

01;10

О движении заряженных частиц в переменном неоднородном электрическом поле

© Н.Г. Демьянцева, С.М. Кузьмин, М.А. Солунин, С.А. Солунин, А.М. Солунин

Ивановский государственный энергетический университет,
153003 Иваново, Россия
e-mail: Solunin@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 5 декабря 2011 г. В окончательной редакции 29 февраля 2012 г.)

Рассмотрены уравнения движения заряженной частицы в электрическом поле, состоящем из стационарной и осциллирующей частей, при линейной по скорости силе трения. При определенных условиях возможно усреднение этих уравнений по периоду осцилляции поля. Получено наиболее общее выражение для дополнительной стационарной силы, действующей на частицу в этих условиях, и найдены предельные значения этой силы. Рассмотрены применения полученных результатов, одним из которых является использование импульсных токов в электрохимической размерной обработке материалов.

Введение

Известно [1], что на заряженную частицу в высокочастотном электрическом поле вида $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \vartheta)$ действует стационарная сила

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{q^2}{4m\omega^2} \nabla \mathcal{E}^2(\mathbf{r}), \quad (1)$$

именуемая силой Гапонова–Миллера [2] или силой Миллера [3]. С силой (1) связывается ряд нелинейных эффектов в физике плазмы [4]. Там она называется силой высокочастотного давления.

Обобщение силы (1) на случай движения частицы в вязкой среде, когда сила вязкого трения $\mathbf{F} = -m\nu\mathbf{v}$, проведено в работе [5] и имеет вид

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{2m(\omega^2 + \nu^2)} (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (2)$$

Высокочастотный предел этого выражения совпадает при $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ с (1), а низкочастотный вовсе не зависит от частоты электрического поля. Именно он используется в работе [5] для объяснения механизма резкого увеличения пробивного напряжения в высоковольтных аппаратах промышленной частоты при переходе от стационарных полей к полям переменным.

Влияние осциллирующего возмущения на механические системы рассмотрено также в работе [6]. Если частица движется одновременно в стационарном и осциллирующем полях, то ее уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x) + f(x) \sin \omega t, \quad (3)$$

где $x(t)$ — обобщенная координата. Представляя ее в виде суммы $x(t) = X(t) + \xi(t)$, где $X(t)$ описывает „плавное“ движение частицы, а $\xi(t)$ — осцилляции частицы около „плавного“ движения, то после усреднения уравнение (3) по периоду осцилляции получим

$$m\ddot{X} = F(X) - \frac{1}{4m\omega^2} \frac{d}{dX} f^2(X). \quad (4)$$

Таким образом в системе появляется еще одна стационарная сила, вид которой совпадает с (1) и которая меняет физические свойства системы. Интересен приведенный в работе [6] пример, относящийся к „перевернутому маятнику“: если точка подвеса математического маятника (груз на легком стержне) совершает вертикальные колебания, то устойчивым, кроме нижнего, может быть и верхнее положение маятника (перевернутый маятник). Исследование на устойчивость перевернутого маятника, проведенное в [7], дает следующие результаты: при длине маятника $l = 20$ см и амплитуде колебаний точки подвеса $a = 1$ см верхнее положение устойчиво, если частота колебаний точки подвеса $\omega > 43\omega_0$, где ω_0 — собственная частота маятника. Это ответ на непростой вопрос о нижнем пределе частоты возмущения, при которой справедливо представление о стационарной дополнительной силе.

Опираясь на метод, предложенный в работе [5], покажем, что возможно дальнейшее расширение представленных выше результатов.

1. Осциллирующее поле

Уравнение движения частицы в электромагнитном поле с линейной по скорости силой трения запишем в виде

$$m\dot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathcal{B}. \quad (5)$$

Если электрическое поле изменяется по закону

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \varphi), \quad (6)$$

то, поскольку электрическое и магнитное поля связаны уравнением

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

магнитное поле будет иметь вид

$$\mathcal{B}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{B}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi). \quad (8)$$

Это означает, что амплитуды полей связаны соотношением

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{\omega}{c} \mathcal{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (9)$$

Будем считать, что за время, равное периоду осцилляций, частица проходит расстояния, в пределах которых амплитуды полей меняются незначительно. Тогда, раскладывая их в ряд, можно ограничиться первым приближением:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(0), \\ \mathcal{B}(\mathbf{r}) &= \mathcal{B}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathcal{B}(0). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя это разложение полей в уравнение (5), получим с учетом (9) следующее уравнение движения:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} &= q\mathbf{E}_0 \sin(\omega t + \varphi) + q(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 \sin(\omega t + \varphi) \\ &+ \frac{q}{\omega} \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{E}_0) \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (11)$$

Это уравнение в отличие от (5) является линейным и его можно решать методом последовательных приближений. Полагая в нем справа второй и третий члены малыми и отбрасывая их, получим уравнения движения в нулевом приближении:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (12)$$

Частное решение этого уравнения

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{q\mathbf{E}_0}{m\omega\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \sin(\omega t + \varphi + \varphi_0) \quad (13)$$

и соответственно

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{q\mathbf{E}}{m\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \cos(\omega t + \varphi + \varphi_0), \quad (14)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \nu/\omega. \quad (15)$$

Подставляя решения (13) и (14) уравнения (12) в правую часть уравнения (11) и усредняя ее по периоду осцилляций, получим с учетом тождества

$$\nabla \mathcal{E}^2 = 2(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + 2\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (16)$$

уравнения движения вида (знак „0“, характеризующий начало разложения в ряд, теперь должен быть отброшен)

$$m\dot{\mathbf{v}} + m\nu\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (17)$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{q^2}{4m(\omega^2 + \nu^2)} \nabla \mathcal{E}^2(\mathbf{r}). \quad (18)$$

Сила (18) обобщает силу (2) и совпадает с ней при

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (19)$$

Дальнейшее обобщение силы (2) возможно только при условии (19).

