Журнал технической физики, 2012, том 82, вып. 11

Краткие сообщения

01;03

Нелинейное взаимодействие двух составляющих движения при осаждении тяжелой частицы в сдвиговом течении

© Л.Х. Ингель

Научно-производственное объединение „Тайфун“,
249038 Обнинск, Калужская область, Россия
e-mail: ingeli@obninsk.ru

(Поступило в Редакцию 21 июня 2011 г. В окончательной редакции 21 февраля 2012 г.)

При движении тяжелых частиц в сдвиговом течении сила сопротивления зависит от числа Рейнольдса, следовательно, от модуля вектора скорости частицы относительно среды. Это приводит к нелинейному взаимодействию разных составляющих движения. Например, при оседании частицы в горизонтальном потоке воздуха с вертикальным сдвигом частица помимо вертикального приобретает и горизонтальное движение относительно воздуха. Эти две компоненты движения, влияя на число Рейнольдса, вносят вклад в коэффициент гидродинамического сопротивления и тем самым воздействуют друг на друга. Исследовано установившееся движение частицы в потоке с постоянным вертикальным сдвигом. Найден безразмерный критерий существенности рассматриваемого нелинейного эффекта. Показано, что в приповерхностном слое атмосферы при ураганных ветрах этот эффект может быть значительным.

Введение

В настоящей работе исследуется движение тяжелых частиц (частиц из вещества много плотнее среды — капель, песчинок и т. п.) в интенсивных сдвиговых течениях. Один из возможных конкретных примеров — приповерхностный слой атмосферы в тропических циклонах. На твердой или жидкой горизонтальной поверхности $z = 0$ (ось z направлена вертикально вверх) выполняется условие, близкое к условию прилипания. А уже на небольшой высоте $z = 10\,\mathrm{m}$ горизонтальное движение может достигать ураганной интенсивности (например, $30\,\mathrm{m/s}$ и более). Таким образом, вертикальные сдвиги скорости могут быть очень большими. Движение тяжелых частиц (например, брызг) в таком слое воздуха представляет значительный интерес (см., например, [1,2]) и библиографию в этих работах). При сильных сдвигах скорости должен существовать следующий нелинейный эффект. При вертикальном движении частицы в горизонтальном потоке воздуха с вертикальным сдвигом частица не только вовлекается в горизонтальное движение, но и вследствие ее инерции приобретает горизонтальное движение относительно среды. Вертикальная и горизонтальная составляющие движения относительно среды, влияя на число Рейнольдса, вносят вклад в коэффициент гидродинамического сопротивления и тем самым воздействуют друг на друга. Например, горизонтальное движение частицы относительно среды приводит к увеличению коэффициента сопротивления (по сравнению со случаем „чистого“ осаждения) и, следовательно, замедляет вертикальное движение частицы. Хотя движению тяжелых частиц в газообразных и жидких средах (прежде всего в атмосфере) посвящена обширная литература (см., например, [3–6]), законы движения частицы даже в простейшем сдвиговом потоке с учетом упомянутого нелинейного эффекта, насколько нам известно, в общем виде пока мало исследованы. Этому и посвящена настоящая работа.

1. Уравнения движения

В простейшем случае покоящейся среды вертикальное движение частицы в поле силы тяжести описывается уравнением [6]

$$\frac{dw}{dt} = -g - cw. \tag{1}$$

Здесь w — составляющая скорости частицы вдоль направленной вверх оси z, t — время, g — ускорение свободного падения, коэффициент сопротивления $c = \tau^{-1}$; τ — время вязкой релаксации [5,6]. Масштаб времени τ в случае выполнения закона Стокса для достаточно малых шарообразных частиц (в воздухе — для капель воды размерами до $50\,\mu\mathrm{m}$) выражается через коэффициент молекулярной вязкости среды η, радиус частицы R и ее плотность ρ_p [5,6]:

$$\tau_S = 2R^2\rho_p/9\eta, \quad c_S = 1/\tau_S. \tag{2}$$

Для частиц бóльших размеров и веса коэффициент сопротивления c и время τ зависят от значения числа Рейнольдса для частицы

$$c = c(\mathrm{Re}), \quad \mathrm{Re} = \frac{2R\rho|\mathbf{v}|}{\eta} = \frac{2R|\mathbf{v}|}{\nu}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}. \tag{3}$$

Здесь ρ — плотность среды (воздуха), ν — коэффициент ее кинематической вязкости, $\mathbf{v}$ — вектор скорости частицы относительно среды[1].

