

01;04

## Аналитическая модель коронного разряда с конического электрода в режиме насыщения

© Г.Ш. Болтачев, Н.М. Зубарев

Институт электрофизики УрО РАН,  
620016 Екатеринбург, Россия  
e-mail: nick@ier.uran.ru

(Поступило в Редакцию 19 декабря 2011 г.)

Найдены точные частные решения для распределения электрического поля во внешней зоне стационарного униполярного коронного разряда с идеального конического острия в режиме ограничения тока объемным зарядом с учетом зависимости подвижности ионов от напряженности поля. Принимается, что коронирует лишь вершина конуса, т.е. зона ионизации — точечная. Решения являются сшивкой сферически симметричного распределения потенциала поля в области дрейфа и самоподобного распределения в области без объемного заряда. Подобные решения выходят за рамки традиционного используемого приближения Дейча о малости влияния объемного заряда на форму эквипотенциальных поверхностей и линий электрического поля. Получена зависимость тока насыщения коронного разряда от угла раствора конического электрода и приложенной разности потенциалов. Предложена простая аналитическая модель, описывающая дрейф в геометрии электродов „острие—плоскость“ в режиме насыщения на основе суперпозиции двух точных решений для потенциала поля. В рамках этой модели определено угловое распределение плотности тока по плоскому пассивному электроду, отлично согласующееся с эмпирическим законом Варбурга.

### Введение

Рассмотрение процессов в коронном разряде представляет значительный теоретический и практический интерес. Основы теории коронного разряда были заложены в работах [1–5]. Особенностью коронного разряда постоянного тока является существенное влияние пространственного заряда ионов, дрейфующих от узкой зоны ионизации вблизи активного (коронирующего) электрода к пассивному (некоронирующему) электроду. Именно наличие внешней зоны коронного разряда определяет его основные характеристики. В случае постоянной подвижности ионов их дрейф во внешней зоне стационарного униполярного коронного разряда определяется нелинейным уравнением третьего порядка

$$\nabla(\nabla^2\Phi\nabla\Phi) = 0, \quad (1)$$

где  $\Phi$  — скалярный потенциал электрического поля (см., например, обзор [6]).

Распределения электрического поля и потока заряженных частиц для различных конфигураций электродов рассматривались во множестве работ, начиная с работы Таунсенда [1], в которой была выведена вольт-амперная характеристика для системы электродов, представляющих собой коаксиальные цилиндры (точные решения для этой геометрии получены в работах [3,7]). Уравнение (1) может быть решено аналитически в одномерных случаях со сферической, цилиндрической и плоской симметриями (см., например, [8]); ряд нетривиальных решений был указан в работах [9,10]. Для электродов относительно сложной геометрии в большинстве исследований используется гипотеза Дейча [4] о том, что пространственный заряд слабо искажает эквипотенциальные поверхности и линии электрического поля, а их

геометрию можно определить из решения линейного уравнения Лапласа для потенциала поля

$$\nabla^2\Phi = 0.$$

К подобным исследованиям можно отнести и работы, основанные на  $\theta$ -методе, предложенном Попковым [11]. Понятно, что приближение Дейча является обоснованным лишь при малых токах коронного разряда, когда создаваемое пространственным зарядом электрическое поле мало по сравнению с внешним полем. При относительно большом токе, в частности в предельном случае, когда его величина ограничивается влиянием объемного заряда, это приближение, конечно, является достаточно грубым [12]. Тем не менее приближение Дейча в силу геометрических причин естественным образом выполняется для ситуаций с высокой симметрией (в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрии задачи). Кроме того, для двумерного движения заряженных частиц в работах [10,13] был выявлен целый ряд ситуаций, когда это приближение приводит к точному решению задачи.

Значительный интерес традиционно вызывает анализ коронного разряда для геометрии электродов „острие—плоскость“ [14–21]. В большинстве работ используется аппроксимация формы острия гиперболоидом вращения. В рамках приближения Дейча это соответствует тому, что эквипотенциальные поверхности будут гиперболоидами, а силовые линии поля и линии тока — эллипсами. Исключением является работа [21], где для распределения электрического поля использовалась аппроксимация полем точечного заряда, расположенного над проводящей плоскостью.

Следует отметить, что задача о рассмотрении влияния объемного разряда на протекание тока при коронном

разряде во многом аналогична задаче о стационарном свободном движении заряженных частиц в вакууме, описываемом уравнением 4-го порядка [22]:

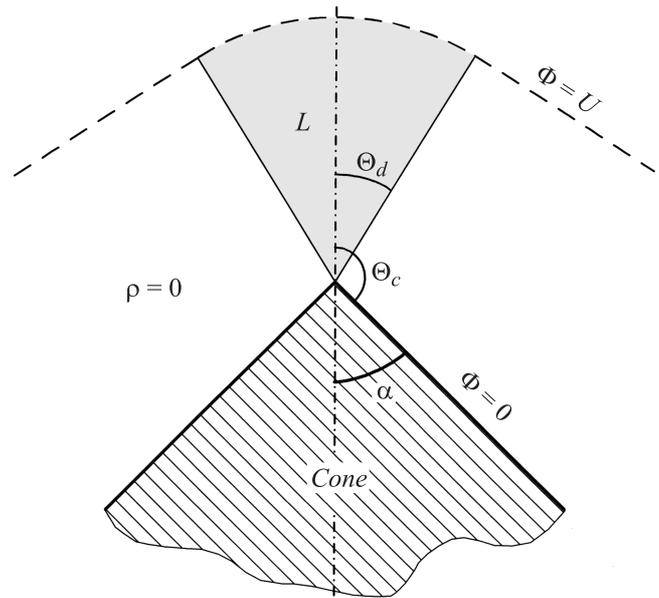
$$\nabla(\nabla^2(\nabla\Psi)^2\nabla\Psi) = 0, \quad (2)$$

обладающим аналогичным уравнению (1) симметриями. Здесь  $\Psi$  — потенциал скорости, т.е. такая скалярная функция, что  $\mathbf{v} = \nabla\Psi$  (для дрейфового движения, описываемого уравнением (1), справедливо  $\Psi \approx \Phi$ ). Для этого уравнения помимо ряда точных решений для потока частиц во всем пространстве [22] известно частное решение Пирса [23], являющееся сшивкой одномерного решения уравнения (2), описывающего сильноточный параллельный пучок электронов, и уравнения Лапласа для потенциала поля в области вне пучка. Конструкцию электродов, соответствующую этому решению, в литературе называют пушкой Пирса.

Известно, что внешняя зона коронного разряда с острий делится на две области: область дрейфа, где имеется объемный заряд, и область, где заряды отсутствуют (линии электрического поля, относящиеся к этой области, начинаются вне зоны ионизации). Численный расчет стационарной униполярной короны, учитывающий это обстоятельство, проводился, например, в работах [24,25]. Целенаправленно возможность построения аналитических решений, учитывающих финитность области дрейфа, для коронного разряда не изучалась. Вместе с тем процессы, аналогичные происходящим в коронном разряде, имеют место и при эмиссии заряженных капель с вершин конусов Тейлора [26], формирующихся на поверхности жидкости в электрическом поле. В работе [27] в предположении о том, что подвижность капель в окружающем газе — постоянна, а область дрейфа — коническая, были получены решения для распределения электрического поля вблизи вершины жидкого конуса, по структуре напоминающие решения Пирса. Для этих решений потенциал электрического поля корневым образом зависит от расстояния до вершины конуса  $\Phi \propto r^{1/2}$ , что обуславливается требованием равновесия жидкости [26].