2. Осциллирующее поле. Учет начальных условий

Запишем уравнения движения частицы в переменном электрическом поле (уравнение (5) без силы Лоренца)

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \omega) \quad (20)$$

и его первое приближение

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} &= q\mathbf{E}_0 \sin(\omega t + \varphi) \\ &+ q(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (21)$$

Нулевое приближение уравнения (21) имеет вид (12). Вместо частного рассмотрим теперь общее решение уравнения (12):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \exp(-\nu t) \\ &- \frac{q\mathbf{E}_0}{m\omega\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \sin(\omega t + \varphi + \varphi_0). \end{aligned} \quad (22)$$

Постоянные интегрирования здесь определяются из начальных условий

$$\mathbf{r}(0) = 0, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad (23)$$

так что

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= -\mathbf{C}_2 + \frac{q\mathbf{E}_0}{m\omega\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \sin(\varphi + \varphi_0), \\ \mathbf{C}_2 &= -\frac{\mathbf{v}_0}{\nu} - \frac{q\mathbf{E}_0}{m\nu\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \cos(\varphi + \varphi_0). \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя решение (22) уравнения (12) в правую часть уравнения (21) и усредняя ее по периоду осцилляции, получим для правой части уравнения (21) промежуточное выражение (значок „0“ у \mathbf{v}_0 и \mathbf{E}_0 , как и ранее, убираем)

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{q^2\beta}{\omega^2 + \nu^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\omega \cos \varphi + \nu \sin \varphi) \\ &- \frac{q^2\beta}{m(\omega^2 + \nu^2)} (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\omega^2 \cos^2 \varphi - \nu^2 \sin^2 \varphi) \\ &- \frac{q^2}{2m(\omega^2 + \nu^2)} (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\beta = \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-\nu t) dt = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{\nu} \left[1 - \exp\left(-2\pi \frac{\nu}{\omega}\right) \right]. \quad (26)$$

Таким образом, сила, действующая на частицу, зависит от начальной фазы колебаний, которая от частицы к частице меняется случайным образом. Поэтому для ансамбля независимых частиц, распределение по начальной фазе которых однородно, получим в результате

усреднения по фазе выражения (25) правую часть уравнения (17) [8]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{q^2}{4m(\omega^2 + v^2)} \left(1 + \frac{\omega^2 - v^2}{\omega^2 + v^2} \beta \right) \nabla \mathcal{E}^2(\mathbf{r}). \quad (27)$$

Это следующее обобщение силы (2). Рассмотрим его пределы. Высокочастотный предел силы (27) в 2 раза превосходит силу (2) и равен:

$$\mathbf{F}(v/\omega \rightarrow 0) = -\frac{q^2}{2m\omega^2} \nabla \mathcal{E}^2, \quad (28)$$

а низкочастотные пределы выражений (27) и (2) совпадают:

$$\mathbf{F}(\omega/v \rightarrow 0) = -\frac{q^2}{4mv^2} \nabla \mathcal{E}^2. \quad (29)$$

3. Псевдоэлектрическое поле

Итак, на заряженную частицу, кроме электрической силы, действует стационарная сила вида (27). Разные по физической природе, эти силы имеют формальное сходство. Поэтому, имея в виду приложения, будет удобно, если, кроме электрического, ввести понятие псевдоэлектрического¹ поля.

Силу (27) запишем в виде

$$\mathbf{F} = q\tilde{\mathbf{E}}, \quad (30)$$

где вектор

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\alpha \nabla \mathcal{E}^2 \quad (31)$$

будем называть напряженностью псевдоэлектрического поля. Коэффициент α в (31) для разных сил имеет разные значения. Например, для силы (27)

$$\alpha = \frac{q}{4m(\omega^2 + v^2)} \left(1 + \frac{\omega^2 - v^2}{\omega^2 + v^2} \beta \right). \quad (32)$$

Поскольку должно быть

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\nabla \tilde{\varphi}, \quad (33)$$

то потенциал псевдоэлектрического поля, согласно (31), имеет вид

$$\tilde{\varphi} = \alpha \mathcal{E}^2. \quad (34)$$

Плотность зарядов псевдоэлектрического поля найдется из уравнения

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 4\pi \tilde{\rho}. \quad (35)$$

Она будет равна

$$\tilde{\rho} = 2\alpha \mathcal{E} \cdot \nabla \rho - \frac{\alpha}{2\pi} \partial^i \mathcal{E}^k \partial_i \mathcal{E}_k. \quad (36)$$

Таким образом, каждому неоднородному переменному электрическому полю вида $\mathcal{E}(\mathbf{r}) \sin \omega t$ можно в определенном интервале частот (лучше сказать, начиная

¹ Термин „псевдо“ не подразумевает наличия особых трансформационных свойств у псевдоэлектрического поля: они те же, что и у электрического

с некоторой пороговой частоты) сопоставить стационарное псевдоэлектрическое поле $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$. Геометрические свойства этого поля проиллюстрируем на двух примерах.

1. Если заряд сферы меняется по закону

$$Q(t) = Q_0 \sin \omega t, \quad (37)$$

то амплитуда переменного электрического поля равна

$$\mathcal{E}(r) = \frac{Q_0}{r^2}. \quad (38)$$

Потенциал псевдоэлектрического поля определяется из (34):

$$\tilde{\varphi}(r) = \alpha \frac{Q_0^2}{r^4}, \quad (39)$$

а напряженность — из (33)

$$\tilde{\mathbf{E}}(r) = 4\alpha \frac{Q_0^2}{r^5}. \quad (40)$$

Наконец, из (36) определяем плотность псевдозарядов

$$\tilde{\rho}(r) = -\frac{3\alpha}{\pi} \frac{Q_0^2}{r^6}. \quad (41)$$

2. Потенциал поля электрического диполя имеет вид

$$\varphi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (42)$$

где $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \sin \omega t$, а амплитуда напряженности электрического поля меняется по закону

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{p}_0}{r^3} + 3 \frac{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r}. \quad (43)$$

Через эту напряженность, используя уравнения (34), (33) и (36), находим потенциал псевдоэлектрического поля

$$\tilde{\varphi} = \alpha \left(\frac{p_0^2}{r^6} + 3 \frac{(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r})^2}{r^8} \right) = \alpha \frac{p_0^2}{r^6} (1 + 3 \cos^2 \theta), \quad (44)$$

напряженность псевдополя

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{6\alpha}{r^8} \left[p_0^2 \mathbf{r} + 4 \frac{(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r})^2}{r^2} \mathbf{r} - (\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{p}_0 \right] \quad (45)$$

и плотность псевдозаряда

$$\tilde{\rho} = -\frac{9\alpha}{\pi} \frac{p_0^2}{r^8} (1 + 2 \cos^2 \theta), \quad (46)$$

где θ — угол между \mathbf{p}_0 и \mathbf{r} .