В настоящей работе эта хорошо известная задача обобщается на случай, когда частица падает в горизонтальном потоке с интенсивным вертикальным сдвигом (скорость потока $U(z)$ считаем известной и направленной вдоль горизонтальной оси x). Взаимодействуя с потоком, частица помимо вертикального вовлекается и в горизонтальное движение. Но при этом в силу вертикального перемещения частицы и ее инерции ее горизонтальная скорость u может существенно отличаться от скорости движения среды: $u \neq U(z)$. Модуль скорости частицы относительно среды, который определяет число Рейнольдса и коэффициент сопротивления,

$$|\mathbf{v}| = \left[w^2 + (u-U)^2\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Горизонтальная проекция уравнения движения частицы имеет вид

$$\frac{du}{dt} = -c(u-U). \tag{5}$$

Если рассматривать x и z как лагранжевы координаты частицы, то уравнения (1), (5) следует дополнить уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

При известных функциях $c(\mathrm{Re})$ и $U(z)$ с учетом (3), (4) система уравнений тем самым замкнута.

Для коэффициента сопротивления при средних и больших числах Рейнольдса, которые рассматриваются в настоящей работе, известны эмпирические формулы, полученные в результате обобщения многочисленных экспериментальных данных. Например, формула Клячко–Мазина

$$c = c_S\left(1 + \frac{1}{6}\,\mathrm{Re}^{2/3}\right) \tag{6}$$

в интервале $3 < \mathrm{Re} < 400$ приводит к силе сопротивления, отличающейся от экспериментальных данных не более, чем на 2% [5,6]. Для интервала $10^3 < \mathrm{Re} < 3\cdot 10^5$ рекомендуется формула [5]

$$c = \frac{1}{60}\,\mathrm{Re}\,c_S. \tag{7}$$

Из вышеизложенного вытекает существование в данной задаче нелинейного взаимодействия между составляющими движения частицы $u-U$ и w через посредство коэффициента сопротивления. Например, чем быстрее частица движется относительно среды по горизонтали, тем больше коэффициент сопротивления, следовательно, тем медленнее вертикальное движение. Имеется и другой механизм взаимодействия. Чем быстрее частица движется по вертикали, тем меньше она успевает адаптироваться к горизонтальному движению среды, следовательно, тем больше ее горизонтальная скорость относительно среды, т. е. разность $\Delta u \equiv u - U$. Упомянутая выше возможность замедления падения частицы за счет нелинейного трения в сдвиговом потоке в принципе может иметь практическое значение, поскольку, например, взаимодействие атмосферы и океана в штормовых условиях существенно зависит от времени „левитации“ брызг (см., например, [2] и библиографию в этой работе).

Уравнение (5) удобно преобразовать с учетом того, что

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\Delta u}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{d\Delta u}{dt} + \frac{dU}{dz}\,\frac{dz}{dt} = \frac{d\Delta u}{dt} + w\,\frac{dU}{dz} =$$

$$\frac{d\Delta u}{dt} + \frac{w}{T}, \quad T \equiv \left(\frac{dU}{dz}\right)^{-1}:$$

$$\frac{d\Delta u}{dt} = -\frac{w}{T} - c\Delta u. \tag{8}$$

Ограничимся случаем стационарного фонового течения с постоянным вертикальным сдвигом, когда

$$U(z) = \overline{U} + \frac{z}{T}, \quad \overline{U} = \mathrm{const}, \quad T = \mathrm{const}. \tag{9}$$

В этом случае система (1), (8) при известной зависимости $c(\mathrm{Re})$ замкнута.

2. Анализ установившегося режима осаждения частицы

Система (1), (8) имеет стационарное решение, описывающее стационарное движение частицы относительно среды. Это решение является нетривиальным обобщением классической задачи об осаждении частицы в покоящейся среде [5,6]; имеет смысл его исследовать.

