Журнал технической физики, 2012, том 82, вып. 12

01;04

О возможности естественного возникновения поперечной волны с фазовой скоростью, меньшей скорости света

© А.И. Матвеев

Южный федеральный университет, технологический институт,
347928 Таганрог, Россия
e-mail: ya.matveev.alexandr@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 25 августа 2011 г. В окончательной редакции 7 февраля 2012 г.)

Описан процесс возникновения поперечной волны с фазовой скоростью, меньшей скорости света, которая может существовать в равновесной плазме без замедляющей структуры в отсутствие магнитного поля. Он заключается в трансформации поперечной волны с захваченными электронами, бегущей вдоль магнитного поля, в замедленную поперечную волну после исчезновения магнитного поля. В процессе эволюции волны с захваченными электронами индукция магнитного поля в направлении ее распространения очень медленно уменьшается. Вследствие этого скорость, на которой электроны резонансо взаимодействуют с волной, растет, поэтому они опускаются на дно потенциальных ям. Под влиянием захваченных электронов фазовая скорость волны уменьшается и становится меньше скорости света. В момент исчезновения магнитного поля она сравнивается со скоростью, на которой электроны резонансно взаимодействуют с волной. Показано, что поперечная волна со скоростью, меньшей скорости света, может существовать в равновесной плазме и после исчезновения магнитного поля роль замедляющей структуры в этом случае играет поток захваченных ею электронов.

Введение

С учетом допплеровского смещения условие резонансного взаимодействия между электронами плазмы и поперечной волной, бегущей вдоль магнитного поля, имеет вид $\omega - kV_z = \omega_B$, где ω_B — циклотронная частота, V_z — продольная скорость электрона. Электроны, движущиеся со скоростью $V_r = u - \omega_B/k$, u — фазовая скорость волны, при определенных условиях захватываются в потенциальные ямы этой волны. Если индукция магнитного поля уменьшается и электроны остаются в потенциальных ямах, то возникает вопрос, что произойдет с поперечной волной после исчезновения магнитного поля? Сможет ли поперечная волна с захваченными электронами распространяться в однородной плазме и в отсутствие магнитного поля? Известно, что в отсутствие магнитного поля черенковский резонанс $\omega = kV_z$ электронов плазмы с поперечной волной невозможен, так как фазовая скорость этих волн больше скорости света. С другой стороны, в пучке электронов фазовая скорость поперечных волн может быть меньше скорости света [1,2]. Такую волну можно рассматривать как пучок с вмороженным магнитным полем. Таким образом, под влиянием захваченных электронов пучка фазовая скорость поперечной волны в этом пучке уменьшается. Поэтому вполне возможно, что фазовая скорость поперечной волны, бегущей вдоль магнитного поля и нагруженной захваченными электронами, после исчезновения магнитного поля становится меньше скорости света. В этом случае эта волна может существовать в однородной плазме без искусственных замедляющих структур.

Замедленные поперечные волны рассматривались в [3–5], где сделан следующий вывод: если предположить, что в потенциальные ямы поперечной волны каким-то образом захватывается достаточное количество электронов, то они способствуют уменьшению ее фазовой скорости до скорости, меньшей скорости света. Захваченные волной электроны при этом играют роль своеобразной замедляющей структуры на фоне однородной плазмы, роль которой становится пассивной. В указанных выше работах нет строгого обоснования, как возникают эти странные волны. В постановке задачи [3,4] предполагалось возбуждать такую замедленную поперечную волну с помощью внешних источников поля, однако глубина проникновения (скин-слой) поперечных волн мала, они быстро затухают в плазме. Поэтому вопрос о физической реализации таких волн в плазме без каких-либо искусственных замедляющих структур, используемых в СВЧ-электронике, по-прежнему остается актуальным.

Уменьшение фазовой скорости поперечных волн до скорости, меньшей скорости света, под влиянием малого количества захваченных этими волнами электронов представляет интерес в плазменной электронике. Не всегда в плазменных устройствах можно использовать искусственные замедляющие устройства. С другой стороны, например, в процессе ускорения заряженных частиц волновыми методами в плазменных волноводах может оказаться, что необходимость в использовании искусственных замедляющих устройств отпадает, так как захваченные волной частицы могут уменьшить фазовую скорость волны в волноводе до скорости, меньшей скорости света. Поперечные волны, нагруженные захваченными электронами, более энергоемки, по сравнению с поперечными волнами, фазовая скорость которых больше скорости света. Поэтому их применение в устройствах для усиления и генерации поперечных волн позволит увеличить мощность этих устройств.

Постановка задачи

Рассмотрим пространственную эволюцию циркулярно-поляризованной волны с потенциалами

$$A_x = A_\perp(z)\cos\psi, \quad A_y = A_\perp \sin\psi, \quad \psi = \omega t - \int k dz \tag{1}$$

в однородной плазме с концентрацией n вдоль магнитного поля $\mathbf{B}_0$, направленного по оси z. Индукция магнитного поля медленно убывает в направлении распространения волны. Направление вращения векторного потенциала совпадает с направлением вращения электрона в магнитном поле, т.е. волна является необыкновенной. В этом случае, если $\omega_B < \omega$, то продольная скорость, на которой электроны испытывают резонанс с волной, меньше скорости света $V_r = u - u_B < c$, $u_B = \omega_B/k$. Поэтому электроны с этой скоростью захватываются в потенциальные ямы волны. Захват электронов волной происходит на начальном этапе эволюции, например, в процессе слабой подпитки волны полем внешних источников. Амплитуда волны в процессе ее возбуждения внешними источниками увеличивается практически при неизменной фазовой скорости u_0 от нуля при $z \to -\infty$ до некоторого конечного значения A при $z = 0$. С ростом амплитуды волны пролетные электроны в системе отсчета, движущейся со скоростью, на которой электроны резонансно взаимодействуют с волной, переходят на более низкий энергетический уровень. Электроны с продольной скоростью, равной скорости $V_{r0} = u_0 - \omega_{B0}/k$, где ω_{B0} — циклотронная частота в начале эволюции, захватываются в потенциальные ямы волны [6,7]. Причем резонансное взаимодействие электронов с волной происходит в хвосте их распределения, где энергия электронов значительно превышает температуру плазмы, выраженную в энергетических единицах, $\gamma \gg T$. В этом случае описание дисперсии волны упрощается, так как в дисперсионном уравнении достаточно ограничиться нахождением малой поправки, учитывающей вклад захваченных электронов. Медленное уменьшение магнитного поля происходит в области $z > 0$ так, что на расстоянии $L \gg 2\pi u/\omega_B$ оно полностью исчезает. При уменьшении индукции магнитного поля возникает поперечная составляющая этого поля $\mathbf{B}_{0\perp}$, однако если уменьшение очень медленное, то ее величина мала $|\mathbf{B}_{0\perp}| \ll |\mathbf{B}_0|$, и влиянием поперечной составляющей магнитного поля на движение электронов можно пренебречь.