В настоящей работе рассмотрим обобщение уравнения (1) на случай, когда подвижность носителей заряда зависит от напряженности электрического поля степенным образом. Как будет показано, задача допускает широкий класс точных частных решений, представляющий собой сшивку сферически симметричных решений для потенциала поля в области дрейфа, соответствующих режиму ограничения тока объемным зарядом, и самоподобных решений в области без объемного заряда. При этом активный электрод представляет собой идеальный конус; конической, как и в работе [27], является область дрейфа (см. рис. 1). Основное отличие рассматриваемой задачи от задачи из работы [27] заключается в том, что в нашем случае не требуется выполнение специфического условия  $\Phi \propto r^{1/2}$ , ограничивающего возможный вид потенциала.

Для модели коронного разряда, основанной на подобных решениях, зона ионизации является точечной.



**Рис. 1.** Схематически изображена геометрии задачи. Заряд дрейфует от коронирующей вершины конического электрода с углом полураствора  $\alpha$  внутрь телесного угла с углом полураствора  $\Theta_d$ . В области  $\Theta_d < \theta < \Theta_c$  объемный электрический заряд отсутствует.

Это соответствует предельному случаю, в котором радиус кривизны острия активного электрода и радиус зоны ионизации малы по сравнению с масштабом всей системы, в частности с межэлектродным расстоянием. Действительно, в режиме насыщения именно объемный заряд, а не геометрия вершины коронирующего острия определяет распределение электрического поля на периферии [9]. Это, в частности, хорошо иллюстрируют точные решения для одномерных случаев (соответствующие решения приведены, например, в [8,18]). На бесконечном удалении от источника заряженных частиц заряд над собственным полем электрода.

Необходимо отметить, что модели, основанные на сферически симметричных решениях в области дрейфа, уже использовались для моделирования коронного разряда. Так, в работе [28] исследовался коронный разряд в системе электродов, представляющих собой концентрические сферы. Автор работы при этом отмечал, что хотя такая система не реализуема на практике, она может служить приближением при рассмотрении геометрии электродов „сфера–полусфера“. В работе [29] при анализе системы „острие–плоскость“ авторы заменяли ее системой концентрических сфер. Однако использование сферически симметричных решений для потенциала поля не обосновывалось возможностью их сшивки с решениями уравнения Лапласа вне области дрейфа, а было формальным. Сферическим симметричным полагали поток ионов авторы работ [30,31], заменяя рассмотрение задачи в реальной геометрии „игла–плоскость“ на геометрию „сфера–плоскость“. Также искусственным являлось приближение границы области дрейфа конусом

в работе [32]. Из нашего рассмотрения следует, что сферическая симметрия распределения потенциала поля и коническая форма области дрейфа естественным образом возникают при рассмотрении коронного разряда с идеального конического острия.

План работы следующий. В разд. 1 выписаны уравнения движения заряженных частиц во внешней зоне униполярного коронного разряда постоянного тока. В разд. 2 строится точное решение для распределений электрического поля и плотности заряда при коронном разряде с вершины идеального конического электродов. В следующем разд. 3 проводится анализ полученных решений, в частности, рассматривается зависимость конического электрода. Раздел 4 посвящен рассмотрению геометрии электродов „острие–плоскость“. В рамках приближенной модели, основанной на использовании линейной суперпозиции двух точных решений для потенциала поля в области дрейфа, получено распределение плотности тока ионов по плоскому электроду, прекрасно согласующееся с эмпирической аппроксимацией Варбурга [33]. Наконец, разд. 5 содержит наши заключительные замечания.

## 1. Исходные уравнения

Рассмотрим стационарное дрейфовое движение заряженных частиц во внешней зоне униполярного коронного разряда. Положим, что скорость дрейфа носителей заряда ( $\mathbf{v}$ ) связана с напряженностью электрического поля ( $\mathbf{E}$ ) соотношением

$$\mathbf{v} = \mu \mathbf{E}, \quad (3)$$

где  $\mu$  — подвижность, которую по аналогии в работе [16] будем считать степенной функцией напряженности поля

$$\mu = \mu_0 \left( \frac{|\mathbf{E}|}{E_0} \right)^\nu. \quad (4)$$

Здесь  $E_0$  — характерное значение напряженности поля, для которого удобно положить  $E_0 = U/L$ , где  $L$  — межэлектродное расстояние, а  $U$  — приложенная разность потенциалов;  $\nu$  — постоянный показатель, который принимает значения в диапазоне  $-0.5 < \nu < 0.5$  для различных отношений  $E_0/n$ , где  $n$  — концентрация газа [16];  $\mu_0$  — постоянная, характеризующая среднюю подвижность носителей заряда в межэлектродном промежутке. При относительно малых  $E_0/n$  можно считать  $\nu = 0$ ; в этом случае  $\mu = \mu_0$ .

Вектор напряженности электростатического поля (для него  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ) может быть определен как градиент скалярной функции — потенциала электрического поля

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi.$$

Распределение потенциала поля описывается уравнением Пуассона

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (5)$$

где  $\rho$  — плотность заряда,  $\varepsilon$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды. Для стационарного потока

заряженных частиц уравнение непрерывности имеет вид

$$\nabla \mathbf{j} = 0,$$

где  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  — плотность электрического тока. С учетом (3) его можно записать в форме

$$\nabla(\mu\rho\nabla\Phi) = 0.$$

Подставляя сюда зависимость подвижности от напряженности поля (4), получим

$$\nabla(\rho|\nabla\Phi|^\nu\nabla\Phi) = 0. \quad (6)$$

Отметим, что из уравнений (5) и (6) можно исключить плотность заряда  $\rho$ , что приводит к единственному нелинейному уравнению третьего порядка

$$\nabla(\nabla^2\Phi|\nabla\Phi|^\nu\nabla\Phi) = 0,$$

являющемуся обобщением уравнения (1).

## 2. Точное решение для конического острия

Будем искать решение уравнений (5) и (6) в виде

$$\Phi(r, \theta) = UA(\theta) \left( \frac{r}{L} \right)^\gamma, \quad (7)$$

$$\rho(r, \theta) = -\varepsilon UL^{-2}B(\theta) \left( \frac{r}{L} \right)^{\gamma-2}, \quad (8)$$

где  $r$  — расстояние от вершины конуса,  $\theta$  — полярный угол, отсчитываемый от оси симметрии,  $A$  и  $B$  — безразмерные функции угла. Вектор плотности электрического тока для этой подстановки расписывается через компоненты  $r$  и  $\theta$  как

$$\mathbf{j} = \mu\varepsilon U^2 L^{-3} \left( \frac{r}{L} \right)^{2\gamma-3} \{\gamma BA, BA_\theta\}. \quad (9)$$

Представление решения в виде (7) и (8) соответствует разделению переменных в сферической системе координат. Распределения электрического поля и плотности заряда, описываемые этими выражениями, являются масштабно инвариантными (самоподобными) с показателем  $\gamma$ . Сходные зависимости в двухмерном случае (переменные разделялись в полярных координатах) рассматривались в работе [34,35] применительно к анализу дальней асимптотики для дрейфового движения заряженных частиц в геометрии „провод–плоскость“. Что касается свободного движения заряженных частиц, описываемого уравнением (2), аналогичная редукция использовалась в ряде работ [22,36–39].

