

01;09;12

Пространственная фрактальная характеристика природного материала на примере талой воды из озерного льда

© В.К. Балханов, Ю.Б. Башкуев, М.Г. Дембелов, В.Б. Хаптанов

Институт физического материаловедения СО РАН,
670047 Улан-Удэ, Россия
e-mail: ballar@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 28 февраля 2012 г.)

Представлены результаты измерений удельного электрического сопротивления (УЭС) талой воды, полученные из льда соленого озера Киран, расположенного на юге Бурятии и являющегося источником лечебной грязи. Установлена степенная пространственная характеристика УЭС талой воды. Степенная характеристика моделирована методами фрактальной геометрии.

Введение

Известно, что при последовательном соединении двух проводников их сопротивления R_1 и R_2 складываются, т.е. общее сопротивление R будет равно сумме $R_1 + R_2$. Выберем весь проводник в виде цилиндра поперечного сечения S . Пусть он состоит из двух проводников с длинами z_1 и z_2 . Поскольку удельное сопротивление $\rho = RS/z$, то для двух последовательно расположенных проводников 1 и 2 общее удельное сопротивление будет

$$\rho(1+2) = (\rho_1 z_1 + \rho_2 z_2) / (z_1 + z_2). \quad (1)$$

Нашу операцию можно назвать „суммированием“. При „суммировании“ трех последовательно расположенных проводников общее удельное сопротивление будет

$$\rho(1+2+3) = (\rho_1 z_1 + \rho_2 z_2 + \rho_3 z_3) / (z_1 + z_2 + z_3). \quad (2)$$

Такую операцию „суммирования“ можно проводить для любого числа последовательно расположенных проводников. Этим самым, зная удельное сопротивление каждого проводника, можно найти их общее удельное сопротивление. Например, пусть среда состоит из 4 однородных материалов единичной длины. Их удельные сопротивления имеют последовательно значения 4, 3, 2 и $1 \Omega \cdot m$. Проведя формулами (1), (2) и т.д. „суммирование“, в итоге получаем кривую 1. Обратим внимание, что значения величин по осям отложены в логарифмическом масштабе. Однако суммирование

можно начинать не с проводников 1 и 2, а в обратном порядке, начиная с проводников 4 и 3. Определяя этим самым удельные сопротивления $\rho(4+3)$, $\rho(4+3+2)$ и $\rho(4+3+2+1)$, для наших значений в итоге получаем кривую 2 на рис. 1. Видим, что результат суммирования зависит от исходного порядка начала суммирования. Причем если удельные сопротивления последовательно уменьшаются, то зависимость общего удельного сопротивления от размера всего материала будет ниспадающей. Отметим также нелинейный характер кривых на рис. 1.

Реальные материалы, имеющиеся в природной среде, характеризуются неоднородным строением, т.е. имеют неоднородное распределение проводящих участков. Целью настоящей работы является решение вопроса о том, каким является общее удельное сопротивление какого-либо реального материала.

Талая вода из керна озерного льда

В качестве реального материала выберем талую воду из озерного льда. В весенний период из льда соленого озера Киран, расположенного на юге Бурятии и являющегося источником лечебной грязи, выпиливался цилиндрический керн диаметром 10 см и длиной 120 см, равной толщине льда. Керн распиливался на 12 цилиндров длиной по 10 см. После таяния цилиндров в лабораторных условиях у образовавшейся минерализованной талой воды при температуре $16^\circ C$ кондуктометром УК-0.2.1 измерялось удельное электрическое сопротивление. При этом кондуктометр позволяет проводить измерения на переменном токе на частотах 120 Hz, 1 и 10 kHz. На этих частотах, собственно, и проводились измерения. Кондуктометр еще позволяет проводить измерения на частоте 100 Hz, но оно близко к частоте 120 Hz, поэтому авторы проводили измерения на трех указанных частотах. В табл. 1 приведены результаты измерения на указанных частотах. Отсчет в сантиметрах начинается с верхней кромки льда. Величина z , например 50 см, указывает, что растаявший цилиндр ледяного