Предварительно с помощью линейного дисперсионного уравнения

$$N^2 = \frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega(\omega - \omega_B)}, \tag{2}$$

где $\omega_e = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$ — плазменная частота, $\omega > \omega_B$, по крайней мере, в случае $\omega_B/\omega \ll 1$, $\omega_B > 0.5\omega_e^2/\omega$, легко установить, что уменьшение магнитного поля приводит к уменьшению фазовой скорости волны и росту скорости $V_r = u - \omega_B/k \approx c(1 - \omega_B/\omega + 0.5\omega_e^2/\omega^2)$, на которой происходит резонансное взаимодействие электронов с волной. После исчезновения магнитного поля величина фазовой скорости достигает минимальной величины, оставаясь больше скорости света. В [3–5] показано, что электроны, захваченные поперечной волной, в незамагниченной плазме $\omega_B = 0$ вносят положительный вклад в правую часть уравнения (2), уменьшая ее фазовую скорость до скорости, меньшей скорости света. При достаточно большом вкладе захваченных электронов правая часть (2) становится положительной, что говорит о возможности существования в равновесной плазме стационарной поперечной волны с фазовой скоростью, меньшей скорости света (замедленной поперечной волны). Представляет интерес выяснить, что будет с циркулярно-поляризованной волной, бегущей вдоль магнитного поля, в потенциальных ямах которой содержатся захваченные электроны, после исчезновения магнитного поля? Уменьшится ли ее фазовая скорость до скорости, меньшей скорости света? Захват электронов в потенциальные ямы волны в процессе ее возбуждения внешниими источниками происходит в хвосте распределения, где их количество в случае равновесной плазмы экспоненциально мало. Возникает вопрос, достаточно ли количества захваченных в процессе возбуждения волны электронов, чтобы их вклад в правую часть (2) обеспечил после исчезновения магнитного поля уменьшение фазовой скорости волны до скорости, меньшей скорости света? Чтобы число захваченных волной электронов не уменьшалось, необходимо проверить, остаются ли электроны в потенциальных ямах волны в процессе уменьшения индукции магнитного поля? С ростом скорости, на которой происходит резонанс электронов с волной, эти электроны увлекаются волной, попадая в ее потенциальные ямы, их скорость растет. Плазма становится неравновесной. Захваченные электроны, сталкиваясь с заряженными частицами плазмы, покидают потенциальные ямы волны. Если время релаксации плазмы к равновесному состоянию меньше времени образования замедленной поперечной волны, то ее возникновение невозможно. Необходимо оценить влияние столкновений захваченных волной электронов с заряженными частицами на процесс возникновения замедленной поперечной волны.

Чтобы выяснить, при каких условиях электроны захватываются в потенциальные ямы волны, как они ведут себя в этих ямах при уменьшении магнитного поля, нет необходимости в подробном описании движения этих электронов. Эти вопросы удобно решать в рамках адиабатического подхода. Достаточно установить, как изменяется энергия электронов в потенциальных ямах волны из-за изменения ее параметров и уменьшения магнитного поля. Проще всего это сделать с помощью адиабатических инвариантов. Если энергия захваченных волной электронов уменьшается, то они не покидают потенциальных ям волны. Так как под влиянием захваченных электронов фазовая скорость волны уменьшается и может стать меньше скорости света, то для установления принципиальной возможности существования замедленных поперечных волн достаточно проанализировать дисперсионное уравнение в области фазовых скоростей, близких к скорости света. Поэтому движение электронов в поле волны и эволюция самой волны далее рассматриваются на основе релятивистской теории.

Уравнения движения электронов в поле волны круговой поляризации с продольным магнитным полем

Уравнения движения электрона в поле поперечной волны, бегущей вдоль магнитного поля с индукцией $\mathbf{B}_0$, запишем в виде

$$\frac{dp_z}{dt} = -\mathbf{V}_\perp \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} - k\,\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \psi} \right),$$

$$\frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} = -\left(\frac{e}{c}\,[\mathbf{V}_\perp \mathbf{B}_0] - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right), \quad \frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{V}_\perp\,\frac{\partial A}{\partial t}, \tag{3}$$

где p_z — проекция импульса электрона на ось z; $\mathbf{p}_\perp$, $\mathbf{V}_\perp$ — поперечные составляющие импульса и скорости электрона; $\mathbf{A} = (|e|/c)\mathbf{A}_\perp$; $\mathbf{A}_\perp$ — поперечная составляющая векторного потенциала. Обозначив $\mathbf{P}_B = \mathbf{p}_\perp - \mathbf{A}$ и используя потенциал (1), из уравнений (3) в пренебрежении медленной зависимостью от z получим

$$\frac{dp_z}{dt} = kA\,\frac{c^2 P_B}{\gamma}\,\sin\theta,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega A\,\frac{c^2 P_B}{\gamma}\,\sin\theta, \quad \frac{dP_B}{dt} = A\,\frac{ecB_0}{\gamma}\,\sin\theta, \tag{4}$$

где

$$\gamma = c\sqrt{m^2c^2 + p_z^2 + (\mathbf{P}_B + \mathbf{A})^2} \tag{5}$$

— энергия электрона; θ — угол между векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{P}_B$; $P_B = |\mathbf{P}_B|$; $B_0 = |\mathbf{B}_0|$, причем, если — $P_{Bx} = P_B \cos\theta_B$, $P_{By} = P_B \sin\theta_B$, то $\theta = \theta_B - \psi$. Второе уравнение (3) дает следующий интеграл движения:

$$\mathbf{V}_\perp = [\boldsymbol{\omega}_B \mathbf{r}_\perp] + \frac{c^2}{\gamma}\,\mathbf{A} + \mathbf{C}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\omega}_B = ec\mathbf{B}_0/\gamma$, $\mathbf{C} = \mathrm{const}$. При малых амплитудах волны движение электрона, описываемое этим уравнением, происходит по окружности с ларморовской частотой ω_B, влияние поля волны сводится лишь к возмущению его орбиты. Поэтому постоянная $\mathbf{C}$ равна нулю, так как в среднем поперечное смещение отсутствует. Сравнив (6) с формулой $\mathbf{P}_B = \mathbf{p}_\perp - \mathbf{A}$, найдем $\mathbf{P}_B = \gamma[\boldsymbol{\omega}_B \mathbf{r}_\perp]/c^2$.