Подстановка (7) и (8) в (5) и (6) приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений на угловые распределения потенциала электрического поля и плотности заряда:

$$\gamma(\gamma+1)A + A_{\theta\theta} + A_\theta \operatorname{ctg} \theta = B, \quad (10)$$

$$\gamma(2\gamma + \nu\gamma - \nu - 1)CA \sin \theta + (CA_\theta \sin \theta)_\theta = 0, \quad (11)$$

где мы для удобства ввели вспомогательную функцию  $C(\theta)$ :

$$C = B(\gamma^2 A^2 + A_\theta^2)^{\nu/2}.$$

Видно, что в частном случае, когда

$$\gamma = \frac{1 + \nu}{2 + \nu}, \quad (12)$$

первое слагаемое в левой части (11) обращается в нуль (аналогичный случай  $\gamma = 0$  описывает асимптотическое распределение потока частиц для системы электродов „гиперболоид вращения — плоскость“ [18]). Тогда это уравнение может быть проинтегрировано

$$CA_\theta \sin \theta = \text{const}.$$

Поскольку на оси симметрии задачи ( $\theta = 0$ ) напряженность поля имеет лишь радиальную компоненту ( $A_\theta = 0$ ) и, кроме того,  $\sin(0) = 0$ , то при конечном  $C(0)$  константу интегрирования следует положить равной нулю. Тогда уравнение непрерывности примет простой вид

$$BA_\theta = 0, \quad (13)$$

где мы учли, что

$$(\gamma^2 A^2 + A_\theta^2)^{\nu/2} > 0.$$

В таком случае, как видно из (9), угловая составляющая плотности тока всюду равна нулю.

Уравнение (13) разделяется на две ветви:  $A_\theta = 0$  и  $B = 0$ . Как следствие, задача допускает два типа решений. С учетом уравнения (10) и нормировочного условия  $A(0) = 1$ , первое решение имеет вид

$$A = 1, \quad B = \gamma(\gamma + 1). \quad (14)$$

Оно описывает сферически симметричный дрейф заряженных частиц от вершины конического электрода в диапазоне углов  $0 \leq \theta \leq \Theta_d$  (см. рис. 1). Условие  $\theta = \Theta_d$  задает коническую границу области дрейфа. Решение (14) естественным образом обеспечивает выполнение условий симметрии  $A_\theta(0) = 0$  и  $B_\theta(0) = 0$ , а также условия отсутствия потока через границу области дрейфа:  $A_\theta(\Theta_d) = 0$ .

Для второго типа решений объемный электрический заряд отсутствует, а распределение электрического поля определяется уравнением Лапласа, которое сводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\gamma(\gamma + 1)A + A_{\theta\theta} + A_\theta \text{ctg} \theta = 0.$$

Искомое решение в этом случае имеет вид

$$A = c_1 P_\gamma(\cos \theta) + c_2 P_\gamma(-\cos \theta), \quad B = 0, \quad (15)$$

где  $P_\gamma$  — функция Лежандра порядка  $\gamma$ , а  $c_1$  и  $c_2$  — некоторые постоянные. Обозначим угол полураствора конического электрода за  $\alpha$  (его поверхность задается уравнением  $\theta = \Theta_c \equiv \pi - \alpha$ ). Решение (15) реализуется вне области дрейфа в диапазоне углов  $\Theta_d \leq \theta \leq \Theta_c$  (см. рис. 1).

Потребуем выполнение условий равенства нулю потенциала на поверхности конического электрода:  $A(\Theta_c) = 0$ , а также непрерывности обеих компонент (радиальной и полярной) электрического поля на границе области дрейфа:  $A(\Theta_d) = 1$  и  $A_\theta(\Theta_d) = 0$ , соответственно. Граничные условия при подстановке в них решения (15) принимают вид

$$c_1 P_\gamma(\cos \Theta_c) + c_2 P_\gamma(-\cos \Theta_c) = 0,$$

$$c_1 P_\gamma(\cos \Theta_d) + c_2 P_\gamma(-\cos \Theta_d) = 1,$$

$$c_1 P'_\gamma(\cos \Theta_d) - c_2 P'_\gamma(-\cos \Theta_d) = 0,$$

где  $P'_\gamma$  обозначает производную функции Лежандра по аргументу. Поскольку условий — три, то они определяют постоянные интегрирования  $c_1$  и  $c_2$ , а также угол  $\Theta_d$ . Свободными параметрами задачи при этом являются угол полураствора конического электрода  $\alpha$  и показатель  $\gamma$ . Находим для констант  $c_1$  и  $c_2$ :

$$c_1 = \frac{P_\gamma(\cos \alpha)}{P_\gamma(\cos \alpha)P_\gamma(\cos \Theta_d) - P_\gamma(-\cos \alpha)P_\gamma(-\cos \Theta_d)}, \quad (16)$$

$$c_2 = \frac{P_\gamma(-\cos \alpha)}{P_\gamma(\cos \alpha)P_\gamma(\cos \Theta_d) - P_\gamma(-\cos \alpha)P_\gamma(-\cos \Theta_d)}. \quad (17)$$

При этом связь между углами полураствора области дрейфа  $\Theta_d$  и конического электрода  $\alpha$  задается уравнением

$$\frac{P'_\gamma(\cos \Theta_d)}{P'_\gamma(-\cos \Theta_d)} = -\frac{P_\gamma(-\cos \alpha)}{P_\gamma(\cos \alpha)}. \quad (18)$$

Таким образом, на основе самоподобных представлений (7) и (8) для неизвестных функций  $\Phi$  и  $\rho$  получены точные решения (14) и (15) исходных уравнений (5) и (6) в области дрейфа носителей заряда и в области, где объемный заряд отсутствует. Их удастсяшить на границе этих областей, удовлетворив всем необходимым граничным условиям. Возможность подобной сшивки связана с тем, что при выполнении условия (12) уравнение (11) редуцируется к простому факторизованному уравнению (13), дающему в конечном итоге две совместимых ветви решений. Важно, что для найденных решений ограниченность занимаемой пространственным зарядом области, являющаяся характерной чертой коронного разряда с острий [24,25], получается естественным образом. Для сравнения в моделях из работ [15,16,29] конечность углового размера области дрейфа вводится искусственно — из соображений соответствия экспериментальным данным.

Необходимо отметить, что в частном случае, когда  $\nu = 0$ , постоянные решения совпадают с решениями задачи о потоке микрокапель, эмитируемых с вершины жидкого конуса [27]. В этой задаче решения рассматривались в сочетании с дополнительным условием — условием баланса капиллярных и электростатических сил на поверхности жидкого конуса, выполнения которого в нашем случае не требуется.