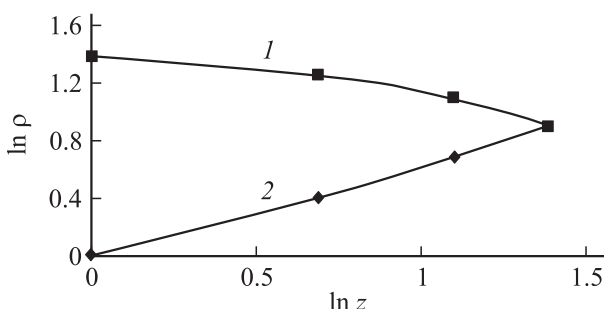


Рис. 1. Результат суммирования однородных сопротивлений.

керна имеет номер 5, отсчет ведется от верхней кромки льда. Обратим внимание, что цилиндр под номером 11 в измерениях не участвовал. Дело в том, что верхний слой озерного льда толщиной 20 см постоянно подвергается физико-химическим воздействиям, связанным с ежедневным перепадом температуры и привнесением извне аммиачных веществ. Нижний слой толщиной 30 см постоянно взаимодействует с высокоминерализованной водой и не характеризует свойства самого льда. Поэтому в дальнейшей обработке результатов измерений верхний слой толщиной 20 см и нижний слой толщиной 30 см не учитывались. Для наглядности на рис. 2 показаны результаты измерений для каждого цилиндра на частоте 120 кГц.

Далее проведем „суммирование“ удельных сопротивлений из табл. 1. Особенность „суммирования“ заключается в том, что верхний слой толщиной 20 см и нижний слой толщиной 30 см не учитывались. Этим самым рассматривались только удельные сопротивления $\rho(3 + 4)$, $\rho(3 + 4 + 5)$, ... и $\rho(3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)$. Соответственно при „суммировании“ в обратном порядке учитывались только $\rho(9 + 8)$, ... и $\rho(9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3)$. В ходе „суммирования“ установлено, что на частоте 120 Гц пространственная характеристика удельного сопротивления является степенной и зависит от того, откуда начинается само „суммирование“

Таблица 1. Удельное сопротивление талой воды при температуре 16°C

cm	120 Hz	1 kHz	10 kHz
10	4.25	4.21	4.2
20	4.3	4.25	4.23
30	3.71	3.67	3.66
40	2.88	2.85	2.84
50	2.6	2.57	2.55
60	2.5	2.47	2.46
70	2.5	2.47	2.46
80	2.33	2.30	2.29
90	1.89	1.86	1.85
100	1.92	1.9	1.89
120	1.39	1.37	1.36

Таблица 2. Пространственная характеристика удельного электрического сопротивления талой воды на разных частотах при температуре 16°C

frequency	$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$
120 Hz	$\ln \rho_1 = 1.705 - 0.1712 \ln z$
1 kHz	$\ln \rho_1 = 1.696 - 0.1717 \ln z$
10 kHz	$\ln \rho_1 = 1.696 - 0.1727 \ln z$
frequency	$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3$
120 Hz	$\ln \rho_2 = 0.28 - 0.1537 \ln z$
1 kHz	$\ln \rho_2 = 0.26 - 0.1557 \ln z$
10 kHz	$\ln \rho_2 = 0.254 + 0.156 \ln z$

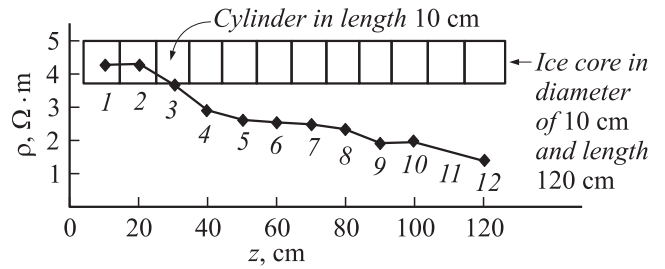


Рис. 2. Удельное электрическое сопротивление талой воды на частоте 120 Гц при 16°C, полученная из раставявших цилиндров льда длиной 10 см и диаметром 10 см.