Из приведенных примеров видно, что псевдоэлектрическое поле является короткодействующим (так, если напряженность электрического поля сферы меняется по закону $1/r^2$, то напряженность псевдоэлектрического поля сферы изменяется, согласно (40), по закону $1/r^5$) и более локализованным. Направление силовых линий псевдоэлектрического поля зависит от знака вносимого в это поле пробного заряда. Это и дает возможность говорить, что заряженная частица независимо от знака заряда всегда выталкивается псевдоэлектрическим полем.

4. Стационарное поле и осциллирующее возмущение

Частица движется в стационарном поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, на которое наложено возмущение (6). Уравнение движения для нее имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\mathbf{v}\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\mathcal{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \varphi). \quad (47)$$

Раскладывая поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ в ряд вида (10) и подставляя это разложение в уравнение (47), получим линейное уравнение первого порядка

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\mathbf{v}\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0 + q(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{E}_0 + q\mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi) + q(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (48)$$

которое будем решать по методу последовательных приближений. Отбрасывая в нем справа малые величины, получим уравнения движения в нулевом приближении:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\mathbf{v}\dot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0 + q\mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (49)$$

Общее решение этого уравнения

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \exp(-vt) + \frac{q\mathbf{E}_0}{mv} t - \frac{q\mathcal{E}_0}{m\omega\sqrt{\omega^2 + v^2}} \sin(\omega t + \varphi + \varphi_0). \quad (50)$$

Постоянные \mathbf{C}_1 и \mathbf{C}_2 находятся из начальных условий (24)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= -\mathbf{C}_2 + \frac{q\mathcal{E}_0}{m\omega\sqrt{\omega^2 + v^2}} \sin(\varphi + \varphi_0), \\ \mathbf{C}_2 &= -\frac{\mathbf{v}_0}{v} + \frac{q\mathbf{E}_0}{mv^2} - \frac{q\mathcal{E}_0}{mv\sqrt{\omega^2 + v^2}} \cos(\varphi + \varphi_0). \end{aligned} \quad (51)$$

Подставляя решение (50) в правую часть уравнения (48) и усредняя ее по периоду и по начальной фазе колебаний, получим уравнения движения вида (значок „0“ у \mathbf{E}_0 , \mathcal{E}_0 и \mathbf{v}_0 теперь должен быть снят)

$$m\dot{\mathbf{v}} + m\mathbf{v}\mathbf{v} = q\mathbf{E} + \mathbf{F}, \quad (52)$$

где [9]

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1-\beta}{v} q\dot{\mathbf{E}} - \frac{q^2}{2mv^2} \left(1 - \beta - \pi \frac{v}{\omega} \beta\right) \nabla E^2 \\ &\quad - \frac{q^2}{4m(\omega^2 + v^2)} \left(1 + \frac{\omega^2 - v^2}{\omega^2 + v^2} \beta\right) \nabla \mathcal{E}^2. \end{aligned} \quad (53)$$

Это самое общее выражение для дополнительной стационарной силы, действующей на частицу в полях $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathcal{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \omega)$. Состоит она из двух частей. Если стационарное поле однородно, то на частицу действует сила (27). Если амплитуда возмущения постоянна, то сила (27) отсутствует и в (53) остаются первые два слагаемых.

Найдем предельные значения силы (53). Если учесть, что при $v/\omega \rightarrow 0$:

$$\beta \rightarrow 1, \quad \frac{1-\beta}{v} \rightarrow \frac{\pi}{\omega}, \quad \frac{1-\beta}{v^2} \rightarrow \frac{\pi}{\omega v} - \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{\omega^2}, \quad (54)$$

то высокочастотный предел силы (53) имеет вид ²

$$\mathbf{F}(v/\omega \rightarrow 0) = \frac{\pi q}{\omega} \dot{\mathbf{E}} + \frac{\pi^2 q^2}{3m\omega^2} \nabla E^2 - \frac{q^2}{2m\omega^2} \nabla \mathcal{E}^2. \quad (55)$$

Низкочастотный предел силы (53):

$$\mathbf{F}(\omega/v \rightarrow 0) = \frac{q}{v} \dot{\mathbf{E}} - \frac{q^2}{4mv^2} \nabla E^2 - \frac{q^2}{4mv^2} \nabla \mathcal{E}^2. \quad (56)$$

Сделаем важное для дальнейшего замечание. До сих пор мы предполагали, что поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ независимы. Это не всегда так. Если, например, к межэлектродному промежутку приложены постоянное и переменное напряжения, то вид электрических полей в пространстве между электродами определяется только геометрией промежутка, а сами поля, следовательно, линейно зависят

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = k\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (57)$$

5. Применения полученных результатов

Рассмотрим применения полученных выше результатов к некоторым физическим процессам. Их будет 3. Первое относится к особенностям механизма пробоя жидкого диэлектрика в высоковольтных аппаратах промышленной частоты. Второе связано со способом увеличения энергии положительных ионов катодного слоя тлеющего разряда (идея эксперимента) и, наконец, в третьем мы попытаемся объяснить качественные отличия, получаемые при электрохимической обработке металлов импульсными токами.