### 3. Анализ решения

В предыдущем разделе было получено двухпараметрическое семейство точных решений для распределений электрического поля и плотности заряда во внешней зоне коронного разряда с конического электрода. Они задаются выражениями (7) и (8) в сочетании с соотношениями (12), (14)–(18). Параметрами решений являются угол полураствора конического электрода  $\alpha$  и показатель зависимости подвижности от напряженности поля  $\nu$ . Как показывает анализ соотношения (18), при заданном  $\nu$  решения существуют при углах полураствора конуса в диапазоне

$$0 < \alpha \leq \alpha_m,$$

где предельное значение угла  $\alpha_m = \alpha_m(\nu)$  определяется из условия, что функция Лежандра  $P_\gamma$  обращается в нуль:

$$P_\gamma(-\cos \alpha_m) = 0.$$

При изменении показателя  $\nu$  в диапазоне  $-1/2 < \nu < 1/2$  (а показателя  $\gamma$  соответственно в диапазоне  $1/3 < \gamma < 3/5$ ) угол  $\alpha_m$  будет меняться от значения  $28.2^\circ$  до  $59.9^\circ$ . При  $\nu = 0$  и, следовательно,  $\gamma = 1/2$  будет  $\alpha_m \approx 49.3^\circ$ , что соответствует так называемому углу Тейлора [26]. Соответствующие уравнению (18) зависимости угла полураствора области дрейфа от угла  $\alpha$  для различных значений  $\nu$  представлены на рис. 2. Видно, что угловой размер области дрейфа монотонно убывает при росте угла раствора конического электрода, причем производная функции  $\Theta_d(\alpha)$  расходитесь на границах интервала допустимых значений  $\alpha$ . Для определения характера зависимостей  $\Theta_d$  от  $\alpha$  вблизи сингулярностей требуется построение аналитических асимптотик.

Функция Лежандра  $P_\gamma(\xi)$  в окрестности точки  $\xi = -1$  может быть аппроксимирована выражением [40]

$$P_\gamma(\xi) \approx \frac{\sin(\gamma\pi)}{\pi} \ln(1 + \xi),$$

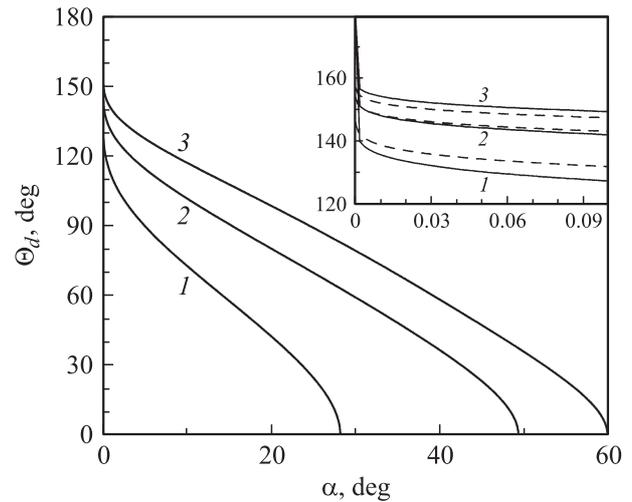
а в окрестности точки  $\xi = 1$  — выражением

$$P_\gamma(\xi) \approx 1 - \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2} (1 - \xi).$$

Подставляя их в (18), получим для предела  $\alpha \rightarrow 0$  в основном порядке

$$(\pi - \Theta_d)^2 \approx -\frac{2}{\gamma(\gamma + 1) \ln \alpha}, \quad (19)$$

т.е. угол  $\Theta_d$  крайне медленно стремится к  $\pi$ , что соответствует расширению области дрейфа на все пространство. Как видно из графиков на рис. 2, даже при очень малых углах раствора конического электрода, например при  $\alpha \approx 0.01^\circ$ , угловой размер области без объемного заряда оказывается весьма существенным:  $(\pi - \Theta_d) \approx 32^\circ$  при  $\nu = 0$ .



**Рис. 2.** Угол области дрейфа  $\Theta_d$  в зависимости от угла полураствора конического электрода  $\alpha$  для трех различных значений показателя  $\nu = -0.5$  (1),  $0$  (2),  $0.5$  (3). На вставке — та же зависимость в области малых значений  $\alpha$ ; сплошные линии — численный расчет, штриховые линии — аналитическая асимптотика (19).

Действуя аналогично, находим для противоположного предела  $\alpha \rightarrow \alpha_m$ :

$$\Theta_d^2 \approx \frac{4P'_\gamma(-\cos \alpha_m) \sin(\gamma\pi) \sin \alpha_m}{\gamma\pi(\gamma + 1)P_\gamma(\cos \alpha_m)} (\alpha_m - \alpha),$$

т.е. угол раствора области дрейфа обращается в нуль корневым образом. При  $\alpha = \alpha_m$  объемного заряда в пространстве над конусом нет, а распределение потенциала поля будет определяться решением  $A = P_\gamma(\cos \theta)$ .

Необходимо отметить, что рассматриваемые решения соответствуют режиму ограничения тока пространственным зарядом. При наличии протяженной коронирующей области этот предельный случай соответствует обращению в нуль напряженности поля на активном электроде по корневому закону:  $E \approx x^{1/2}$ , где  $x$  — расстояние до электрода (см., например, [18]). В нашем случае  $E \approx r^{\nu-1}$ , т.е. поле обращается в бесконечность при  $r \rightarrow 0$ . Это связано с особенностью геометрии задачи — коронирующая область на электроде в рассматриваемой модели является точечной. Действительно, решением для сферически симметричного распределения электрического поля в режиме ограничения тока пространственным зарядом является [16]

$$E \approx r^{-2} (r^{2\nu+3} - r_0^{2\nu+3})^{1/(\nu+2)},$$

где  $r_0$  — радиус активного электрода (это решение формально соответствует системе электродов, представляющих собой концентрические сферы). Данная зависимость переходит в используемую нами при  $r_0 \rightarrow 0$ , т.е. при условии малости радиуса кривизны вершины острейшего электрода и размера зоны ионизации в сравнении с межэлектродным расстоянием.

Примечательно, что построенные выше решения выходят за рамки приближения Дейча. Действительно, в отсутствие пространственного заряда распределение потенциала электрического поля вблизи вершины конуса будет описываться выражением

$$\Phi(r, \theta) \approx r^\kappa P_\kappa(\cos \theta).$$

Связь между показателем  $\kappa$  и углом полураствора конического электрода  $\alpha$  определяется из условия эквипотенциальности его поверхности

$$P_\kappa(-\cos \alpha) = 0.$$

В соответствии с этим выражением показатель  $\kappa$  монотонно растет с увеличением угла раствора. За исключением тривиального случая, когда  $\alpha = \alpha_m(\nu)$  и  $\Theta_d = 0$ , форма эквипотенциальных поверхностей в отсутствие и при наличии пространственного заряда будет различной, причем степень их деформации увеличивается при уменьшении угла раствора. Так, для тонких острий (т.е. в пределе  $\alpha \rightarrow 0$ ) имеем для потенциала электрического поля без учета объемного заряда [41]

$$\Phi \propto r^\kappa \left[ 1 + 2\kappa \ln \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \right], \quad \kappa \approx -\frac{1}{2 \ln \alpha},$$

что соответствует эквипотенциальным поверхностям, задаваемым уравнением

$$r(\theta) = \frac{2r(0)}{1 + \cos \theta}.$$

Очевидно, что они значительно отличаются от эквипотенциальных поверхностей  $r(\theta) = r(0)$  для сферически симметричного распределения потенциала  $\Phi \propto r^\nu$ , учитывающего влияние объемного заряда. Как следствие, они не могут использоваться для последних в качестве какого-либо приближения.