Как правило, при описании дисперсии поперечной волны в однородной плазме основное внимание уделяют поперечному движению электронов, не особо интересуясь его продольным движением [1]. Однако если в процессе эволюции происходит захват электронов в потенциальные ямы волны, то анализ влияния этих электронов на эволюцию волны невозможен без детального изучения их продольного движения. Описание такого движения значительно упрощается, если для электрона удается найти систему отсчета, движущуюся со скоростью, меньшей скорости света, в которой его гамильтониан, энергия и импульс были бы в пренебрежении медленной зависимостью функциями только продольной пространственной координаты. В этом случае задача о движении электрона в поле волны круговой поляризации, бегущей вдоль магнитного поля, сводится к задаче о движении частицы в некотором эффективном потенциальном поле. Так, в [8,9] с помощью еще одного в дополнении к (6) интеграла движения удалось исключить поперечное движение электрона и записать (4) в виде уравнений Гамильтона, описывающих только его продольное движение. Здесь воспользуемся более простым способом описания движения электронов в поле поперечной волны с продольным магнитным полем. Чтобы исключить ларморовское вращение электрона, перейдем в неинерциальную систему отсчета, которая вращается относительно оси, параллельной магнитному полю, с частотой ω_B. Так как вращение неинерциальной системы отсчета происходит в направлении вращения векторного потенциала, то его частота уменьшается, а его фаза в пренебрежении медленной зависимостью принимает вид $(\omega - \omega_B)t - kz = -\theta$. Если $(\omega - \omega_B)/k < c$, то в системе отсчета, которая не только вращается с частотой ω_B, но и движется в продольном направлении со скоростью $V_r = (\omega - \omega_B)/k$, векторный потенциал $\mathbf{A}(-\theta) = \mathbf{A}(-k'z')$, где $k' = k\sqrt{1 - V_r^2/c^2}$, зависит только от продольной координаты $z' = (z - V_r t)/\sqrt{1 - V_r^2/c^2}$ этой системы отсчета. Поперечная скорость электрона, согласно (6), в неинерциальной системе отсчета равна

$$\mathbf{V}'_\perp = \frac{c^2}{\gamma}\,\mathbf{A}(-\theta), \qquad |\mathbf{A}(-\theta)| = \mathrm{const}. \tag{7}$$

Она остается такой же, если система отсчета еще и движется со скоростью $V_r = (\omega - \omega_B)/k$. То есть в плоскости $z' = \mathrm{const}$ поперечная скорость всех электронов направлена вдоль вектора $\mathbf{A}$. Уравнение (7) проинтегрируем, взяв в качестве исходного приближения решение, описывающее движение электрона в магнитном поле в отсутствие волны. В этом случае $r_\perp \approx \rho$, где ρ — радиус невозмущенной круговой орбиты электрона, $\gamma = \mathrm{const}$ и $\theta_B = \omega_B t$, поэтому $d\theta/dt = kV_z(\omega - \omega_B)$. Откуда в линейном приближении по амплитуде волны решение (7) таково

$$\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{A}\left(\frac{\rho}{A} - \int \frac{c^2 d\theta}{\left((\omega - \omega_B)\gamma - kc^2 p_z\right)_{r_\perp = \rho}} \right).$$

Здесь нет необходимости интегрировать это уравнение, движение электронов в поле циркулярно-поляризованной волны, бегущей вдоль магнитного поля, подробно рассмотрено в работах [10,11]. Отметим только, что практически во всех случаях, исключая лишь случай очень малого радиуса ларморовской орбиты $\rho \sim A$, пульсации поперечного радиуса-вектора малы. Так как его величина в неинерциальной и лабораторной системах отсчета одинакова, то далее будем использовать приближение

$$r'_\perp(\theta) = r_\perp(\theta) \approx \rho. \qquad (8)$$

Если волны нет, то после перехода в неинерциальную систему отсчета, вращающуюся с частотой ω_B, у электрона в магнитном поле исчезает поперечное движение, поэтому энергии электрона в лабораторной и неинерциальной системах отсчета равны соответственно

$$\gamma^2 = m^2c^4 + c^2p_z^2 + \gamma\,\frac{\omega_B^2 r_\perp^2}{c^2},$$

$$\varepsilon^2 = m^2c^4 + c^2p_z^2.$$

Отсюда связь между ними такова

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} = \frac{\gamma^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_B^2 r_\perp^2}{c^2}\right).$$

Очевидно, движение электрона в неинерциальной системе отсчета можно рассматривать лишь при условии $\omega_B^2 r_\perp^2 < c^2$. Последнее условие характерно для метрики во вращающейся системе отсчета [12]. Так как волна не является сильной и повлиять на релятивизм частицы не может, то такое же соотношение между энергиями в лабораторной и неинерциальной системах отсчета получим с помощью (5) и в присутствии волны, причем энергия электрона в неинерциальной системе отсчета равна

$$\varepsilon = c(m^2c^2 + p_z^2 + 2(e/c)AB_0r_\perp\cos\theta + A^2)^{1/2}. \qquad (9)$$

Если разложить правую часть (9) в ряд по $p_z^2/(mc)^2$, $AB_0r_\perp/(mc)^2$, $A^2/(mc)^2$, удерживая лишь старшие порядки, то получим нерелятивистскую энергию в неинерциальной системе отсчета

$$W_n = W - \frac{1}{2}m\omega_B^2 r_\perp^2$$

$$= \frac{p_z^2}{2m} + \frac{e}{mc}AB_0r_\perp\cos\theta + \frac{A^2}{2m},$$

где $W = (p_z^2 + \mathbf{p}_\perp^2)/2m$ — энергия электрона в лабораторной системе отсчета, $m\omega_B^2 r_\perp^2/2$ — центробежная энергия [13].

Так как поперечное смещение $r_\perp(\theta) = r'_\perp(\theta)$ является функцией только продольной координаты $\theta = \sqrt{1 - V_r^2/c^2}kz'$, то правая часть (9) в системе отсчета, движущейся относительно лабораторной системы отсчета со скоростью $V_r = u - u_B$, зависит только от этой координаты. Поэтому поперечное движение электрона в (9) полностью исключено, эта формула описывает лишь одномерное продольное движение электрона в некотором эффективном потенциале. Для точного описания продольного движения электрона нужно знать зависимость поперечного смещения $r_\perp$ от θ, но решение этой задачи упрощается, если использовать приближение (8). Избавившись от поперечного движения электрона, сосредоточимся на его продольном движении. Запишем уравнения Гамильтона для этого движения. Сначала получим дифференциальное уравнение для энергии электрона в неинерциальной системе отсчета. Умножим второе уравнение (4) на γ, а третье уравнение на c^2P_B и вычтем полученные выражения, это дает

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (\omega - \omega_B)A\,\frac{c^2P_B}{\varepsilon}\sin\theta, \qquad (10)$$

где $\varepsilon = \sqrt{\gamma^2 - c^2P_B^2}$, $P_B = (e/c)B_0\rho$. Продольный импульс во вращающейся системе отсчета имеет вид

$$P_z = \left(\frac{\varepsilon^2}{c^2} - mc^2 - 2AP_B\cos\theta - A^2\right)^{1/2}.$$

Переходя в (10) к дифференцированию по z, дифференцируя угол θ по z, который в приближении (8) имеет вид $\theta = kz - (\omega - \omega_B)t$, выразив продольную скорость электрона через ε с помощью формулы $V_z = V'_z\sqrt{1 - P_B^2/\gamma^2}$, где $V'_z = c^2P_z/\varepsilon$, и полагая $V_z = V'_z$, уравнения Гамильтона запишем в виде.