1. Механизм пробоя жидкого диэлектрика (трансформаторного масла) описан в работе [5] следующим образом. Частицы примеси, а именно они снижают изоляционные свойства диэлектрика, обладают как зарядом, так и дипольным моментом. Здесь примесью являлись частицы графита размером от 1 до 100 μm . Благодаря дипольному моменту частицы втягиваются полем в межэлектродное пространство и образуют цепочки (мостики), по которым и развивается пробой. В процессе пробоя частицы заряжаются и разлетаются благодаря кулоновским силам. Затем заряд частиц уменьшается (стекает) и преобладающей опять становится дипольная сила. Так выглядит пробой жидкого диэлектрика в постоянном электрическом поле. Если между электродами

² Если положить $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, $\mathbf{f} = q\mathcal{E}$, то уравнения движения с силой (55) будут иметь вид $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \frac{\pi}{\omega} \dot{\mathbf{F}} + \frac{\pi^2}{3m\omega^2} \nabla F^2 - \frac{1}{2m\omega^2} \nabla f^2$ [9]. Полагая, что \mathbf{F} меняется слабо, получим далее $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - \frac{1}{2m\omega^2} \nabla f^2$. Сравнение этого уравнения с уравнением (4) показывает, что стационарная сила у нас в 2 раза больше, чем в (4).

приложено переменное напряжение, то самым существенным отличием является аномально большой отброс частиц примесей, составляющих мостик, после пробоя. Дело обстоит так, как если бы на частицы действовала еще одна сила, подобная дипольной, но противоположно ей направленная. Такой и является сила (2).

Сделаем оценки. Считая, что на частицы графита, как на шарики, действует сила Стокса

$$\mathbf{F} = -6\pi r\eta\mathbf{v}. \quad (58)$$

Приведем ее к виду, используемому в наших расчетах

$$\mathbf{F} = -m\nu\mathbf{v}, \quad (59)$$

получим

$$\nu = \frac{6\pi r\eta}{m}. \quad (60)$$

Полагая здесь $m = 4/3\pi r\rho r^3$ и выбирая значения $r = 10\mu\text{m}$, $\rho = 2.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ получаем $\nu = 10^5 \text{ s}^{-1}$. Такая величина заметно превышает значение промышленной частоты ω , т.е. используется низкочастотный предел силы (2).

Отношение силы (2) к дипольной силе зависит как от радиуса частиц, так и от напряженности электрического поля. Полагая $E = 10 \text{ kV/cm}$, получаем критический размер частиц, при котором сила (2) начинает преобладать над дипольной силой: он равен $100\mu\text{m}$.

Итак, в сильных полях эффект выталкивания проявляется в широком диапазоне дисперсности. Это обстоятельство может иметь значение при объяснении той существенной разницы в пробивных напряжениях, которая наблюдается при прочих равных условиях в переменных и постоянных полях при медленном увеличении напряжения. В переменном поле пробивное напряжение жидкого диэлектрика существенно выше, чем в постоянном поле [5]³.

2. Катодный слой тлеющего разряда это узкая, примыкающая к катоду область, электрическое поле которой направлено к катоду и резко спадает в направлении от катода по линейному закону

$$E(x) = -E_0 \left(1 - \frac{x}{d}\right), \quad (61)$$

где d — толщина катодного слоя. Уравнение движения положительных ионов запишем в виде

$$m\ddot{x} = -qE_0 \left(1 - \frac{x}{d}\right). \quad (62)$$

Полагая в начале катодного слоя скорость ионов равной v_0 ($\dot{x}(d) = -v_0$), получим из (62) закон сохранения энергии для ионов катодного слоя:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{qE_0}{2d}x^2 - qE_0x + \frac{qE_0d}{2}. \quad (63)$$

Наложим на катодный слой переменное электрическое поле

$$\mathcal{E}(x, t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (64)$$

Тогда на ионы катодного слоя будет действовать дополнительная сила (55):

$$F_{\text{add}}(x) = \frac{\pi q}{\omega} \dot{x}E'(x) + \frac{2}{3} \frac{\pi^2 q^2}{m\omega^2} E(x)E'(x) \quad (65)$$

и уравнение движения для них запишется в виде

$$m\ddot{x} = -q \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\pi^2 q E_0}{m\omega^2 s}\right) E_0 \left(1 - \frac{x}{d}\right) + \frac{\pi q E_0}{\omega d} \dot{x}. \quad (66)$$

Это уравнение заменяет уравнение (62) для ионов катодного слоя при наложении на последний переменного напряжения (64). Первое слагаемое здесь направлено к катоду. Оно подобно силе из уравнения (62) и ускоряет положительные ионы, движущиеся к катоду. Второе слагаемое в уравнении (66) линейно зависит от скорости и направлено по вектору скорости. Оно таким образом тоже ускоряет положительные ионы, движущиеся к катоду. Решив это уравнение, мы найдем скорость ионов, бомбардирующих катод.

Вводя обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{qE_0}{md}, \quad (67)$$

перепишем уравнение (66) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \pi \frac{\omega_0^2}{\omega} \dot{x} - \left(1 + \frac{2}{3} \pi^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \omega_0^2 x \\ = - \left(1 + \frac{2}{3} \pi^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \omega_0^2 d. \end{aligned} \quad (68)$$

Его общее решение

$$x(t) = d + C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t), \quad (69)$$

где

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \pm \sqrt{1 + \frac{11}{12} \pi^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}\right) \omega_0. \quad (70)$$

Начальное условие $x(0) = d$ позволяет найти постоянную интегрирования $C_2 = -C_1$, а из условия $x(\tau) = 0$ найдем время пролета τ ионом катодного слоя:

$$d + C_1 [\exp(\lambda_1 \tau) - \exp(\lambda_2 \tau)] = 0. \quad (71)$$

Из уравнения (69) найдем скорость иона:

$$\dot{x}(t) = C_1 (\lambda_1 \exp(\lambda_1 t) - \lambda_2 \exp(\lambda_2 t)), \quad (72)$$

а из начальных условий $\dot{x}(0) = -v_0$, $\dot{x}(\tau) = -v(\tau)$ найдем постоянную интегрирования C_1 :

$$C_1 = -\frac{v_0}{2\omega_0 \sqrt{1 + \frac{11}{12} \pi^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \quad (73)$$