Обсудим теперь характер зависимости тока коронного разряда от угла раствора конического электрода. В соответствии с формулами (4), (7), (9) и (14) для радиальной компоненты плотности тока справедливо

$$j(r) = \frac{\gamma^{\nu+2}(\gamma + 1)\mu_0 \epsilon U^2}{Lr^2},$$

где связь между показателями  $\gamma$  и  $\nu$  определяется выражением (12). Тогда ток насыщения коронного разряда на коническом электроде задается выражением

$$\begin{aligned} I &= 2\pi r^2(1 - \cos \Theta_d)j(r) \\ &= \frac{2\pi\gamma^{\nu+2}(\gamma + 1)\mu_0 \epsilon U^2}{L}(1 - \cos \Theta_d), \end{aligned} \quad (20)$$

т.е. полный ток, как это характерно для коронного разряда (см., например, [6]), пропорционален квадрату приложенной разности потенциалов.

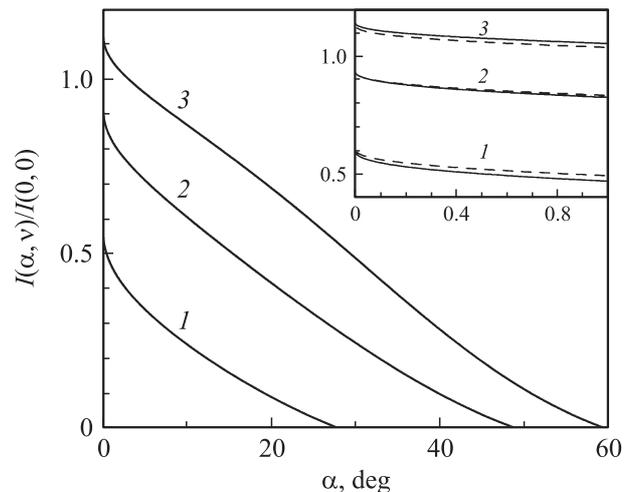
Коэффициент при  $U^2$  в вольт-амперной характеристике (20) определяется геометрией электродов, а также

свойствами окружающего газа (в частности, параметрами  $\mu_0$  и  $\nu$ ). Соответствующая формуле (20) зависимость тока от угла полураствора конического электрода при фиксированной разности потенциалов  $U$  для различных значений показателя  $\nu$  изображена на рис. 3. Видно, что ток насыщения монотонно убывает при увеличении угла раствора. Экспериментально уменьшение тока при увеличении угла раствора остряя наблюдалось в работе [42]. Наиболее ощутимой эта зависимость становится для малых углов, т.е. для наиболее широко используемых электродов в форме иглы. В пределе  $\alpha \rightarrow 0$ , используя (19), можно найти угловую зависимость тока насыщения в явном виде

$$I \approx \frac{4\pi\gamma^{\nu+2}(\gamma + 1)\mu_0 \epsilon U^2}{L} \left( 1 + \frac{1}{2\gamma(\gamma + 1) \ln \alpha} \right). \quad (21)$$

Из рис. 3 также видно, что ток разряда увеличивается при увеличении параметра  $\nu$  при фиксированном  $\mu_0$ . Это объясняется перераспределением объемного заряда над вершиной конического электрода при изменении  $\nu$  (увеличение  $\nu$  означает увеличение подвижности ионов вблизи вершины и уменьшение подвижности на периферии). Как следствие, при больших  $\nu$  уменьшается экранирующее влияние пространственного заряда, а ток увеличивается.

При построении решений для распределения потенциала во внешней зоне коронного разряда с конического остряя мы не задавали геометрию пассивного электрода. Формально за противоэлектрод можно принять любую эквипотенциальную поверхность, в частности поверхность  $\Phi(r, \theta) = U$ . В таком случае при  $0 \leq \theta \leq \Theta_d$  электрод-коллектор имеет сферическую форму с радиусом  $L$ . Геометрия электродов „острие–полусфера“, близкая к рассмотренной нами, использовалась в экспериментальных работах [43,44] (см. также ссылки в работе [28]). Она имеет определенные преимущества перед



**Рис. 3.** Зависимость тока насыщения  $I$  от угла полураствора конического электрода  $\alpha$  при фиксированной разности потенциалов  $U$  для  $\nu = -0.5$  (1), 0 (2), 0.5 (3). На вставке — та же зависимость в области малых углов  $\alpha$ ; штриховые линии соответствуют аналитической асимптотике (21).

более распространенной системой „острие—плоскость“. Так, в работе [43] отмечалось, что использование полусферического некоронирующего электрода вместо плоского значительно (приблизительно в 1.7 раза) увеличивает предельный ток разряда. В рамках нашей модели при  $\nu = 0$  область дрейфа с углом раствора, равным  $\pi$ , соответствует острию с углом полураствора  $\alpha \approx 15^\circ$ .

#### 4. Закон Варбурга для системы „острие—плоскость“

Для полученных выше точных решений зависимость плотности тока на пассивном электроде от угла  $\theta$  имеет ступенчатый характер

$$j(\theta) = \begin{cases} j(0), & 0 \leq \theta \leq \Theta_d, \\ 0, & \theta > \Theta_d, \end{cases}$$

что является следствием сферической симметрии потока заряженных частиц в области дрейфа. Для системы „острие—плоскость“ (будем считать, что расстояние от острия до плоского электрода есть  $h$ , а его поверхность задается уравнением  $r \cos \theta = h$ ) распределения электрического поля и потока ионов обладают лишь осевой симметрией. Эмпирически для данной геометрии была установлена следующая угловая зависимость плотности тока на плоском электроде [33]:

$$j(\theta_p) \approx j(0) \cos^m \theta_p, \quad 0^\circ \leq \theta_p < 60^\circ, \quad (22)$$

где  $m \approx 4.65$  для отрицательной короны и  $m \approx 4.82$  для положительной, а при углах, больших  $65^\circ$ , ток практически отсутствует в силу ограниченности области дрейфа. Для того чтобы подчеркнуть, что распределение относится к плоскости электрода, мы использовали обозначение  $\theta_p$  для полярного угла.

Если, как и раньше, в качестве острия взять идеальный конус и считать область ионизации точечной, то в некоторой окрестности его вершины будут справедливы полученные в разд. 2 решения. В частности, при  $r \ll h$  эквипотенциальные поверхности в области дрейфа будут близкими к сферическим. Более удаленные от острия эквипотенциальные поверхности будут деформироваться под влиянием противоиэлектрода, превращаясь в плоскости при  $r \cos \theta \rightarrow h$ .