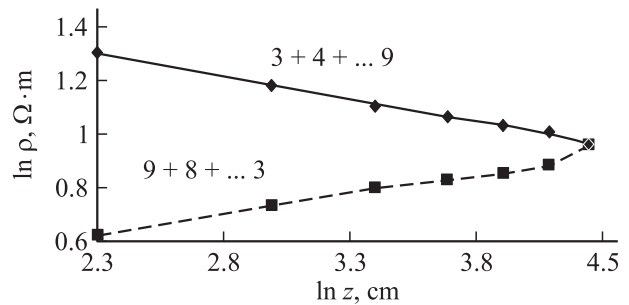


Рис. 3. Пространственная характеристика удельного сопротивления талой воды на частоте 120 Гц: \blacklozenge — $\rho_1(z)$ — „суммирование“ начинается с кубика талой воды, взятого с верхней кромки льда; \blacksquare — $\rho_2(z)$ — „суммирование“ начинается с кубика талой воды, взятого с нижней кромки льда.

(рис. 3). Именно

$$\rho_1 \sim z^{-0.17}, \quad \rho_2 \sim z^{0.15}. \quad (3)$$

Здесь $\rho_1(z)$ получено, когда „суммирование“ начинается с кубика талой воды под № 3, а $\rho_2(z)$ „суммирование“ начинается с кубика талой воды под № 9. В табл. 2 представлены результаты „суммирования“ на всех измеряемых частотах. Видим, что степенной показатель с точностью < 1% одинаков на всех измеряемых частотах, но зависит от направления „суммирования“. Степенной характер закономерностей (3) позволяет предположить, что их можно описать методами фрактальной геометрии.

Моделирование фрактальной геометрией

Согласно положениям фрактальной геометрии, проводящие и диэлектрические участки сплошного материала распределены по объему самоподобным образом. Фрактальное распределение проводимости должно сказаться и на законах распространения электромагнитных волн. Электрические свойства природных объектов описываются проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ϵ (магнитные свойства не рассматриваем). Влияние неоднородного распределения σ и ϵ на внешнее электромагнитное поле часто моделируют однородными слоями,

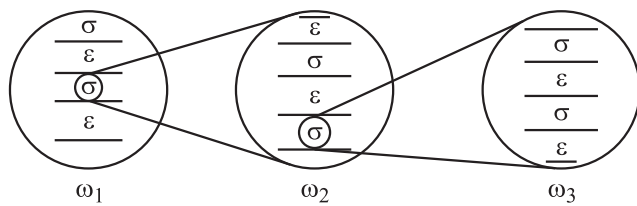


Рис. 4. Фрактальное распределение электрических параметров неоднородной среды. Под разным увеличением, т.е. на разных частотах, каждый слой подобен любому другому слою; ω — круговая частота.

в которых σ и ϵ постоянны. Фрактальное распределение σ и ϵ также можно моделировать однородными слоями. Причем слои обладают только либо проводящими, либо диэлектрическими свойствами. На каждой частоте внешнего поля каждый слой подобен другим слоям со своим распределением электрических параметров (рис. 4). Простейшая модель, в рамках которой распределение проводящих участков связано с фрактальной геометрией, основана на канторовском множестве. Эта модель позволяет ввести фрактальную размерность D как величину, описывающую самоподобие проводящих участков, причем для канторовского множества $D < 1$.

Электромагнитные процессы в веществе описываются материальными уравнениями Максвелла. Они приводят к следующему уравнению для тангенциальной компоненты магнитного поля H в проводящей среде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Здесь μ_0 — магнитная постоянная. Самоподобие распределения проводимости должно приводить к тому, что уравнения Максвелла будут инвариантными относительно законов геометрического подобия [1]:

$$z' = \eta z, \quad t' = \eta^{1/D} t, \quad (5)$$

где η — масштабный множитель. Обоснование того, что величина D в степенном показателе (5) является фрактальной размерностью, независимым образом дано в [2,3].