³ В работе [5] сила (2) называется зарядовой силой

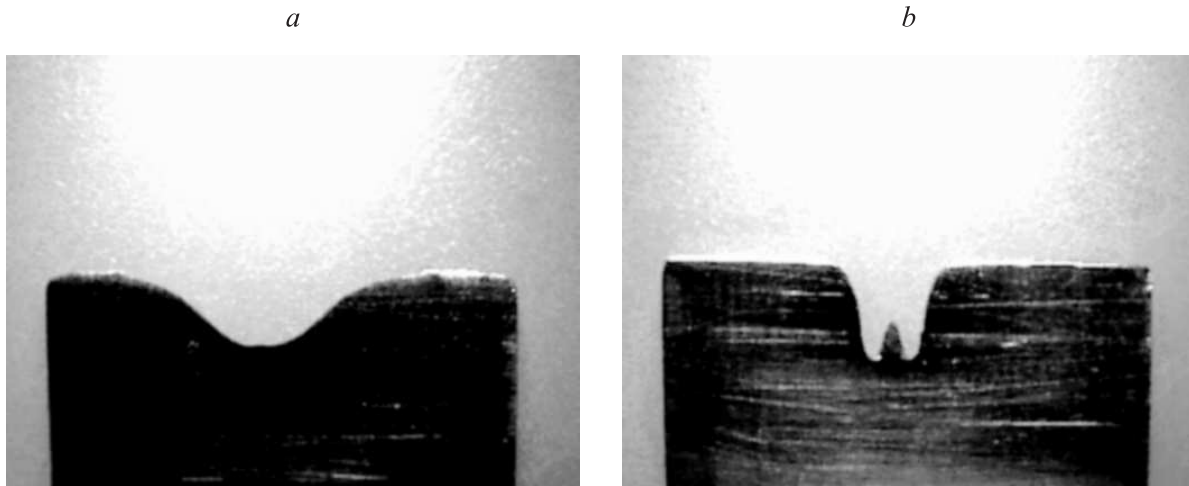


Рис. 1. Типичные виды профилей, получаемых при обработке фольги постоянными (а) и импульсными (б) токами.

и скорость ионов на катоде $v(\tau)$:

$$v(\tau) = - \frac{v_0}{2\omega_0 \sqrt{1 + \frac{11}{12} \pi^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \times [\lambda_1 \exp(\lambda_1 \tau) - \lambda_2 \exp(\lambda_2 \tau)], \quad (74)$$

где τ — решение уравнения (71).

Численные расчеты для конкретного катодного слоя приведены нами в работе [10] (см. также [11]).

3. Электрохимическая размерная обработка (ЭХРО) металлов проводится либо постоянными, либо импульсными токами [12–15]. В пространстве между электродами согласно закону Ома, действует, таким образом, либо постоянное (стационарное) либо импульсное электрическое поле. Один из электродов (катод) представляет собой полую иглу, через которую в межэлектродное пространство поступает электролит. Другой электрод — это обрабатываемая деталь: у нас ею является никелевая фольга, в которой вытравливается область определенной конфигурации (профиль). На рис. 1 показаны два таких профиля: один из них получен при обработке детали постоянным током, другой — импульсным.⁴ Наша задача заключается в том, чтобы на качественном уровне объяснить особенности второй картины действием дополнительной силы (53).

Импульсный ток можно представлять состоящим из постоянного и биполярного токов. Поскольку скважность используемых импульсов равна двум, то можно показать, что в межэлектродном пространстве действует

⁴ Опишем методику эксперимента. Рабочий электрод (анод) — никелевая фольга толщиной 0.1 мм и размерами 10 × 15 мм; электрод (катод) — инструмент (стальная полая игла с внешним диаметром 2 мм) направлен в торец рабочего электрода. Через иглу поступает электролит 1M NaNO₃. Межэлектродное расстояние 0.1 мм. Напряжение между катодом и анодом: а) — постоянное 10 V, б) — импульсное с амплитудой 10 V, скважность 2, частота 2 kHz. Время проведения эксперимента 40 min. Скорость подачи электрода: а) — 0.48 mm/min, б) — 0.54 mm/min.

стационарное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и переменное электрическое поле $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ [13]. Период переменного поля равен периоду импульсного тока. Таким образом, мы получили ситуацию, когда на заряженную частицу, помимо электрической, действует неэлектрическая сила (53).

Молекулы жидкости обладают потенциальной энергией, которая, определяя структуру жидкости, имеет периодически расположенные минимумы (ямки), глубина которых сравнима с тепловой энергией молекулы. Тепловое движение молекулы жидкости состоит из хаотических перескоков молекулы из ямки в ямку. Так можно определить частоту тепловых перескоков (соударений) молекулы: $d = v_{\text{therm}}/v_{\text{therm}}$, где d — расстояние между соседними ямками. Ламинарное течение жидкости также представляет собой последовательности перескоков молекулы. Поэтому, если на жидкость, являющуюся электролитом, наложить электрическое поле, то на заряженные молекулы жидкости (ионы) будет действовать электрическая сила, создавая ее течение. Поскольку также $d = v/v$, где v — скорость ламинарного течения жидкости, ν — частота соударений молекул жидкости, то для нее получим

$$\nu = \frac{v}{v_{\text{therm}}} \nu_{\text{therm}}. \quad (75)$$

Именно эта частота входит в выражение (53).

Сделаем оценки. Частота тепловых столкновений молекулы жидкости составляет $\nu_{\text{therm}} = 10^{10}$ Hz, тепловая скорость имеет порядок $v_{\text{therm}} = 10^2$ m/s. Скорость течения жидкости в нашем случае не превышает 1 m/s; частота импульсов, на которых проводилась обработка, составляет 10^5 Hz. Тогда из (75) получаем, что $\nu = 10^8$ Hz, а отношение $\nu/\omega = 10^3$. Таким образом, мы имеем дело с низкочастотным пределом силы (53), т. е. с силой (56).

Сила (56) состоит из 3 слагаемых. Оценим первые два из них. Если $F_1 = (q/v)vE'$, а $F_2 = (q^2/4mv^2)2EE'$, то

для их отношения $\Delta = F_1/F_2$ имеем

$$\Delta = 2 \frac{mvb}{q}, \quad (76)$$

где b — подвижность ионов. Отношение (76) пренебрежимо мало, поэтому для неэлектрической силы (56) получим с учетом (57) окончательное выражение

$$\mathbf{F} = -(1+k^2) \frac{q^2}{4mv^2} \nabla E^2. \quad (77)$$

Такая сила, наряду с электрической, действует на ионы в межэлектродном промежутке.