В работе [21] распределение электрического поля в системе „игла—плоскость“ было предложено аппроксимировать полем точечного заряда над плоскостью. Последнее легко вычисляется в рамках метода изображений при симметричном расположении двух зарядов противоположного знака относительно плоскости. Представленный выше анализ показывает, что в режиме ограничения тока объемным зарядом для описания распределения поля вблизи конического острия следует использовать не потенциал точечного заряда  $\Phi \propto 1/r$ , а потенциал  $\Phi \propto r^\nu$ , где значение показателя  $\nu$ , зависящее от параметра модели  $\nu$ , лежит в диапазоне  $1/3 < \nu < 3/5$ . Пусть  $\nu = 0$ , что соответствует

относительно малым  $E_0/n$  (в этом случае подвижность не зависит от напряженности поля). Это дает основание взять в качестве аппроксимации потенциала электрического поля в области дрейфа линейную суперпозицию двух точных решений вида (7) с  $\gamma = 1/2$ , расположив особые точки зеркально симметрично относительно плоскости пассивного электрода:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{U}{\sqrt{2h}} [r^{1/2} - (r^2 - 4hr \cos \theta + 4h^2)^{1/4} + (2h)^{1/2}]. \quad (23)$$

Понятно, что для нелинейного уравнения (1) суперпозиция пары точных решений, представленная выражением (23), не является новым точным решением. Тем не менее она дает качественно верное распределение поля в области дрейфа. Как несложно заметить, вблизи начала координат это выражение переходит в точное решение (7) с  $L = 2h$ ,  $\gamma = 1/2$  и  $A = 1$ , а на плоскости коллектора  $r \cos \theta = h$  оно обеспечивает постоянство потенциала ( $\Phi = U$ ). Проанализируем, что дает использование такой аппроксимации.

При анализе распределения тока по пассивному электроду удобно пользоваться известной формулой дрейфа заряда [45,46]

$$\frac{1}{\rho(t)} - \frac{1}{\rho(0)} = \frac{\mu_0}{\varepsilon} t, \quad (24)$$

где  $t$  — время движения носителя тока во внешней зоне коронного разряда. Действительно, комбинируя уравнение Пуассона (5) и уравнение непрерывности (6), в случае  $\nu = 0$  можно прийти к уравнению

$$\mathbf{v} \nabla \rho = \frac{\mu_0}{\varepsilon} \rho^2,$$

интегрирование которого вдоль линий тока и приводит к (24). Вблизи вершины конуса в соответствии в (8) имеем  $\rho \propto r^{-3/2}$ , т.е. плотность заряда обращается в бесконечность в особой точке. Тогда в формуле дрейфа (24) следует положить  $\rho(0) \rightarrow \infty$ , в результате чего она принимает простой вид

$$\rho = \frac{\varepsilon}{\mu_0} t^{-1}. \quad (25)$$

Воспользуемся этой зависимостью для нахождения распределения потока ионов в модельном потенциале (23).

Движение заряженных частиц определяется следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dr}{dt} = -\mu_0 \Phi_r, \quad r \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\mu_0}{r} \Phi_\theta. \quad (26)$$

Тогда линии тока вблизи оси симметрии задачи (т.е. при малых  $\theta$ ) задаются уравнением

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{\Phi_\theta}{\Phi_r} \approx -\frac{2h\theta}{r^{1/2}(2h-r)[(2h-r)^{1/2} + r^{1/2}]}.$$

В результате решения этого уравнения получим явное выражение для траекторий

$$\frac{\theta}{\theta_p} = \frac{2(2h-r)}{h + (2hr - r^2)^{1/2}}. \quad (27)$$

Несложно заметить, что угол, под которым ион стартует ( $\theta_0 \equiv \theta|_{r=0}$ ) связан с углом попадания иона на плоский противозлектрод  $\theta_p$  простым выражением  $\theta_0 = 4\theta_p$ .

Найдем теперь зависимость времени движения иона  $t$  от угла  $\theta_p$ . Из первого уравнения системы (26) получим вблизи оси симметрии

$$\mu_0 dt = -\frac{dr}{\Phi_r} \approx -\frac{\sqrt{2}hr}{U} \left[ \frac{2}{(2h-r)^{-1/2} + r^{-1/2}} + \frac{\theta^2 hr(4h+r)}{(2h-r)^{3/2}[(2h-r)^{1/2} + r^{1/2}]^2} \right].$$

Исключая отсюда переменную  $\theta$  при помощи полученного выше выражения для формы траектории (27) и затем интегрируя получившееся выражение по  $r$ , находим

$$t(\theta_p) \approx -\frac{\sqrt{2}h^2}{\mu_0 U} \left[ \ln(2\sqrt{2}+3) - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \theta_p^2 \left\{ \frac{189}{32} \ln(2\sqrt{2}+3) - \frac{103\sqrt{2}}{16} \right\} \right]. \quad (28)$$

На плоском электроде имеется лишь нормальная ему компонента плотности тока, которая с учетом (25) запишется как

$$j = -\frac{\mu_0 \rho \Phi_r}{\cos \theta_p} = -\frac{\varepsilon \Phi_r}{t(\theta_p) \cos \theta_p}.$$

Подставляя сюда выражения для потенциала (23) и времени движения (28), получим при малых углах

$$j(\theta_p) \approx j_0(1 - p\theta_p^2/2) \approx j_0 \cos^p \theta_p, \quad (29)$$

где

$$j_0 = \frac{\mu_0 \varepsilon U^2}{2h^3} \frac{3}{3 \ln(2\sqrt{2}+3) - 2\sqrt{2}} \approx 0.61 \frac{\mu_0 \varepsilon U^2}{h^3},$$

$$p = \frac{9}{16} \frac{71 \ln(2\sqrt{2}+3) - 74\sqrt{2}}{3 \ln(2\sqrt{2}+3) - 2\sqrt{2}} \approx 4.689.$$

Это соотношение соответствует закону Варбурга (22) с  $m = p$ . Видно, что полученное в рамках нашей модели значение показателя  $p$  с отличной точностью совпадает с его эмпирическим значением.

Несложно найти также угловую зависимость плотности тока для больших углов  $\theta_p$ , т.е. в пределе  $\theta_p \rightarrow \pi/2$ . Для этого выражение для модельного потенциала (23) достаточно рассмотреть в пределе  $h/r \rightarrow 0$ . Получим для потенциала в основном порядке

$$\Phi(r, \theta) \approx U + Uh^{1/2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{2r}}.$$

Подставляя это выражение в уравнения движения носителя заряда (26) и исключая из них время  $t$ , получим

$$\frac{d\theta}{dr} \approx \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{r}.$$

Интегрируя это уравнение, находим явное выражение для геометрии линий тока

$$\frac{r^2}{h^2} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta_p \cos^2 \theta_p}.$$

Исключая с помощью него переменную  $\theta$  из первого уравнения системы (26) и затем интегрируя получившееся выражение, находим время дрейфа

$$t(\theta_p) \approx -\frac{h^2}{\mu_0 U (\pi/2 - \theta_p)^{5/2}} \frac{4\Gamma(5/8)\Gamma(7/8)}{\sqrt{2\pi + \pi\sqrt{2}}},$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция. Наконец, используя формулу дрейфа заряда (25), получим искомое угловое распределение плотности тока по плоскому электроду при  $\theta_p \rightarrow \pi/2$ :

$$j(\theta_p) \approx j_1(\pi/2 - \theta_p)^4 \approx j_1 \cos^4 \theta_p, \quad (30)$$

