\Delta_k=(3k^2+16k+15)C_{1,k}-\big((k-1)(6k+13)$$

$$+\gamma_1(2k+5)+\gamma_2\big)C_{1,k-1}$$

$$+(3(k-1)(k-2)+2\gamma_1(k-2)+\gamma_3)\,C_{1,k-2}.$$

При вычислении коэффициентов $C_{1,n}$, $C_{2,n}$ и $C_{3,n}$ по рекурентным формулам необходимо учитывать, что $C_{1,0}=1$, $C_{2,0}=1$, $C_{3,1}=0$, $C_{2,2}=1$, $C_{2,1}==-\frac{1}{8}(2\gamma_1+\gamma_2+6\gamma_4)$,

$$\gamma_4=\frac{\beta}{1+\alpha},\quad \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3}=-\frac{\gamma_3}{60}(10+3\gamma_1+\gamma_2),$$

$$C_{3,1}=0,\qquad C_{3,2}=\frac{1}{4\gamma_3},\qquad C_{3,3}=1,\qquad C_{3,0}=1,$$

$$\frac{\omega_2}{\Gamma_0^2}=\frac{1}{15}\Big[\frac{1}{4}(2\gamma_1+\gamma_2+6\gamma_4)(4-3\gamma_1+\gamma_2)$$

$$+3\gamma_3+3\gamma_4(\gamma_4-1)\Big],$$

$C_{1,n}$, $C_{2,n}$ и $C_{3,n}$ при $n<0$ равны нулю.

Таким образом, общее решение уравнения (15), удовлетворяющее краевым условиям (6), имеет вид

$$G(y)=A_1G_1(y)+A_2G_2(y)+G_3(y), \tag{22}$$

и выражения для компонент массовой скорости и давления равны

$$U_r^g=U_\infty\cos\theta(A_1G_1+A_2G_2+G_3),$$

$$U_\theta^g=-U_\infty\sin\theta(A_1G_4+A_2G_5+G_6),$$

$$P_g=P_{g\infty}+\frac{\mu_{g\infty}U_\infty}{R}\,t_{g0}^{\beta}\Big\{\frac{y^2}{2}\,\frac{d^3G}{y^3}$$

$$+y\left[3+\frac{\beta-1}{2}\,yf\right]\frac{d^2G}{dy^2}$$

$$-\left[2-y^2f^{\mathrm{I}}-\frac{\beta}{2}y^2f^2+(\beta-2)yf\right]\frac{dG}{dy}$$

$$+2\left[y^2f^{\mathrm{II}}+yf^{\mathrm{I}}(4+y\beta f)-\frac{2}{3}\,f\right]G\Big\}. \tag{23}$$

Здесь
$$f=-\frac{l}{y(1+\alpha)},$$

$$G_k=\left(1+\frac{l}{2(1+\alpha)}\right)C_{k-3}+\frac{1}{2}yG_{k-3}^{1}\qquad (k=4,\,5,\,6).$$

f^{I}, f^{II}, G_1^{I}, G_2^{I}, G_3^{I} — первые и вторые производные по y от соответствующих функций.

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 определяются из граничных условий на поверхности аэрозольной частицы (5).

Определение фотофоретической силы и скорости. Анализ полученных результатов

Таким образом, в первом приближении по ε нами получены выражения для полей температур вне и внутри аэрозольной частицы, а также распределения скорости и давления в ее окрестности. Результирующая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности аэрозольной частицы и имеет вид [15,16]

$$F_z=\int\limits_{(S)}(-P_g\cos\theta+\sigma_{rr}\cos\theta+\sigma_{r\theta}\sin\theta)r^2\sin\theta d\theta d\varphi\Big|_{r=R}. \tag{24}$$

Здесь σ_{rr}, $\sigma_r\theta$ — компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{rr}=\mu_g\left(2\,\frac{\partial U_r^g}{\partial y}-\frac{2}{3}\,\mathrm{div}U_g\right),$$

$$\sigma_{r\theta}=\mu_g\left(\frac{\partial U_\theta^g}{\partial y}+\frac{1}{y}\,\frac{\partial U_r^g}{\partial\theta}-\frac{U_\theta^g}{y}\right).$$