Обратимся к рис. 1. Вторую картину от первой отличает, таким образом, действие силы (77). Напомним, что эта сила короткодействующая и всегда направлена в сторону убывания электрического поля, выталкивая частицы из области сильного поля. Итак, на ион, движущийся к аноду, действует электрическая сила $q\mathbf{E}$ и псевдоэлектрическая сила $q\tilde{\mathbf{E}}$ (77). Эти силы сонаправлены, и этим можно объяснить возрастающую во втором случае эффективность съема массы [14].

Характерным элементом второй картины является острие в центре анода. Его происхождение мы объясняем следующим образом. Доставка ионов к аноду состоит из трех частей: гидродинамической, электрической и псевдоэлектрической. Острие формируется против иглы, где нет течения. Это застойная зона. Поскольку поверхность анода — эквипотенциальная поверхность, то на острие возникает сильное электрическое поле, притягивающее отрицательные ионы. Но в непосредственной близости от острия образуется псевдоэлектрическое поле (77), отталкивающее те же отрицательные ионы от острия. В результате этого противодействия и формируется острие. Острие, таким образом, в центре профиля (рис. 1, *b*) свидетельствует о действии на ионы электролита, кроме электрических также и неэлектрических (псевдоэлектрических) сил.

6. Обсуждение результатов

Если частица движется в стационарном $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и осциллирующем $\mathbf{f}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \varphi)$ полях, то ее уравнения движения имеют вид

$$m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \mathbf{f}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \varphi). \quad (78)$$

Частоту осциллирующего поля можно подобрать так, что после усреднения правой части уравнения (78) по периоду осцилляции их можно записать в виде

$$m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{\text{add}}(\mathbf{r}), \quad (79)$$

где $\mathbf{F}_{\text{add}}(\mathbf{r})$ — дополнительная стационарная сила [9]:

$$\mathbf{F}_{\text{add}}(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{\omega} \dot{\mathbf{r}} + \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{m\omega^2} (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{F} - \frac{1}{m\omega^2} (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{f}. \quad (80)$$

При получении выражения (80) для дополнительной силы в предлагаемой методике использовалось общее решение

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 t + \frac{\mathbf{F}_0}{2m} t^2 - \frac{\mathbf{f}_0}{m\omega^2} \sin(\omega t + \varphi), \quad (81)$$

где

$$\mathbf{C}_1 = \frac{\mathbf{f}_0}{m\omega^2} \sin \varphi, \quad \mathbf{C}_2 = \frac{\mathbf{f}_0}{m\omega} \cos \varphi + \mathbf{v}_0, \quad (82)$$

уравнения для нулевого приближения (линейного аналога уравнения (78))

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0 + f_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (83)$$

Если ограничиться только частным решением уравнения (83)

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{F}_0}{2m} t^2 - \frac{\mathbf{f}_0}{m\omega^2} \sin(\omega t + \varphi), \quad (84)$$

то упомянутая выше процедура приводит к следующему выражению для дополнительной силы:

$$\mathbf{F}_{\text{add}} = \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{m\omega^2} (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{F} - \frac{1}{2m\omega^2} (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{f}. \quad (85)$$

Отличие выражений (85) и (80) для дополнительной силы обусловлено усреднением по начальной фазе колебаний предшествующего (80) промежуточного результата [9]: при этом оказалось, что среднее по ансамблю частиц (по начальной фазе колебаний) в точности совпадает с усредненным по времени результатом (последнее слагаемое в (85)). Подведем итоги.

1. Получено общее выражение (53) для силы, действующей на частицу, если она движется в стационарном электрическом $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и одновременно осциллирующем $\mathcal{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \varphi)$ полях при учете вязкого трения. Найден низкочастотный (56) и высокочастотный (55) пределы этого выражения. Последнее для потенциальных полей $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ и $\mathbf{f} = q\mathcal{E}$ совпадает с дополнительной силой (80).

2. Введено понятие псевдоэлектрического поля $\tilde{\mathbf{E}}$, так что наряду с электрической силой $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ можно рассматривать силу вида $\mathbf{F} = q\tilde{\mathbf{E}}$. Сформулированы свойства поля $\tilde{\mathbf{E}}$ и на простых примерах показано его отличие от поля \mathbf{E} .

3. Найденное объяснение последнего слагаемого в (85), которое происходит после замены частного решения уравнения (83) на общее его решение. Следствием этого является то, что теперь приходится рассматривать ансамбль частиц и проводить усреднение по начальной фазе колебаний. Таким образом вместо силы (85), действующей на отдельную частицу, приходится рассматривать силу (80), действующую на частицу из ансамбля частиц. Но этот результат можно понимать и так, как если бы на отдельную частицу действовали беспорядочно цуги колебаний одинаковой частоты и амплитуды. Наиболее естественная интерпретация результата (80) выглядит

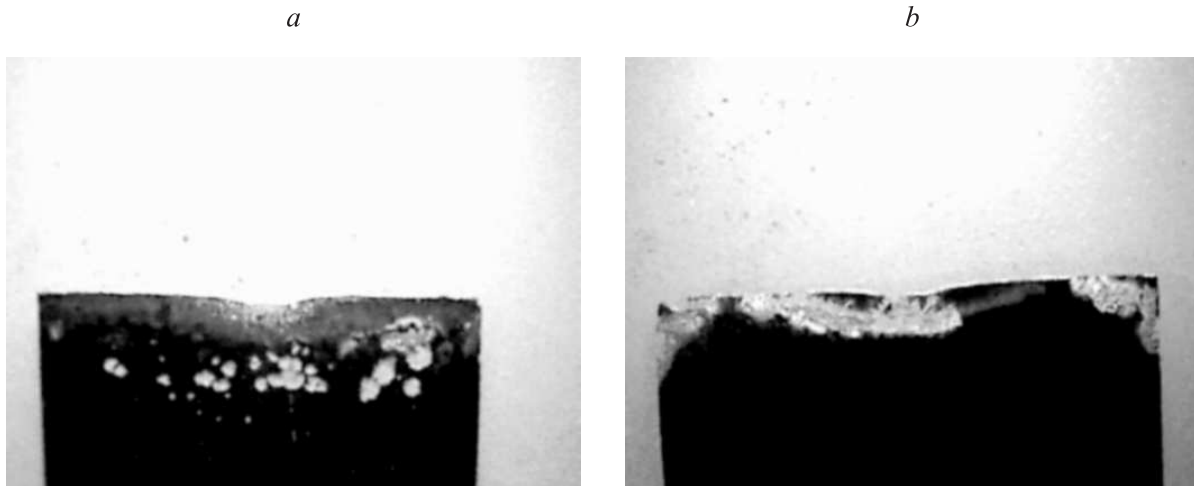


Рис. 2. Фотографии полученных образцов при частоте напряжения, кГц: a — 7, b — 20.