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = (\omega - \omega_B)A\,\frac{P_B}{P_z}\sin\theta,$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\partial H}{\partial\varepsilon} = k - \frac{\omega - \omega_B}{V_z}$$

с гамильтонианом

$$H = k\varepsilon - (\omega - \omega_B)P_z. \qquad (11)$$

Если (11) поделить на $k\sqrt{1 - V_r^2/c^2}$, то получим обратное преобразование Лоренца в неинерциальной системе отсчета энергии и импульса из лабораторой системы отсчета в систему отсчета, движущуюся со скоростью $V_r = u - u_B$. В этой системе отсчета энергия элекрона равна $H/(k\sqrt{1 - V_r^2/c^2})$, а гамильтониан (11) является функцией только продольной координаты, так как $\theta = \sqrt{1 - V_r^2/c^2}kz'$. То есть в системе отсчета, движущейся со скоростью V_r и вращающейся с угловой частотой ω_B, движение электрона в поле волны является одномерным.

Уже отмечалось [8,9], что уравнения (4) можно записать в виде уравнений Гамильтона, которые описывают одномерное движение электронов. Однако гамильтониан $H = k\gamma - \omega p_z$, найденный в [8,9], не очень удобен для описания резонансного взаимодействия электронов с волной, потому что он описывает движение электронов в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью волны $V_g = c^2/u$. Действительно, в этой системе у электронов, которые движутся со скоростью $V_z = V_g$, гамильтониан $H = k\gamma - \omega p_z$, значит, и полная энергия равна нулю. Очевидно, движение электронов, резонансно взаимодействующих с волной, необходимо рассматривать в системе отсчета, движущейся со скоростью

$V_r = u - \omega_B/k$. В нерелятивистском случае резонансное взаимодействие электронов с поперечной волной, распространяющейся под произвольным углом к направлению магнитного поля, рассмотрено в [14]. Из системы уравнений Гамильтона для их условно-периодического движения с двумя частотами в поле рассматриваемой волны также удалось выделить уравнение, описывающее одномерное продольное движение этих электронов.

Адиабатические инварианты, число электронов, захваченных в процессе возбуждения волны

Выразив из (9), (11) энергию и импульс электрона в неинерциальной системе отсчета, найдем

$$\varepsilon = \frac{cH_r + V_r\sqrt{H_r^2 - (m^2c^2 + 2AP_B\cos\theta)}}{\sqrt{1 - V_r^2/c^2}},$$

$$P_z = \frac{V_rH_r/c \pm \sqrt{H_r^2 - (m^2c^2 + 2AP_B\cos\theta)}}{\sqrt{1 - V_r^2/c^2}}, \qquad (12)$$

где $H_r = H/\sqrt{c^2k^2 - (\omega - \omega_B)^2}$, знак „+“ для опережающих, знак „−“ — для отстающих пролетных электронов. Далее для θ введем новое обозначение $\theta = \theta_B - \psi - \pi$, тогда энергию электрона (12) с учетом этого обозначения представим в виде

$$\varepsilon = \frac{cH_r \pm V_r\sqrt{2P_B(h + A\cos\theta)}}{\sqrt{1 - V_r^2/c^2}}, \qquad (13)$$

где $h = (H_r^2 - m^2c^2)/(2P_B)$. При условии $h < A$ у электронов существуют захваченные состояния, так как его фазовый интервал движения становится ограниченным $-\theta_1 < \theta < \theta_1$, где

$$\theta_1 = 2\arcsin(\sqrt{(h + A)/(2A)}).$$

Уравнения Гамильтона описывают движение электрона и в случае очень медленного изменения параметров волны вдоль координаты z. Однако если необходимо выяснить, как изменяется полная энергия электрона в потенциальной яме волны, то нет необходимости в их решении, достаточно использовать адиабатические инварианты [15], которые следуют из этих уравнений. Для канонических переменных θ и ε существует адиабатический инвариант

$$I = \oint \varepsilon \frac{d\theta}{4\pi}. \qquad (14)$$

С его помощью легко определить, как изменяется гамильтониан (11), когда амплитуда и фазовая скорость волны изменяются вдоль оси z.

Подставив (13) в (14) и полагая $r_\perp \approx \rho$, вычислим адиабатические инварианты пролетных и захваченных электронов

$$I_\pm = \frac{cH_r}{\sqrt{1 - V_r^2/c^2}} \pm \frac{4V_r\sqrt{AP_{B0}}\kappa E(\kappa^{-1})}{\pi\sqrt{1 - V_r^2/c^2}},$$

$$J = \frac{4V_r\sqrt{AP_{B0}}\kappa^2 B(\kappa)}{\pi\sqrt{1 - V_r^2/c^2}}, \qquad (15)$$

где $B(\kappa) = \left(E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)\right)/\kappa^2$, $K(\kappa)$, $E(\kappa)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода, $\kappa^2 = (h + A)/(2A)$ — параметр захвата электрона, $P_{B0} = (e/c)AB_0\rho$. Анализ адиабатических инвариантов (15) показывает, что с ростом амплитуды волны параметр захвата пролетных и захваченных электронов, как и их энергия в системе отсчета, движущейся со скоростью V_r, уменьшаются. На этапе возбуждения это приводит к захвату пролетных электронов, движущихся со скоростью V_r, в потенциальные ямы волны. При анализе уравнения (2) отмечалось, что с уменьшением магнитного поля скорость V_r, на которой электроны резонансно взаимодействуют с волной, растет. Из (15) следует, что параметр захвата опережающих пролетных и захваченных электронов с ростом V_r уменьшается. Часть пролетных опережающих электронов в этом случае захватывается в потенциальные ямы волны. Адиабатические инварианты (15) получены в неинерциальной системе отсчета, однако, так как характер продольного движения в неинерциальной и лабораторной системах отсчета одинаков, то выводы, которые следуют из анализа (15), пригодны и в лабораторной системе отсчета.

Невозмущенная функция распределения электронов в равновесной плазме такова [16]

$$f_0(\gamma_0) = \frac{n}{\Theta}\exp\left(-\frac{\gamma_0}{T}\right), \qquad (16)$$

где n — концентрация электронов, γ_0 — энергия электронов в отсутствие поля волны,

$$\Theta = 4\pi(mc)^3\left(2\beta^2K_1(\beta) + \beta K_0(\beta)\right),$$

$$\beta = mc^2/T,$$

K_0, K_1 — функции Макдональда.