С учетом приведенных выше выражений получаем

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_\mu+\varepsilon\mathbf{F}_{\mathrm{ph}}, \tag{25}$$

где

$$\mathbf{F}_\mu=6\pi R\mu_{g\infty}U_\infty f_\mu\mathbf{n}_z,$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{ph}}=-6\pi R\mu_{g\infty}f_{\mathrm{ph}}J\mathbf{n}_z,$$

$\mathbf{n}_z$ — единичный вектор в направлении оси OZ.

Значения коэффициентов f_μ и $f_{\rm ph}$ могут быть оценены с помощью формулы (26)

$$f_\mu=\frac{2N_2}{3N_1},\quad f_{\rm ph}=\frac{4}{3}K_{TS}\frac{\nu_{gS}}{\lambda_{pS}\delta T_{g\infty}t_{gS}}\frac{G_1}{N_1},\qquad(26)$$

где

$$N_1(y)=G_1(y)G_2^1(y)-G_2(y)G_1^1(y),$$

$$N_2(y)=G_1(y)G_3^{\rm I}(y)-G_3(y)G_1^{\rm I}(y)G_1^{\rm I}G_2^{\rm I}G_3^{\rm I}$$

— первые производные по y от соответствующих функций.

Приравнивая результирующую силу $\mathbf{F}$ к нулю, получаем следующее выражение для скорости фотофореза $\mathbf{U}_{\rm ph}$ ($\mathbf{U}_{\rm ph}=-\mathbf{U}_\infty$) твердой крупной нагретой частицы сферической формы:

$$\mathbf{U}_{\rm ph}=-h_{\rm ph}J\mathbf{n}_z,\qquad(27)$$

где $h_{\rm ph}=f_{\rm ph}/f_\mu$.

При оценке коэффициент f_μ, $f_{\rm ph}$ и $h_{\rm ph}$ необходимо учитывать, что индексом „s“ обозначены значения физических величин, взятые при средней относительной температуре поверхности частицы T_{pS}, которая определяется по формуле (11): функции $G_1(y)$, $G_1^{\rm I}(y)$, $G_2(y)$, $G_2^{\rm I}(y)$, $G_3(y)$, $G_3^{\rm I}(y)$, $N_1(y)$ и $N_2(y)$ берутся при $y=1$.

Полученные выше формулы можно использовать и при малых относительных перепадах температуры в окрестности частицы. В случае, когда величина нагрева поверхности частицы мала, т.е. средняя температура поверхности по величине незначительно отличается от температуры окружающей среды вдали от частицы ($\Gamma_0\to0$), зависимостью коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) от температуры можно пренебречь, и тогда ($y=1$) имеем $G_1=1$, $G_1^{\rm I}=-3$, $G_2=1$, $G_2^{\rm I}=-1$, $G_3=1$, $G_3^{\rm I}=0$, $N_1=2$ и $N_2=3$. В этом случае формулы для силы и скорости фотофореза совпадают с результатами работы [4].

Формулы (25)−(27) позволяют при известном распределении по объему плотности тепловых источников учесть влияние нагрева поверхности частицы на величину фотофоретической силы и скорости при произвольных относительных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее с учетом степенного вида зависимости вязкости и теплопроводности газообразной среды от температуры. Полученные формулы носят наиболее общий характер.

Представляют интерес численные оценки влияния нагрева поверхности аэрозольной частицы на фотофорез. На рис. 1, 2 приведены кривые, связывающие значения

$$\phi=\frac{f_{\rm ph}}{f_{\rm ph}|_{T_{pS}=273\,{\rm K}}},\qquad \psi=\frac{h_{\rm ph}}{h_{\rm ph}|_{T_{pS}=273\,{\rm K}}}$$

$\left(f_{\rm ph}|_{T_{pS}=273\,{\rm K}}=9.34\cdot10^{-11},\ h_{\rm ph}|_{T_{pS}=273\,{\rm K}}=9.34\cdot10^{-11}\right)$

со значениями T_{pS} для крупных частиц меди радиусом $R=25\,\mu$m, движущихся в воздухе при нормальных условиях.