так: если частица случайным образом теряет или приобретает один и тот же заряд, как это происходит в плазме, то сила, на нее действующая, должна иметь вид (80).

Рассмотрим теперь приложения. Первое из них, описанное в работе [5], наглядно подтверждает существование силы, действующей противоположно дипольной силе. Это результат (2). Особый интерес в выражении (80) представляет первое слагаемое. Оно неявным образом зависит от скорости частицы и в зависимости от знака перед скоростью может как ускорять частицу, так и замедлять. В нашем случае для стационарного поля вида (61) происходит ускорение положительного иона, движущегося к катоду. Расчет этой скорости представлен в приложении два.

Особое место в нашей работе занимают эксперименты по электрохимической обработке. Результат, представленный на рис. 1, достигнут прямоугольными однополярными импульсами тока скважности 2. В работе [13] нами показано, что соответствующее этим импульсам электрическое поле может быть представлено как суперпозиция стационарного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и осциллирующего поля $\mathcal{E}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \varphi)$, амплитуда которого

$$\mathcal{E} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^4} A \approx \frac{4}{\pi} A, \quad (86)$$

где A — амплитуда биполярных импульсов.

Однако, основная трудность состояла в оценке коэффициента ν в выражении для силы вязкого трения. Сделать это так, как в первом приложении, по-видимому, нельзя, так как формула Стокса для ионов теряет смысл и действительно надо говорить о частоте соударений. Предложенный нами способ оценки частоты соударений привел к соотношению $\nu \gg \omega$, так что мы и здесь, как в первом приложении, приходим к низкочастотному приближению. Это сильно упростило результат (53), и, наконец, учет соотношения (57) привел к простой

дополнительной силе (77), действующей наряду с электрической силой на ионы электролита.

Обсудим теперь предварительные результаты опыта, представленного на рис. 2. Здесь к электродам приложено гармоническое электрическое поле.⁵ В результате в фольге образуются небольшие (до миллиметра) отверстия. Наше объяснение этого явления выглядит так. В пространстве между иглой и фольгой действует переменное электрическое поле. Амплитуда этого поля неоднородна: она принимает наибольшие значения у конца иглы и у торца фольги. Следовательно, можно рассматривать два псевдоэлектрических поля (от иглы и от ребра фольги), которые с силой (18) действуют на ионы электролита. Эти силы противоположно направлены и существует область, где они уравниваются друг друга. В этой области, по-видимому, случайным образом, образуются потоки ионов (струи), которые, огибая торец фольги, вытравливают небольшие отверстия в теле фольги. Разумеется, это объяснение не полно, но важно, что оно требует привлечения понятия псевдоэлектрического поля. Недорассмотренными при этом остаются такие вопросы, как смещение отверстий к торцу фольги при повышении частоты электрического поля, а также однотипность явления в большом диапазоне частот.

Приложение 1

Вернемся к упомянутой выше задаче о перевернутом маятнике ([6], § 30, задача 1). Она решается при использовании уравнения движения (4) с эффективной

⁵ Напряжение между электродом и катодом — синусоидальное с амплитудой 10 В. Время проведения эксперимента 40 мин. Остальные параметры те же, что и в экспериментах, представленных на рис. 1 (см. сноску ⁴).

потенциальной энергией маятника

$$U_{\text{eff}} = mgl \left(-\cos \alpha + \frac{1}{4} \frac{a^2}{l^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sin^2 \alpha \right). \quad (87)$$

Наиболее близким к уравнению (4) у нас является уравнение движения с силой (85). В нем для маятника $F = -mg \sin \alpha$, $f = -ml\omega^2 \sin \alpha$. Поэтому для него

$$U_{\text{eff}} = mgl \left(-\cos \alpha - \frac{1}{3} \pi^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \frac{a^2}{l^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sin^2 \alpha \right). \quad (88)$$

Это выражение при естественном для маятника условии

$$\frac{a}{l} \gg \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \quad (89)$$

дает те же результаты, что и выражение (87).

Нами в работе [16] в основу исследования перевернутого маятника положено уравнение движения с дополнительной силой (80). Первое (диссипативное) слагаемое в (80) приводит к тому, что амплитуда колебаний относительно нижней точки равновесия со временем убывает, а относительно верхней точки растет, так что равновесие относительно положения $\alpha = \pi$ носит условный характер. Этот результат получен для маятника из ансамбля маятников. Для конкретного маятника должна быть учтена начальная фаза колебаний. В [16] такое исследование проведено.