Оценим количество электронов

$$n_{tr} = 2\pi\int\limits_\Omega f_0(\gamma_0)dp_z p_\perp dp_\perp, \qquad (17)$$

которые захватываются на этапе возбуждения волны, Ω — фазовый объем этих электронов. Вычисление упрощается, если под знаком интеграла в (17) полагать $V_z \approx V_{r0}$, где V_{r0} — скорость, на которой происходит резонансное взаимодействие электронов с волной в процессе ее возбуждения. В приближении $P_B \approx p_\perp$ имеем $\mathcal{E} \approx c\sqrt{m^2c^2 + p_z^2}$. Используя последнюю формулу, перейдем в правой части (17) к переменной интегрирования $\mathcal{E}$, затем проинтегрируем по θ:

$$n_{tr} = 2\pi n \frac{\sqrt{m^2c^6 + \gamma_0^2 V_{r0}^2}}{\Theta c \gamma_0 V_{r0}} \int_0^\infty e^{-\gamma_0/T} p_\perp dp_\perp \int_0^R dJ. \quad (18)$$

В пренебрежении зависимостью от амплитуды волны энергию γ_0 для захваченных электронов определим, подставив $p_{z0} = \gamma_0 V_{r0}/c^2$ в уравнение $\gamma_0^2 = m^2c^4 + c^2(p_{z0}^2 + p_\perp^2)$, это дает

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{m^2c^4 + c^2 p_\perp^2}}{\sqrt{1 - V_{r0}^2/c^2}}.$$

Подставив γ_0 в (18) после интгерирования этого выражения, найдем

$$n_{tr} = 4n \frac{\sqrt{m^2c^6 + \gamma_0^2 V_{r0}^2}}{\Theta_0 \gamma_0 V_{r0}} \frac{\sqrt{A}(mT)^{5/4}}{(mc)^3} e^{-\gamma_0/T}, \quad (19)$$

где $\Theta_0 = \Theta/(mc)^3$. Из (19) видно, что число захваченных волной электронов пропорционально фазовому объему $R = \oint \varepsilon\big|_{h=A} d\theta \sim \sqrt{A}$, занимаемому этими электронами [17,18].

Трансформация циркулярно-поляризованной волны, распространяющейся в плазме вдоль магнитного поля, в замедленную поперечную волну, которая существует без магнитного поля

Из линейного дисперсионного уравнения (2) следует, что с уменьшением индукции магнитного поля, а значит и циклотронной частоты, скорость $V_r = u - \omega_B/k$, на котрой происходит резонансное взаимодействие электронов с волной, растет. В этом случае, согласно адиабатическому инварианту для захваченных электронов (5), их полная энергия в системе отсчета, движущейся со скоростью V_r, уменьшается. После достаточно большого увеличения скорости, на которой электроны резонансно взаимодействуют с волной, практически все захваченные электроны опускаются на дно потенциальных ям в положение равновесия $\theta \approx 0$. Продольная скорость этих электронов становится одинаковой $V_z = V_r$. Уменьшение энергии электронов в системе отсчета, движущейся со скоростью V_r, сопровождается уменьшением интервала углов $-\theta_1 < \theta < \theta_1$, задающих направление вектора $\mathbf{P}_B$ относительно вектора $\mathbf{A}$. Поперечная скорость захваченных электронов, находящихся на дне потенциальных ям, становится равной $V_{tr} \approx c^2(P_B + A)/\gamma$. Так как угол между векторами $\mathbf{P}_B$ и $\mathbf{A}$ для них равен $\theta \approx 0$, то ориентация всех поперечных импульсов этих электронов одинакова вдоль векторного потенциала. Аналогичным образом ведут себя захваченные электроны на дне потенциальных ям в поле замедленной поперечной волны [5], которая в отсутствие магнитного поля распространяется в однородной плазме. Очевидно, что отклонение поперечных составляющих импульсов электронов от направления векторного потенциала становится малым еще в присутствии магнитного поля, для этого достаточно, чтобы энергия захваченных электронов стала достаточно малой по сравнению с их максимальной потенциальной энергией. Это обстоятельство упрощает рассматриваемую задачу, так как при нахождении дисперсионного уравнения можно считать, что поперечные составляющие импульсов электронов направлены одинаково, и вместо кинетического подхода использовать гидродинамический подход.

Поперечный ток электронов, находящихся в равновесном состоянии $\theta \approx 0$, в гидродинмическом приближении равен $\mathbf{j}_{tr} = en_{tr}\langle V_{tr}\rangle \mathbf{A}/A$, где $A = |\mathbf{A}|$, n_{tr}, $\langle V_{tr}\rangle$ — концентрация и среднее значение поперечной скорости захваченных электронов. Для получения дисперсионного уравнения, в котором учитывается влияние захваченных электронов, воспользуемся уравнением Максвелла $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}$, записав его для тока захваченных электронов в обычных обозначениях

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_\perp}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{tr}.$$

Это уравнение описывает магнитостатическую волну в системе отсчета, движущейся со скоростью, на которой электроны резонансно взаимодействуют с волной. Подстановка в это уравнение формул $\mathbf{A}_\perp(z) = \mathbf{A}_\perp(0)e^{ikz}$, $\mathbf{j}_{tr} = en_{tr}\langle V_{tr}\rangle (e/c)\mathbf{A}_\perp/A$ дает связь между величинами поперечной скорости и поперечного потенциала $k^2c^2A = 4\pi e^2 n_{tr}\langle V_{tr}\rangle$. Последнее выражение с учетом вклада нерезонансных электронов плазмы, который хорошо известен из линейной теории, перепишем в виде дисперсионного уравнения

$$N^2 = \frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_{tr}^2}{\omega^2} \frac{\langle V_{tr}\rangle}{c} \frac{mc}{A} - \frac{\omega_e^2}{\omega(\omega - \omega_B)}, \quad (20)$$

где $\omega_{tr}^2 = 4\pi e^2 n_{tr}/m$. Второе слагаемое в правой части найденного уравнения — это нелинейная поправка, обусловленная вкладом захваченных электронов. Он частично компенсирует отрицательный вклад нерезонансных электронов. Вследствие этого фазовая скорость волны, которая в начале эволюции больше скорости света, уменьшается. С уменьшением магнитного поля циклотронная частота также уменьшается, вместе с ней уменьшается вклад нерезонансных электронов. Если концентрация электронов плазмы мала, а число захваченных электронов достаточно велико, то после исчезновения магнитного поля вклад захваченных электронов по абсолютной величине становится больше вклада нерезонансных электронов. Правая часть (20) при этом будет больше единицы. То есть у поперечной волны с захваченными электронами после исчезновения магнитного поля фазовая скорость становится меньше скорости света. Этим формально доказана возможность трансформации поперечной волны с захваченными электронами, которая распространяется вдоль магнитного поля, в поперечную волну с захваченными электронами, способную существовать в однородной равновесной плазме без магнитного поля. В момент возникновения замедленной волны два последних слагаемых в правой части (20) одинаковы по величине, индукция магнитного поля близка к нулю. Из условия малости нелинейной поправки в (20) имеем следующее ограничение на концентрацию электронов:

$$\omega_e^2 \approx \omega_{tr}^2 \langle V_{tr} \rangle \frac{m}{A} \ll \omega^2. \tag{21}$$