где

$$j_1 = \frac{\mu_0 \varepsilon U^2}{8h^3} \frac{\sqrt{\pi + \pi/\sqrt{2}}}{\Gamma(5/8)\Gamma(7/8)} \approx 0.185 \frac{\mu_0 \varepsilon U^2}{h^3}.$$

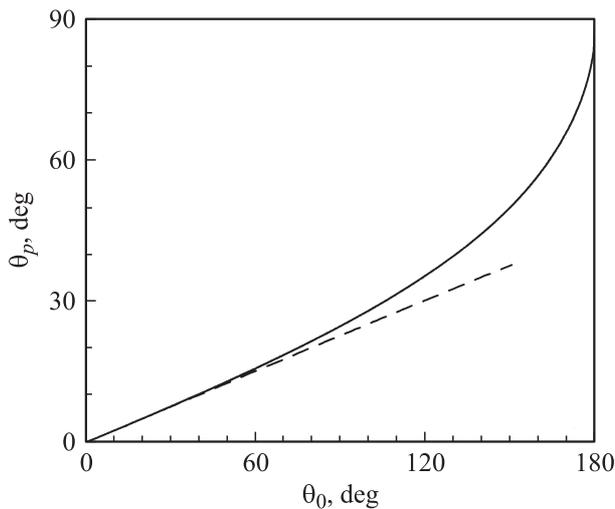
Это соответствует закону Варбурга с показателем  $m = 4$ , что также весьма близко к известному эмпирическому значению. Следует отметить, что близкие к  $\pi/2$  полярные углы заведомо выходят за пределы области дрейфа; так что рассмотрение данной асимптотики является формальным.

Таким образом, удается аналитически найти распределение плотности тока заряженных частиц по плоскости пассивного электрода для двух предельных случаев  $\theta_p \rightarrow 0$  и  $\theta_p \rightarrow \pi/2$ . Для углов во всем диапазоне  $0 \leq \theta_p < \pi/2$  уравнения движения (26) решались численно, что позволило найти геометрию линий тока и время дрейфа заряженных частиц между электродами. Рассчитанная зависимость угла попадания ионов на плоскость противозлектрода  $\theta_p$  от начального угла  $\theta_0$  приведена на рис. 4. Из него видно, что в рамках нашей модели характерный угол отсечки  $\theta_0 = 60^\circ$  соответствует углу вылета  $\theta_0 \approx 163^\circ$ . Это значение угла можно отождествить с углом полураствора области дрейфа  $\Theta_d$  для точечных решений разд. 2. Как следует из формулы (18), угол  $\Theta_d \approx 163^\circ$  реализуется для конических острий с чрезвычайно малыми углами раствора,  $\alpha \ll 1^\circ$ .

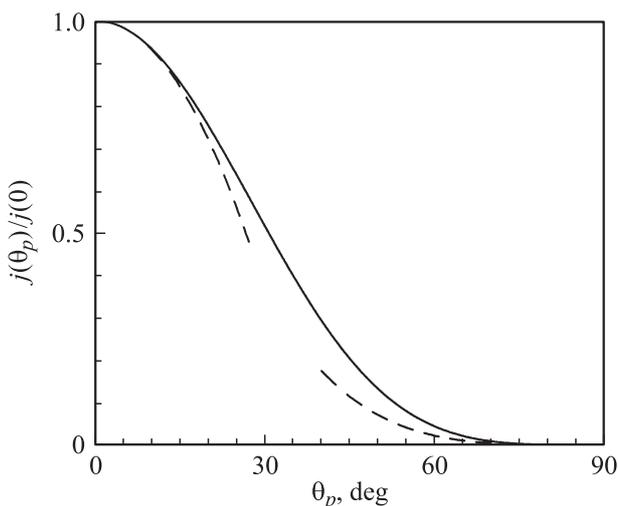
Угловая зависимость плотности тока на плоском электроде, как и для рассмотренных выше предельных случаев, находилась при помощи формулы дрейфа (25); она приведена на рис. 5. Результат численного решения в наиболее важном диапазоне углов  $0^\circ \leq \theta_p \leq 60^\circ$  с хорошей точностью аппроксимируется зависимостью

$$j(\theta_p) = j_0 \cos^m \theta_p, \quad m \approx 4.62, \quad (31)$$

что свидетельствует об отличном согласии в законе Варбурга. Для сравнения известная модель Сигмунда [16], в основе которой лежит предположение о



**Рис. 4.** Угол попадания заряженной частицы на плоский электрод  $\theta_d$  в зависимости от угла вылета с острия  $\theta_0$ . Сплошная линия — численный расчет, штриховая линия — аналитическая асимптотика.



**Рис. 5.** Угловая зависимость плотности тока на плоском электроде  $j(\theta_p)$ . Сплошная линия — численный расчет, штриховые линии — аналитические асимптотики (29) и (30).

постоянстве напряженности поля вдоль линий тока, дает для распределения плотности тока насыщения

$$j(\theta_p) \approx (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \theta_p)^{-3/2}.$$

Вблизи оси симметрии это выражение соответствует закону Варбурга с  $m = 6$  и на больших углах — с  $m = 3$ . В работах [15,18] для плотности тока на коллекторе было найдено  $j \approx \cos^3 \theta_p$ , т.е. для показателя справедливо  $m = 3$ . В работах [17,20,21] с использованием различных приближений была получена зависимость  $j \approx \cos^5 \theta_p$ , т.е.  $m = 5$ . Ряд более ранних теоретических оценок дается в обзоре [6]. Предложенная в настоящем разделе модель, приводящая к представленному асимптотиками (29) и (30), а также аппроксимацией (31)

угловому распределению плотности тока по плоскому электроду, обеспечивает наиболее точное соответствие эмпирическому закону Варбурга.

Полученные в этом разделе результаты соответствуют простейшему случаю, когда подвижность ионов постоянна. Понятно, что их можно обобщить на случай, когда подвижность зависит от напряженности поля (т.е.  $\nu \neq 0$ ); тогда показатель в законе Варбурга будет зависеть от свойства газа.

## Заключение

В настоящей работе предложена аналитическая модель коронного разряда с острия, учитывающая зависимость подвижности ионов от напряженности электрического поля. Она основана нашивке сферически симметричных решений для потенциала поля в области дрейфа и самоподобных решений в области без пространственного заряда, аналогичной использованной при рассмотрении потока заряженных капель в работе [27]. Предполагалось, что активный электрод представляет собой идеальный конус, причем коронирует лишь особая точка — вершина конуса. Также построена приближенная модель коронного разряда в геометрии „острие—плоскость“, для которой продемонстрировано отличное соответствие распределение плотности тока по пассивному электроду эмпирическому закону Варбурга.