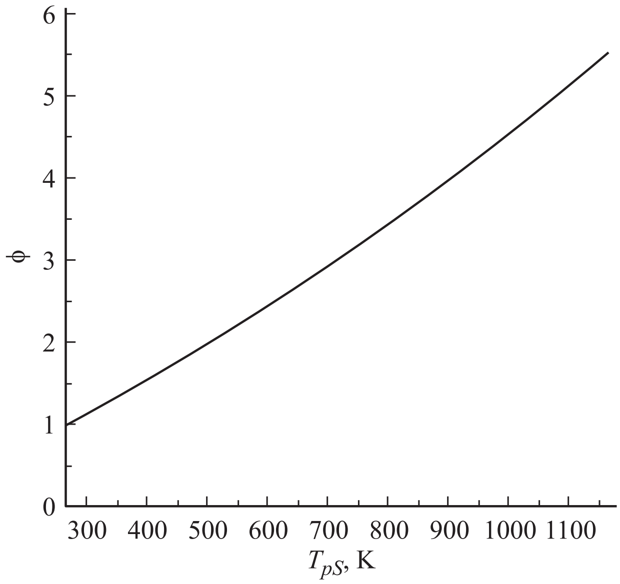

Рис. 1. Кривая зависимости функции ϕ от средней температуры поверхности частицы T_{pS}.

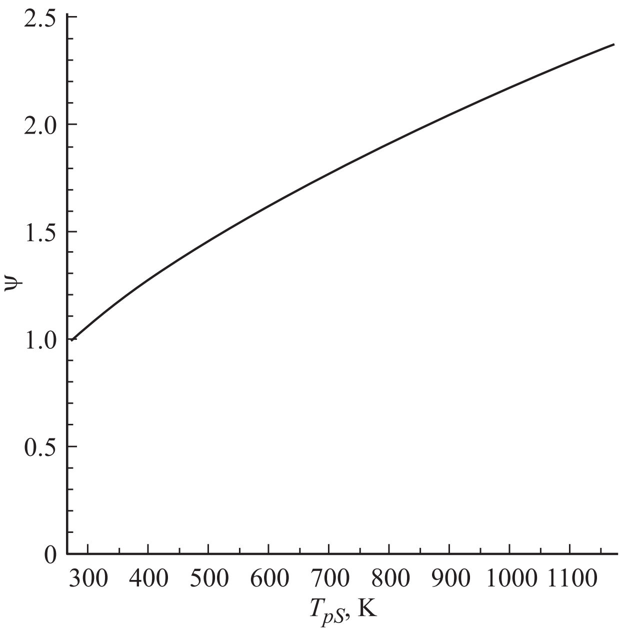

Рис. 2. Кривая зависимости функции ψ от средней температуры поверхности частицы T_{pS}.

Из формул (25)−(27) видно, что величина и направление силы и скорости фотофореза определяются величиной и направлением дипольного момента плотности тепловых источников $\int\limits_V q_p z\,dV\mathbf{n}_z$. В тех случаях, когда дипольный момент отрицательный (когда большая часть тепловой энергии выделяется в той части частицы, которая обращена к источнику излучения), частица движется в направлении падающего излучения. Если дипольный момент положительный (большая часть тепловой энергии выделяется в теневой части частицы), частица будет двигаться навстречу направлению распространения излучения. Для вычисления интеграла необходимо знать величину q_p, которая определяется из решения электродинамической задачи [1,6,14]. В настоящее время разработаны численные методы, позволяющие найти величину дипольного момента плотности тепловых источников, например, в работе [22] приводится листинг программы.