Чтобы приведенные рассуждения были справедливыми, нужно показать, что в процессе уменьшения магнитного поля захваченные электроны не покидают потенциальных ям волны. Как показано выше, с помощью адиабатического инварианта (15) это возможно, если скорость $V_r = u - \omega_B/k < c$, на которой возникает резонанс электронов с волной, растет. Выразим из (20) эту скорость

$$V_r = \frac{(1 - \omega_B/\omega)^{3/2} c}{\sqrt{(1+g)(1 - \omega_B/\omega) - \omega_e^2/\omega^2}}, \tag{22}$$

где $g = (\omega_{tr}^2/\omega^2)(V_{tr}/c)(mc/A)$. Выражение (22) имеет смысл, если выполняется условие $\omega_e^2 < (1+g)\omega(\omega - \omega_B)$. Из анализа (22) следует, что при уменьшении индукции магнитного поля и циклотронной частоты до нуля $B_0 \to 0$, $\omega_B \to 0$ скорость V_r, на которой электроны взаимодействуют резонансно с волной, увеличивается. Вследствие этого, согласно адиабатическому инварианту (15), гамильтониан (11), а значит и полная энергия захваченных электронов в системе отсчета, движущейся со скоростью V_r, уменьшаются. Таким образом, в процессе эволюции волны электроны остаются жестко захваченными, опускаясь на дно потенциальных ям и занимая положение равновесия $\theta \approx 0$.

Наибольшее количество электронов захватывается в начале эволюции волны на этапе ее возбуждения, когда скорость резонансного взаимодействия электронов с волной невелика. На втором этапе эволюции, когда уменьшается магнитное поле, с увеличением скорости, на которой электроны резонансно взаимодействуют с волной, число электронов, захватываемых волной, экспоненциально падает, поэтому их количество в процессе эволюции увеличивается незначительно. То есть в процессе второго этапа эволюции число захваченных электронов практически не меняется, оставаясь равным (19).

Для вычисления постоянной g найдем среднее значение поперечной скорости. С учетом того что в каждой плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, ориентация поперечной скорости электронов, находящихся на дне потенциальных ям, одинакова, среднее значение поперечной скорости равно

$$\langle V_{tr} \rangle = \frac{c^2}{\Theta_1} \int\limits_0^\infty \frac{p_\perp}{\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma}{T}\right) dp_\perp, \tag{23}$$

где $\gamma = \sqrt{m^2c^4 + c^2 p_\perp^2} \Big/ \sqrt{1 - V_r^2/c^2}$ — энергия электрона, определяется по аналогии с (17), $\Theta_1 = mcK_1(\eta)$ — нормировочный множитель. $\eta = mc^2/(T\sqrt{1 - V_r^2/c^2})$. Вычисление (23) дает

$$\langle V_{tr} \rangle = \frac{T(1 - V_r^2/c^2)}{mcK_1(\eta)}. \tag{24}$$

Подставив (19), (24) в $g = (\omega_{tr}^2/\omega^2)(\langle V_{tr} \rangle/c)(mc/A)$, найдем эту постоянную

$$g = 4\,\frac{\omega_e^2}{\omega^2}\,\frac{\sqrt{m^2c^6 + \gamma_0^2 V_{r0}^2}}{\gamma_0 V_{r0} \Theta}\,\frac{(mT)^{5/4}}{(mc)^3}\,\frac{m\langle V_{tr} \rangle}{\sqrt{A}}\, e^{-\gamma_0/T}, \tag{25}$$

где ω_e — плазменная частота (коэффициент перед экспонентой не имеет размерности).

В процессе уменьшения магнитного поля фазовая скорость волны также уменьшается

$$u = \frac{c}{\sqrt{1 + g - \omega_e^2/(\omega(\omega - \omega_B))}}. \tag{26}$$

Сравнивая (22) с (26), отметим, что, когда магнитное поле исчезает, фазовая скорость волны и скорость, на которой происходит резонанс электронов с волной, становятся одинаковыми:

$$u = V_r = \frac{c}{\sqrt{1 + g - \omega_e^2/\omega^2}}. \tag{27}$$

То есть в отсутствие магнитного поля в резонанс с поперечной волной, нагруженной захваченными электронами, вступают электроны, продольная скорость которых равна фазовой скорости волны.

Анализ (27) дает следующее условие возникновения замедленной волны в отсутствие магнитного поля $g > \omega_e^2/\omega^2$. После подстановки в это неравенство формулы (25) в случае $V_{r0} \ll c$ установим, что существует ограничение по амплитуде для возникновения замедленной волны

$$\sqrt{A} < 2\sqrt{mV_T}\,\frac{V_T^2 \langle V_{tr} \rangle}{\Theta_0 c^2 V_{r0}}\, e^{-\gamma_0 T}.$$

Используя асимптотику функции Макдональда для Θ_0, это условие можно упростить

$$\sqrt{A} < \frac{\sqrt{mV_T}\langle V_{tr} \rangle}{\sqrt{2}\pi^{3/2} V_{r0}} \left(\frac{T}{mc}\right)^{5/2}. \tag{28}$$

Из него следует, что на появление замедленной волны концентрация плазмы не влияет. Независимость условия (28) от концентрации плазмы вполне объяснима:

число захваченных электронов (19) пропорционально этой концентрации. Из (28) видно, что чем больше температура плазмы, меньше амплитуда волны и начальная скорость, на которой происходит резонансное взаимодействие электронов с волной, тем более благоприятно условие для возникновения волны. Однако амплитуда волны должна оставаться конечной. Если она становится очень малой, то, согласно адиабатическому инварианту (15), при стремлении амплитуды к нулю, каким бы ни был малым параметр захвата κ, его величина становится большей единицы. В этом случае электроны высыпаются из потенциальных ям волны, и она существовать не может.