Полученные точные частные решения могут использоваться для тестирования численных методов расчета полей во внешней зоне униполярного коронного разряда постоянного тока. В работе [24], где численно моделировался коронный разряд в геометрии „острие—плоскость“, отмечалось, что точность вычислений значительно падает для острий с малым радиусом кривизны вершины. Авторы связывали это со значительной неоднородностью электрического поля вблизи вершины острия. В предлагаемой аналитической модели острием является идеальной конус; радиус кривизны его вершины равен нулю.

Следует отметить, что в случае, если условие (12) на показатели  $\nu$  и  $\gamma$  не выполняется, решения уравнений (10) и (11) будут описывать дрейф ионов в ситуации, когда зона ионизации не является точечной, а распределена по поверхности электрода. В частном случае, когда активный электрод представляет собой иглу, подобный анализ был проведен в работе [47].

Подход, аналогичный использованному выше для описания протекания тока во внешней зоне коронного разряда на коническом электроде, может быть применен для клиновидного электрода. Для постоянной подвижности ионов решения, сходные по форме с построенными в разд. 2 на основе подстановки (7) и (8), будут соответствовать показателю  $\gamma = 1$ . Они описывают цилиндрически симметричный дрейф заряженных частиц от ребра клина в область с угловым размером  $\pi - \beta$ , где  $\beta$  — угол клина. В этой области  $\Phi \propto R$ , где  $R$  — расстояние от ребра. Вне области дрейфа электрическое поле будет однородным.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-08-00434) в рамках программы президиума РАН „Фундаментальные проблемы нелинейной динамики“ (проект 12-П-2-1023).

## Список литературы

- [1] *Townsend J.S.* // *Phil. Mag.* 1914. Vol. 28. P. 83–90.
- [2] *Peek F.W., Jr.* *Dielectric Phenomena in High Voltage Engineering.* New York: Mc Graw-Hill, 1929.
- [3] *Thomson J.J., Thomson G.P.* *Conduction of Electricity through Gases.* London: Cambridge University Press, 1933.
- [4] *Deutsch W.* // *Ann. Phys.* 1933. Col. 16. P. 588–612.
- [5] *Капцов Н.А.* Коронный разряд и его применение в электрофильтах. М.: Гостехиздат, 1947. 226 с.
- [6] *Sigmond R.S.* // *J. Electrostat.* 1986. Vol. 18. P. 249–272.
- [7] *Feng J.Q.* // *J. Electrostat.* 1999. Vol. 46. P. 37–48.
- [8] *Budd C., Hare R.* // *Proc. Roy. Soc. Long. A.* 1993. Vol. 443. P. 517–546.
- [9] *Felici N.J.* // *Direct Current.* 1963. Vol. 8. P. 252–260, 278–287.
- [10] *Smith S.A.* // *IMA J. Appl. Math.* 1987. Vol. 39. P. 189–214.
- [11] *Понков В.И.* // *Изв. АН СССР. ОТН.* 1953. Вып. 5. С. 664.
- [12] *Jones J.E., Davies M.* // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1992. Vol. 25. P. 1749–1759.
- [13] *Budd C.J., Wheeler A.A.* // *IMA J. Appl. Math.* 1988. Vol. 40. P. 1–14.
- [14] *Понков В.И.* // *Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт.* 1980. Вып. 2. С. 95–107.
- [15] *Henson B.L.* // *J. Appl. Phys.* 1981. Vol. 52. P. 709–715.
- [16] *Sigmond R.S.* // *J. Appl. Phys.* 1982. Vol. 53. P. 891–898.
- [17] *Henson B.L.* // *J. Appl. Phys.* 1984. Vol. 55. P. 150–157.
- [18] *Wintle H.J.* // *IEEE Trans. Electr. Insul.* 1986. Vol. 21. P. 365–373.
- [19] *Hare R.W., Hill R.M.* // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1991. Vol. 24. P. 398–406.
- [20] *Jones J.E.* // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1997. Vol. 453. P. 1033–1051.
- [21] *Ieta A., Kucerovsky Z., Greason W.D.* // *J. Electrostat.* 2005. Vol. 63. P. 143–154.
- [22] *Кирштейн П., Кайно Г., Уотерс У.* Формирование электронных пучков. М.: Мир, 1970. 600 с.
- [23] *Пурс Д.Р.* Теория и расчет электронных пучков. М.: Сов. Радио, 1956. 215 с.
- [24] *Adamiak K., Atten P.* // *J. Electrostat.* 2004. Vol. 61. P. 85–98.
- [25] *Atten P., Adamiak K., Khaddour B., Coulomb J.-L.* // *J. Optoelectron. Adv. Mater.* 2004. Vol. 6. P. 1023–1028.
- [26] *Taylor G.L.* // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 1964. Vol. 280. P. 383–397.
- [27] *De La Mora J.F.* // *J. Fluid Mech.* 1992. Vol. 243. P. 561–574.
- [28] *Morrow R.* // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1997. Vol. 30. P. 3099–3114.
- [29] *Halpern B., Gomer R.* // *J. Chem. Phys.* 1969. Vol. 51. P. 1031–1047.
- [30] *Amoruso V., Lattarulo F.* // *J. Electrostat.* 1997. Vol. 39. P. 41–52.
- [31] *Amoruso V., Lattarulo F.* // *J. Electrostat.* 2001. Vol. 51–52. P. 307–312.
- [32] *Kucerovsky Z., Greason W.D., Ieta A.* // *J. Electrostat.* 2001. Vol. 50. P. 147–157.
- [33] *Warburg E.* // *Wied. Ann.* 1899. Vol. 67. P. 69–83.
- [34] *Atten P.* // *Rev. Gen. Electr.* 1974. Vol. 83. P. 143–153.
- [35] *Wintle H.J.* // *IEEE Trans. Electr. Insul.* 1992. Vol. 27. P. 298–308.
- [36] *Finn J.M., Antonsen T.M., Manheimer W.M.* // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 1988. Vol. 16. P. 281–289.
- [37] *Boltachev G.Sh., Zubarev N.M.* // *Europhys. Lett.* 2006. Vol. 76. P. 36–41.
- [38] *Болтачев Г.Ш., Зубарев Н.М.* // *Письма в ЖТФ.* 2007. Т. 33. Вып. 21. С. 25–30.
- [39] *Boltachev G.Sh., Zubarev N.M., Zubareva O.V.* // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 77. P. 056607.
- [40] *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидных функций. М.: Изд. иностр. лит., 1952. 476 с.
- [41] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* *Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука, 1982. С. 32.
- [42] *Intra P., Tiprayawong N.* // *J. Electrostat.* 2010. Vol. 68. P. 254–260.
- [43] *Козлов Б.А., Соловьев В.И.* // *ЖТФ.* 2006. Т. 76. Вып. 7. С. 1–7.
- [44] *Li E.-N., Mac Alpine J.M.K.* // *IEEE Trans. Diel. Electr. Insul.* 2000. Vol. 7. P. 752–757.
- [45] *Townsend J.S.* // *Phil. Mag.* 1898. Vol. 45. P. 469–480.
- [46] *Waters R.T., Rickard T.E.S., Stark W.B.* // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 1970. Vol. 315. P. 1–25.
- [47] *Болтачев Г.Ш., Зубарев Н.М.* // *Письма в ЖТФ.* 2012. Т. 38. Вып. 8. С. 26–31.