В качестве примера рассмотрим наиболее простой случай, когда частица поглощает излучение как черное тело. В этом случае поглощение происходит в тонком слое толщиной $\delta R \ll R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной δR определяется с помощью формулы [14]

$$q_p = \begin{cases} -\dfrac{I_0}{\delta R}\cos\theta, & \dfrac{\pi}{2} \le \theta < \pi, \ R-\delta R \le r \le R, \\ 0, & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \tag{28}$$

где I_0 — интенсивность падающего излучения.

В этом случае интегралы легко считаются

$$\int\limits_V q_p dV = \pi R^2 I_0, \qquad \int\limits_V q_p z\, dV = -\frac{2}{3}\pi R^3 I_0,$$

и получаем следующие выражения для фотофоретической силы и скорости абсолютно черных крупных частиц сферической формы:

$$\mathbf{F}_{\text{ph}}^* = 3\pi R \mu_{g\infty} f_{\text{ph}} I_0 \mathbf{n}_z,$$

$$\mathbf{U}_{\text{ph}}^* = \frac{\hbar_{\text{ph}}}{2} I_0 \mathbf{n}_z \left(\hbar_{\text{ph}} = \frac{f_{\text{ph}}}{f_\mu}\right). \tag{29}$$

Средняя температура поверхности частицы T_{pS} связана с интенсивностью падающего излучения формулой (30)

$$\begin{cases} T_{pS} = T_{gS}, \\ \dfrac{l^{(S)}}{1+\alpha}\dfrac{\lambda_{gS}}{\lambda_{pS}} T_{pS} t_{gS} = \dfrac{R}{4\lambda_{pS}} I_0 - \\ \qquad - \sigma_0 \sigma_1 \dfrac{R T_{g\infty}^4}{\lambda_{pS}} \left[\left(\dfrac{T_{pS}}{T_{g\infty}}\right)^4 - 1\right]. \end{cases} \tag{30}$$

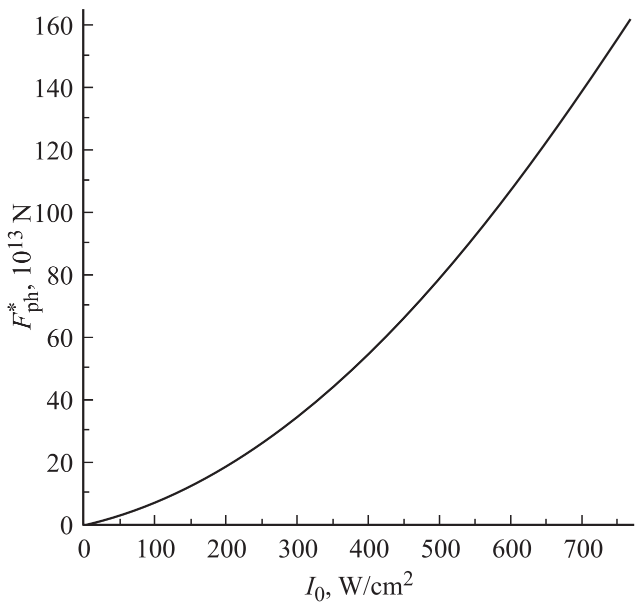

Рис. 3. Кривая зависимости фотофоретической силы F_{ph}^* от интенсивности падающего излучения I_0.

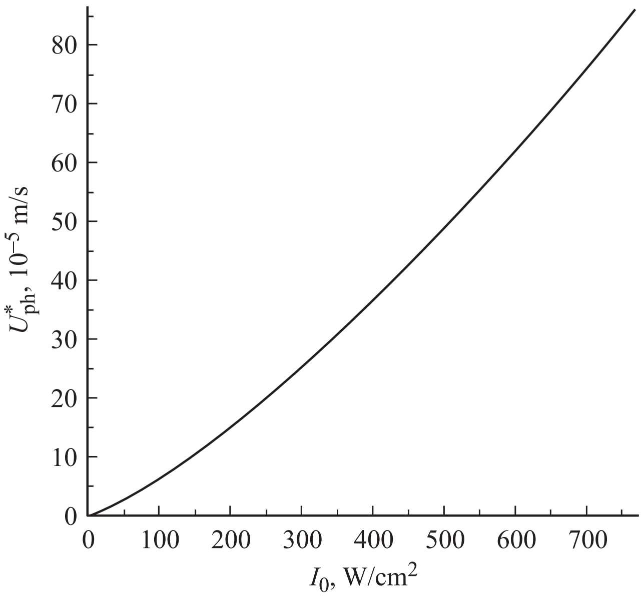

Рис. 4. Кривая зависимости фотофоретической скорости U_{ph}^* от интенсивности падающего излучения I_0.