В заключение необходимо остановиться на следующем важном вопросе. Уже после возбуждения волны и захвата ею электронов плазма становится неравновесной. С увеличением фазовой скорости волны захваченные в ее потенциальные ямы электроны ускоряются и выносятся в хвост распределения электронов плазмы. То есть волна формирует пучок электронов со средней скоростью, равной скорости, на которой электроны резонансно взаимодействуют с волной. Эта скорость становится много больше тепловой скорости электронов $V_r \gg V_T$. В связи с этим отклонение распределения электронов от равновесного в процессе возникновения замедленной волны только растет. С другой стороны, из-за столкновений электронов пучка с электронами и ионами плазмы эта система стремится к равновесному состоянию. Если время релаксации пучка электронов меньше времени образования замедленной волны, то вышеприведенное описание возникновения замедленной волны теряет всякий смысл. Выясним также, по какому закону убывает число захваченных волной электронов из-за их столкновения с заряженными частицами плазмы. Для нахождения частоты столкновений электронов пучка с электронами и ионами плазмы воспользуемся формулой для транспортного сечения [19]. В нашем конкретном случае эту формулу можно упростить, воспользовавшись тем, что средняя скорость электронов пучка много больше тепловой скорости электронов плазмы $V_r \gg V_T$. На этом основании можно положить скорость основной массы электронов и ионов равной нулю, тогда относительная скорость пучка, входящая в формулу для транспортного сечения, будет равна его скорости V_r. Поэтому упрощенная формула транспортного сечения в случае классического рассеяния приобретает вид

$$\sigma_t = 2\pi\left(\frac{Ze^2}{\mu V_r^2}\right)^2 \ln\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}\right), \qquad (29)$$

где $\mu = mm_i/(m+m_i)$ — приведенная масса, Z — зарядовое число иона. Найдем угол рассеяния θ_g, который разделяет электроны, покидающие и не покидающие потенциальные ямы волны. Он определяется с помощью закона сохранения импульса. Изменение величины продольного импульса электрона, который отклонился при столкновении с заряженной частицей от первоначального направления на угол θ_g, равно $|\delta p_z| = 2\mu\upsilon\sin^2\theta_g/2$, где $\upsilon \approx V_r$ — относительная скорость соударения. Приравняв максимальное значение потенциальной энергии захваченного электрона изменению его кинетической энергии $e\varphi_m = \delta p_z^2/2m$ в процессе соударения, найдем

$$\theta_g = \sqrt{2}\left(\frac{2e\varphi_m}{mV_r^2}\right)^{1/4}.$$

Так как $V_E \ll V_T \ll V_r$, где $V_E = \sqrt{2e\varphi_m/m}$, то $\theta_g \ll \pi$. Все электроны с углом рассеяния $\theta_g < \theta \le \pi$ после столкновения покидают потенциальные ямы волны. Однако основная масса столкновений происходит с малыми углами рассеяния $0 \le \theta \le \theta_g$ и большими прицельными расстояниями (вплоть до бесконечности), поэтому вероятность высыпания электронов мала. Подставив угол θ_g в (29), найдем с учетом его малости транспортное сечение покинувших потенциальные ямы волны электронов

$$\sigma_t \approx 2\pi\left(\frac{Ze^2}{mV_r^2}\right)^2 \ln\left(1+\sqrt{\frac{e\varphi_m}{2mV_r^2}}\right).$$

Раскладывая логарифм в ряд по φ_m и ограничиваясь старшим порядком, окончательно получим

$$\sigma_t \approx 2\pi\left(\frac{Ze^2}{mV_r^2}\right)^2 \sqrt{\frac{eA}{mV_r^2}}.$$

Максимальная плотность электронов, захваченных в процессе возбуждения волны, равна $n_{tr0} \approx 2f_0(u_0)R$. Число захваченных электронов, которые покидают потенциальные ямы волны после их столкновения с заряженными частицами плазмы, пропорционально времени, числу столкновений в единицу времени и числу захваченных электронов, вступающих в столкновения, $\Delta n_{tr} = \nu(n_{tr0} - \Delta n_{tr})t$. Отсюда выразим число захваченных электронов

$$\Delta n_{tr} = n_{tr0}\frac{\nu t}{1+\nu t},$$

покинувших потенциальные ямы волны. При $t \to \infty$ все захваченные электроны высыпаются из потенциальных ям волны $\Delta n_{tr} = n_{tr0}$. Очевидно, что если число столкновений за время t_w образования замедленной волны мало $\nu t_w \ll 1$, то в процессе возникновения этой волны можно пренебречь электронами, высыпающими из ее потенциальных ям $\Delta n_{tr} \approx 0$. Сравним время между столкновениями и время образования замедленной волны. Зная транспортное сечение, найдем число столкновений в единицу времени [19] $\nu = nV_r\sigma_t$, тогда время между столкновениями равно

$$\tau = \frac{1}{\nu} \approx \frac{1}{2\pi n V_r}\left(\frac{mV_r^2}{Ze^2}\right)^2 \sqrt{\frac{mV_r^2}{eA}}.$$

Если L_w — длина пробега волны с момента ее возбуждения, на протяжении которого магнитное поле уменьшается до нуля, то время прохождения этого пути равно $t_w = L_w/V_r$. Это и есть время образования замедленной волны. Очевидно, влиянием столкновений на существование пучка захваченных электронов можно пренебречь, если время образования замедленной волны много меньше времени между столкновениями $t_w \ll \tau$. Окончательно получаем следующее условие:

$$L_w \ll \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{mV_r^2}{Ze^2}\right)^2\sqrt{\frac{mcV_r^2}{e^2A_\perp}} \tag{30}$$

для длины, на протяжении которой магнитное поле должно уменьшиться до нуля. Кроме приведенного ограничения необходимо учитывать, что эволюция будет адиабатически медленной, если это расстояние много больше длины волны. Отметим, что, согласно условию классического расстояния, $Ze^2/\hbar V_r \gg 1$, если $Z = 4$, формулы (29), (30) имеют смысл вплоть до скоростей, равных $V_r \approx 10^8$. Расчеты в сантиметровом диапазоне для концентрации порядка $10^3\,\mathrm{cm}^{-3}$ и амплитуды $A_\perp = 1$ C.G.S.E. показывают, что расстояние, на протяжении которого магнитное поле уменьшается до нуля, должно лежать в пределах $1\,\mathrm{cm} \ll L_w \ll 5\cdot 10^{24}\,\mathrm{cm}$. Если скорость, на которой происходит резонансное взаимодействие, становится релятивистской, то транспортное сечение вычисляется по формуле [19]

$$\sigma_t \approx Z^2\left(\frac{e^2}{\gamma}\right)^2 \ln\left(2\,\frac{r_D}{\lambda}\right)$$

$$\approx Z^2\left(1-\frac{V_r^2}{c^2}\right)\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \ln\left(\frac{(1-V_r^2/c^2)T}{2\pi n(mc^2e\hbar)^2}\right),$$

где r_D — радиус Дебая, $\lambda = \lambda/2\pi$. Очевидно, при $V_r \approx c$ транспортное сечение значительно уменьшается, вследствие этого L_w становится еще больше, чем в классическом случае.