Приложение 2

Ничто не мешает в уравнении (47) силу трения перенести вправо и считать ее наряду с $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ еще одним стационарным полем, в котором движется осциллирующая частица. Поэтому разлагая стационарную ($\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))$) скорость в ряд вида (10):

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}(0) \quad (90)$$

и жестко следуя процедуре, определяемой используемым методом, получим вместо уравнения (52) с дополнительной силой (53) уравнение движения вида [17]

$$\begin{aligned} & \left[1 + \pi \frac{v}{\omega} \left(1 - \frac{2}{3} \pi \frac{v}{\omega} \right) \right] m \dot{\mathbf{v}} + m v \mathbf{v} \\ & = q \mathbf{E} + \left(1 - \frac{2}{3} \pi \frac{v}{\omega} \right) \frac{\pi q}{\omega} \dot{\mathbf{E}} \\ & + \frac{2}{3} \pi^2 \frac{q^2}{m \omega^2} (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \frac{q^2}{m \omega^2} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla) \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (91)$$

Итак, мы имеем 2 способа описания влияния периодического возмущения на движение частицы. Первый представлен уравнением движения (52) с дополнительной силой (53), второй — уравнением (91). Они, естественно, совпадают при $v = 0$, но в общем случае принципиально различаются. Особенностью второго подхода является зависимость инертной массы частицы от частоты столкновений (точнее от v/ω). Естественно поэтому ввести эффективную массу частицы

$$m_{\text{eff}} = \left[1 + \pi \frac{v}{\omega} \left(1 - \frac{2}{3} \pi \frac{v}{\omega} \right) \right] m. \quad (92)$$

Как видно из (92), при малых v/ω эффективная масса растет до максимального значения, а при дальнейшем росте v/ω эффективная масса только уменьшается. Мы не будем здесь давать физическую интерпретацию этому явлению.

Заключение

Авторы показали возможности метода усреднения по времени уравнений движения с осциллирующей силой. При этом получается стационарное уравнение движения с дополнительной стационарной силой. Приведены примеры. Некоторым из результатов удалось дать физическую интерпретацию. Сформулируем положения, которые представляются важными при дальнейших исследованиях по этой теме.

1. Установление нижнего порога частоты, при которой справедливо представление о дополнительной силе.

2. Определение вязкости или частоты соударений при ламинарном движении для ионов жидкости.

3. Экспериментальное подтверждение (постановка физического эксперимента) полученных результатов.

4. Использование общего решения уравнения для нулевого приближения делает частицу представителем ансамбля частиц и в этом качестве она приобретает свойства, которые ей не присущи вне системы как отдельной частице. Покажем это на примере уравнения (78). Использование общего решения (81) уравнения для нулевого приближения (83) приводит к выражению (80) для дополнительной силы, в то время как использование частного решения (84) этого уравнения при той же процедуре дает силу (85). Последнее слагаемое в (80) в 2 раза больше последнего слагаемого в (85). Выше мы говорили о том, что это удвоение происходит вследствие усреднения по фазе в ансамбле частиц: среднее по ансамблю равно среднему по времени. Первое же слагаемое в (80) не имеет соответствующего аналога в выражении (85) и возникает вследствие наложения на общее решение начальных условий. Оно диссипативно, т.е. частица в зависимости от знака скорости ($\dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F}$) может как отдавать энергию, так и принимать ее от внешнего источника. Это наделяет частицу необычными

свойствами.⁶ Таким образом с силой (80) связывается представление частицы из ансамбля частиц. Физическое осмысление этого понятия и является, по-видимому, главным из вопросов, которые поднимаются в настоящей работе.

Выражаем глубокую признательность проф. С.А. Лилину за организацию экспериментов по ЭХРО и помощь в их проведении.

Список литературы

- [1] Гапонов А.В., Миллер М.А. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. № 2. С. 242–243.
- [2] Болотовский Б.М., Серов А.В. // УФН. 1994. Т. 164. № 5. С. 545–549.
- [3] Александров А.В., Богданкевич А.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988. 424 с.
- [4] Чен Ф. Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987. 292 с.
- [5] Волков В.Н., Крылов И.А. // Межвуз. сб. научн. тр. Иваново: Иван. энергет. ин-т, 1976. С. 76–83.
- [6] Ландау Л.А., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
- [7] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
- [8] Солунин С.А., Солунин А.М., Солунин М.А. // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. Вып. 14. С. 48–53.
- [9] Солунин С.А., Солунин А.М., Солунин М.А. // Изв. вузов. Физика. 2003. № 10. С. 48–52.
- [10] Солунин А.М., Солунин М.А. // Об ускорении ионов катодного слоя тлеющего разряда высокочастотным электрическим полем. Молекулярная физика неравновесных систем. Материалы II Всероссийской научн. конф. Иваново, 2000. С. 96–100.
- [11] Солунин А.М., Солунин М.А. // О влиянии неоднородного электрического поля на неоднородную плазму тлеющего разряда. Молекулярная физика неравновесных систем. Материалы II Всероссийской научн. конф. Иваново, 2000. С. 101–103.
- [12] Кузьмин С.М., Солунин М.А., Демьянцева Н.Г. и др. // Электронная обработка материалов. 2006. № 4. С. 53–59.
- [13] Демьянцева Н.Г., Солунин М.А., Кузьмин С.М. // Актуальные проблемы электрохимической технологии. Сб. молодых ученых. Саратов, 2008. С. 163–170.
- [14] Демьянцева Н.Г., Кузьмин С.М., Солунин М.А. и др. // ЖПХ. 2010. Т. 83. Вып. 2. С. 249–254.
- [15] Демьянцева Н.Г., Солунин М.А., Кузьмин С.М. и др. // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2009. Т. 52. Вып. 2. С. 78–84.
- [16] Солунин А.М., Солунин М.А., Солунин С.А. // Журн. Иван. математ. об-ва. 2010. Вып. 1(7). С. 53–58.
- [17] Солунин А.М., Солунин М.А., Солунин С.А. // Журн. Иван. математ. об-ва. 2010. Вып. 1(7). С. 47–52.

⁶ Так, если на гармонический осциллятор действует возмущение вида $f_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где $f_0 = \text{const}$, то его уравнения движения (78) имеют вид $m\ddot{x} = -kx + f_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Поскольку здесь $F(x) = -kx$, то дополнительная сила (80) равна $F_{\text{add}} = -\frac{\pi}{\omega} k\dot{x} + \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{m\omega^2} k^2 x$, а его уравнения движения (79) имеют вид $m\ddot{x} + m\pi \frac{\omega_0^2}{\omega} \dot{x} = -k(1 - \frac{2}{3} \pi^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2})x$, где $\omega_0^2 = k/m$. Это уравнение движения осциллятора из ансамбля осцилляторов. Для него собственная частота будет немного меньше, поскольку должно быть $\omega \gg \omega_0$, а колебания становятся затухающими [16].