На рис. 3, 4 приведены кривые, связывающие значения $\phi^* = F_{\text{ph}}^*$, $\psi^* = U_{\text{ph}}^*$ со значениями I_0 для крупных частиц меди радиусом $R = 25\,\mu$m, движущихся в воздухе при нормальных условиях.

Заключение

Из приведенных графиков видно, что сила и скорость фотофореза нелинейно возрастают с увеличением интенсивности излучения, что обусловлено зависимостью коэффициентов молекулярного переноса и плотности от температуры. В случае малых перепадов наблюдается линейный характер зависимости, что совпадает с известными результатами [2,4,6,12].

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы научно-образовательного центра „Управляемые электромагнитные процессы в конденсированных средах“ (Госконтракт № 02.740.11.0545) и ГК 16.518.11.7058.

Список литературы

[1] *Волковицкий О.А., Седунов Ю.С., Семенов Л.П.* Распространение интенсивного лазерного излучения в облаках. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 300 с.

[2] *Вальдберг А.Ю., Исянов П.М., Яламов Ю.И.* Теоретические основые охраны атмосферного воздуха от загрязнения промышленными аэрозолями. СПб.: Нииогаз-фильтр, 1993. 235 с.

[3] *Кабанов М.В.* Лазерное зондирование индустриальных аэрозолей. Новосибирск: Наука, 1986. 185 с.

[4] *Кутуков В.Б., Яламов Ю.И.* Нелинейные эффекты при распространении лазерного излучения в атмосфере. Томск, 1977. С. 145–147.

[5] *Pueshel R.L., Verma S., Rohatschek M., Ferry G.V., Boiadjieva N., Hovard S.D., Strawa A.W.* // J. Geophys. Res. D. 2000. Vol. 105. N 3. P. 3727–3736.

[6] *Береснев С.А., Ковалев Ф.Д., Кочнева Л.Б., Рунков В.А., Суетин П.Е., Черемисин А.А.* // Оптика атмосферы и океана. 2003. Т. 16. № 1. С. 52–57.

[7] *Chyi-Yeou Soong, Wen-Ken Li, Chung-Ho, Pei-Yuan Tzeng.* // Opt. Lett. 2010. Vol. 35. N 5. P. 625–627.

[8] *Kassoy D.R., Adomcon T.C., Messiter A.F.* // J. Phys. Fluid. 1996. Vol. 9. N 4. P. 671–681.

[9] *Малай Н.В., Щукин Е.Р.* // ИФЖ. 1988. Т. 54. № 4. С. 628–634.

[10] *Малай Н.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С.* // ПМТФ. 2008. № 1. С. 74–80.

[11] *Бретшнайдер Ст.* Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966. 535 с.

[12] *Береснев С.А., Кочнева Л.Б.* // Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 16. № 2. С. 134–141.

[13] *Яламов Ю.И., Галоян В.С.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 207 с.

[14] *Борен К.Ф., Хафмен Д.Р.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.

[15] *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.

[16] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[17] *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 11. С. 2253–2262.

[18] *Шейндлин А.Е.* Излучательные свойства твердых материалов. Справочник. М.: Энергия, 1974. 471 с.

[19] *Коддингстон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностр. лит-ра, 1958. 474 с.

[20] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. III. Ч. II. М.: Наука, 672 с.

[21] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит. 1961. 703 с.

[22] *Рязанов К.С., Попов И.В., Малай Н.В.* Вычисление распределения поглощаемой электромагнитной энергии внутри частиц сферической формы // Свид. о госуд. регистрации программы для ЭВМ № 2010616043.14.09.2010.