Стационарное решение системы (1), (8) имеет вид

$$w = -\frac{g}{c}, \quad \Delta u = -\frac{w}{cT} = \frac{g}{c^2T}. \tag{10}$$

Исключая из равенства (10) неизвестную пока величину c, получаем

$$\Delta u = \frac{w^2}{gT} \quad \text{или} \quad w = (gT\Delta u)^{1/2}, \tag{11}$$

$$|\mathbf{v}| = \left[w^2 + \Delta u^2\right]^{1/2} = \left[w^2 + \frac{w^4}{(gT)^2}\right]^{1/2} =$$

$$|w|\left[1 + \frac{w^2}{(gT)^2}\right]^{1/2}. \tag{12}$$

Отметим, что стационарное решение для горизонтальной скорости частицы u в системе отсчета, связанной с землей, при этом отсутствует даже в случае стационарного фонового течения с постоянным вертикальным

[1] Вместо диаметра частицы $2R$ в выражении для числа Рейнольдса можно, разумеется, использовать радиус. Поэтому, например, в [5,6] значения чисел Рейнольдса при прочих равных условиях различаются в два раза.

сдвигом (поскольку даже при стационарном вертикальном движении частицы меняется скорость окружающей ее среды $U(z)$). С учетом (9)

$$u = U + \Delta u = \overline{U} + \frac{z}{T} + \frac{w^2}{gT}. \tag{13}$$

Отсутствие упомянутого стационарного решения видно, например, из (5).

В начальный момент $t = 0$ предполагаются заданными значения координат частицы x_0, z_0. Отсюда

$$z = z_0 + wt = z_0 - \frac{g}{c}t, \quad u = \overline{U} + \frac{z_0}{T} + \frac{w^2}{gT} + w\frac{t}{T},$$

$$x = x_0 + \int_0^t u dt' = x_0 + \left(z_0 + \frac{w^2}{g}\right)\frac{t}{T} + \frac{wt^2}{2T}.$$

По вертикали частица движется с постоянной скоростью w, по горизонтали – с постоянным ускорением w/T; соответственно траектория представляет собой параболу.

Отметим весьма общий характер полученных соотношений — они не зависят от закона сопротивления, вязкости среды, размеров и плотности вещества частиц. Как видно из (12), воздействие сдвигового потока на $|\mathbf{v}|$ и, следовательно, на число Рейнольдса и гидродинамическое сопротивление становится существенным при

$$w \gtrsim \frac{g}{dU/dz} = gT. \tag{14}$$

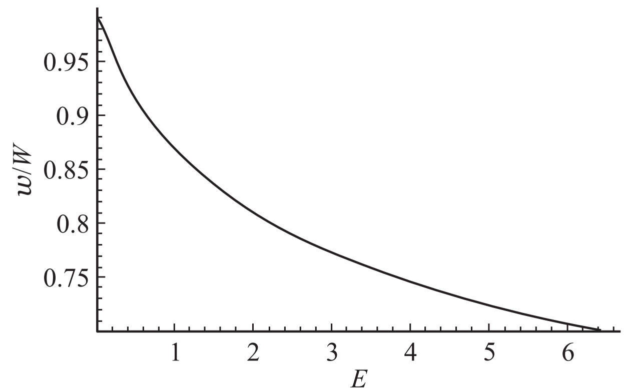
Пусть, например, в случае тропического циклона скорость $U = 30$ m/s достигается на высоте 10 m, следовательно, в приповерхностном слое средний сдвиг скорости $dU/dz \sim 3\,\mathrm{s}^{-1}$. Тогда из (14) следует, что наличие сдвига скорости существенно влияет на гидродинамическое сопротивление частиц, двигающихся по вертикали со скоростью, превышающей 3 m/s. В случае капель воды это соответствует их радиусам, бо́льшим или порядка 1/3 mm.