Заключение

Известно, что в однородной равновесной плазме поперечные волны не могут существовать без замедляющих структур в отстутствие магнитного поля. В [3–5] показано, что достаточно небольшого количества захваченных волной электронов по сравнению с их основной массой, чтобы фазовая скорость этой волны в равновесной незамагниченной плазме стала меньше скорости света. Однако как физически реализуются такие поперечные волны в этих работах не указано. Выше описан естественный процесс трансформации поперечной волны с захваченными электронами, бегущей вдоль магнитного поля в однородной плазме, в поперечную волну, способную существовать с фазовой скоростью, меньшей скорости света, в области равновесной плазмы, где отсутствует магнитное поле. В замагниченной плазме, если скорость, на которой электроны резонансно взаимодействуют с поперечной волной, меньше скорости света, то в потенциальные ямы этой волны захватываются электроны плазмы. Возможность распространения поперечных волн, нагруженных захваченными электронами, с фазовой скоростью, меньшей скорости света (замедленных поперечных волн) в равновесной незамагниченной плазме, основана на том, что вклад захваченных электронов в правую часть диспресионного уравнения противоположен по знаку вкладу нерезонансных электронов. Если по абсолютной величине он превышает вклад нерезонансных электронов, то правая часть дисперсионного уравнения становится большей единицы, это означает, что фазовая скорость волны будет меньше скорости света.

Процедуру нахождения дисперсионного уравнения поперечной волны в плазме с магнитным полем можно упростить. Дело в том, что из анализа дисперсионного уравнения, взятого в линейном приближении, следует, что с уменьшением магнитного поля скорость, на которой происходит резонансное взаимодействие электронов с волной, растет. Согласно адиабатическому инварианту, это приводит к уменьшению полной энергии электронов, находящихся в потенциальных ямах волны. Захваченные электроны опускаются на дно потенциальных ям волны, вследствие этого ориентация их поперечной скорости в любой плоскости, перпендикулярной направлению распространению волны, становится одинаковой вдоль векторного потенциала. В этом случае дисперсионное уравнение удобно определять на основе гидродинамической модели, представив плотность тока электронов в виде $\mathbf{j}_{tr} = en_{tr}\langle V_{re}\rangle(e/c)\mathbf{A}_\perp/A$, где $\langle V_{tr}\rangle$ — из средняя скорость, n_{tr} — плотность электронов, захваченных волной. Основное количество электронов захватывается на начальном этапе эволюции в процессе возбуждения волны внешними источниками. С другой стороны, после возбуждения волны на этапе, когда магнитное поле уменьшается, а скорость, на которой происходит резонансное взаимодействие электронов с волной, растет, электроны, как показывает анализ адиабатического инварианта, не покидают потенциальных ям волны. Их число при распространении волны сохраняется, поэтому достаточно вычислить плотность электронов n_{tr0}, захватываемых волной, в процесс ее возбуждения. Количество захваченных электронов вычислялось во многих работах [17,18], посвященных резонансному взаимодейству электронов как с продольными, так и с поперечными волнами. Установлено, что их число определяется фазовым объемом, занимаемым этими электронами, который пропорционален корню квадратному из амплитуды волны, поэтому $n_{tr0} \sim \sqrt{A}$. В результате нелинейная поправка в дисперсионном уравнении, обусловленная вкладом захваченных электронов, для поперечной волны, бегущей в плазме вдоль магнитного поля, оказывается обратно пропорциональной $\sqrt{A}$. Такой же она остается и после исчезновения магнитного поля [3–5]. Анализ дисперсионного уравнения, полученного с учетом нелинейной поправки, обусловленной вкладом захваченных электронов, также показывает, что скорость, на которой электроны резонансно взаимодействуют с волной, в процессе уменьшения магнитного поля растет. В результате, как ранее отмечалось, с уменьшением магнитного поля электроны опускаются на дно потенциальных ям волны, оставаясь в процессе эволюции жестко захваченными.

Отрицательный вклад нерезонансных электронов в дисперсионное уравнение достигает минимальной величины, когда исчезает магнитное поле. Если в этот момент нелинейная поправка, обусловленная вкладом захваченных электронов, в дисперсионном уравнении по абсолютной величине будет больше вклада нерезонансных электронов, то поперечная волна может существовать в равновесной плазме в отстутствие магнитного поля. Сравнение вкладов резонансных и нерезонансных электронов дает условие трансформации поперечной волны, бегущей вдоль магнитного поля, в поперечную замедленную волну, нагруженную захваченными электронами и способную существовать в равновесной плазме. Это условие не зависит от величины концентрации плазмы и в основном связано с ограничением на амплитуду волны.

Изучение замедленных поперечных волн представляет интерес не только в плазменной электронике. Такие волны могут существовать в солнечной короне или в магнитосфере Земли, зарождаясь в областях с магнитным полем и распространяясь затем в области, где это поле очень слабое или отсутствует.

Список литературы

[1] *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В.* и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974. С. 208.
[2] *Давыдовский В.Я., Сапогин В.Г., Уколов А.С.* // ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 6. С. 1175.
[3] *Давыдовский В.Я., Матвеев А.И.* // Физика плазмы. 1987. Т. 13. Вып. 4. С. 443–448.
[4] *Матвеев А.И.* // Физика плазмы. 2009. Т. 35. № 4. С. 351–361. Plasma Rep. 2009. Vol. 35. P. 315–326.
[5] *Krasovsky V.L.* // Phys. Lett. A. 2010. Vol. 374. P. 1751.
[6] *Истомин Я.И., Капман В.И.* // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. Вып. 1. С. 131–142.
[7] *Матвеев А.И.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 11. С. 2125–2129.
[8] *Krasovsky V.L., Matsumoto H.* // Phys. Plas. 1998. Vol. 5. N 6. P. 2210–2216.
[9] *Krasovsky V.L.* // Atmos. Sol. Terr. Phys. 2007. Vol. 69. P. 969–972.
[10] *Lutomirski R.F., Sudan R.N.* // Phys. Rev. 1966. Vol. 147. P. 156–161.
[11] *Roberts C.S., Buchsbaum S.J.* // Phys. Rev. A. 1964. Vol. 135. P. 381–385.
[12] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1967. С. 327.
[13] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1965. С. 162.
[14] *Shklyar D.R., Matsumoto H.* // Surv. Geophys. 2009. Vol. 30. P. 55–104.
[15] *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. С. 28.
[16] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статическая физика. М.: Наука, 1964. С. 140.
[17] *Истомин Я.И., Капман В.И., Шкляр Д.Р.* // ЖЭТФ. 1973. Т. 64. Вып. 6. С. 2073–2080.
[18] *Бакай А.О., Степановски Ю.П.* Адиабатические инварианты. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
[19] *Голанд В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е.* Основы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1977. С. 43–45.