Задавшись конкретным законом сопротивления, нетрудно завершить решение — определить составляющие скорости установившегося движения частицы. Например, в случае (6) подстановка (11) в (10) при $\mathrm{Re} \gg 1$ приводит к алгебраическому уравнению.

$$w^5 + \frac{w^7}{(gT)^2} \approx -G, \quad G \equiv \frac{16}{27}\frac{g^3R^4}{\nu}\left(\frac{\rho_p}{\rho}\right)^3.$$

При отсутствии сдвигового течения получаем $w \approx -G^{1/5}$. Но если сдвиг скорости достаточно велик (удовлетворяется (14)), то имеем другой предельный случай: $w \approx -(gT)^{2/7}G^{1/7}$. Критерием значимости рассматриваемого эффекта взаимодействия двух составляющих движения является достаточно большое по сравнению с единицей значение безразмерного параметра

$$\frac{R^4}{g^2\nu T^5}\left(\frac{\rho_p}{\rho}\right)^3 \sim \frac{G}{(gT)^5}.$$



Зависимость вертикальной скорости оседающей частицы от безмерного числа E.

В случае закона сопротивления (7) аналогичным образом нетрудно получить уравнение

$$\frac{w^6}{(gT)^2} + w^4 = W^4, \quad W \equiv -\left[\frac{20}{3}gR\frac{\rho_p}{\rho}\right]^{1/2} \tag{15}$$

(W — скорость падения частицы при отсутствии сдвигового течения). Нормируя w на W, получаем безразмерное уравнение

$$ES^6 + S^4 = 1, \tag{16}$$

где $S \equiv w/W$; введен безразмерный параметр

$$E = \frac{20}{3}\frac{R}{gT^2}\frac{\rho_p}{\rho}. \tag{17}$$

Для уравнений (15), (16), вообще говоря, можно записать точное аналитическое решение, но оно громоздко. Очевидно, что при малых значениях E $w/W \approx 1$, при больши́х — $w/W \sim E^{-1/6}$.

Таким образом, рассматриваемый нелинейный эффект взаимодействия двух составляющих движения становится существенным при

$$E = \frac{20}{3}\frac{R}{g}\frac{\rho_p}{\rho}\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 \gtrsim 1.$$

На рисунке приведена рассчитанная численно зависимость $S(E)$. Если $dU/dz = 3\,\mathrm{s}^{-1}$, то для капель воды радиусом 1/3 mm получаем $E \approx 2$; наличие вертикального сдвига скорости приводит к заметному уменьшению установившейся скорости падения капель.

Заключение

Как показывают результаты, существует установившийся режим осаждения тяжелых частиц в горизонтальном потоке с постоянным вертикальным сдвигом. Он обобщает решение стандартной задачи о стационарном падении частицы в покоящейся среде. В этом режиме частица движется по вертикали с постоянной скоростью, по горизонтали — с постоянным ускорением; соответственно траектория представляет собой параболу. Каждая из составляющих движения влияет на число Рейнольдса и тем самым на коэффициент гидродинамического сопротивления. Поэтому горизонтальное и вертикальное движения частицы становятся взаимосвязанными. Найден безразмерный критерий существенности этого нелинейного взаимодействия. Показано, что оно может быть заметным при интенсивных сдвигах ветра в приводном слое атмосферы в штормовых условиях.

Следует отметить универсальный характер полученных соотношений (11)–(14), не зависящих от закона сопротивления, вязкости среды, размеров и плотности вещества частиц. Но напомним, что настоящая работа ограничивается случаем частиц сферической формы.

Автор признателен М.В. Калашнику за полезные советы.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 10-05-01128-а).

Список литературы

[1] *Бортковский А.С.* Тепло- и влагообмен атмосферы и океана при шторме. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 159 с.
[2] *Ингель Л.Х.* Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2011. Т. 47. № 1. С. 130–139.
[3] *Теверовский Е.Н., Дмитриев Е.С.* Перенос аэрозольных частиц турбулентными потоками. М.: Энергоатомиздат, 1988. 160 с.
[4] *Волков К.Н., Емельянов В.Н.* Течения газа с частицами. М.: Физматлит, 2008. 598 с.
[5] *Волощук В.М.* Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. Л.: Гидрометеоиздат, 1971. 208 с.
[6] *Матвеев Л.Т.* Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 751 с.