Неизменность свойств объектов во всех масштабах приводит к тому, что физические и геометрические величины выражаются друг через друга степенным образом. Аналогично (5), предположим, что законам подобия удовлетворяют магнитное поле и проводимость:

$$H' = \eta^a H, \quad \sigma' = \eta^b \sigma. \quad (6)$$

Магнитная постоянная μ_0 при этом не меняется, ее изменение приведет только к переопределению единиц измерения. Подставляя (5) и (6) в уравнение (4) и считая само уравнение (4) инвариантным, находим закон подобия для проводимости:

$$\sigma' = \eta^{-2+1/D} \sigma. \quad (7)$$

Другие закономерности даны в [4–7]. Исключая масштабный множитель η следующим приемом

$$\eta = \frac{z'}{z} = \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^{1/(-2+1/D)},$$

находим пространственную характеристику удельного электрического сопротивления $\rho = 1/\sigma$:

$$\rho \sim z^{2-1/D}, \quad (8)$$

где D — фрактальная размерность распределения проводящих участков. Сравнивая (8) с результатами табл. 2, находим, что на всех частотах с точностью до двух значащих чисел фрактальные размерности

$$D_1 = 0.46, \quad D_2 = 0.54. \quad (9)$$

Понятно, что удельные сопротивления льда и талой воды отличаются друг от друга. Но можно предположить, что их пространственное распределение не меняется. Этому способствовало то, что распиленные керны льда сразу изолировались друг от друга. Тогда полученные фрактальные размерности (8) отражают пространственное расположение проводящих участков и самого льда.

Численные значения результатов измерений указывают, что фрактальные размерности D_1 и D_2 удовлетворяют соотношению

$$D_1 + D_2 = 1. \quad (10)$$

Оно выполняется с погрешностью $< 1\%$. Можно предположить, что в ходе измерений установлена теорема, согласно которой для некоторых природных материалов фрактальная размерность канторовского множества, описывающая неоднородное распределение проводимости, зависит от направления, причем сумма их фрактальных размерностей равна единице.

Заключение

В результате измерений установлено, что пространственная характеристика удельного электрического сопротивления талой воды, полученной из соленого озерного льда, описывается степенным законом. Теоретическое описание результатов измерений моделировано фрактальной геометрией. Из результатов измерения следует теорема, согласно которой сумма фрактальных размерностей, описывающих пространственную характеристику удельного сопротивления, в зависимости от направления „суммирования“ равна единице. Сравнивая рис. 1 и 3, можно заключить, что проводимость льда на оз. Киран уменьшается с верхней кромки льда к нижней кромке. Наличие двух фрактальных размерностей D_1 и D_2 означает следующее. Электромагнитная волна, падая сверху извне на верхнюю кромку льда, будет „видеть“ перед собой неоднородный материал, пространственное распределение проводимости которого будет описываться канторовским множеством с фрактальной

размерностью D_1 . Такую волну можно измерить прибором ИПИ (измерителем поверхностного импеданса), располагая прибор с антеннами, раскинутыми на поверхности льда. Если электромагнитная волна проникает из-под земной поверхности, то она „увидит“ перед собой неоднородный материал, пространственное распределение проводимости которого будет описываться канторовским множеством с фрактальной размерностью D_2 .

Прибор ИПИ обычно имеет антенны размером в несколько метров, что существенно меньше длины электромагнитной волны. Поэтому принимают, что на участке в несколько метров поверхность Земли имеет однородное распределение проводимости. Остается рассматривать только неоднородное распределение проводящих участков по глубине. Поэтому в настоящей работе проводилось суммирование последовательных проводников. Если бы размер, например, электрической антенны был порядка километров, то пришлось бы суммировать параллельно расположенные проводники. Поскольку такие измерения, насколько известно, не проводились, то соответствующие вычисления в настоящей работе не приводятся.

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
- [2] Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2006. № 6. С. 39–45.
- [3] Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 5. С. 149–152.
- [4] Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. // Сб. Тр. VI Междунар. симпозиума по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии. СПб., 21–24 июня 2005. С. 265–268.
- [5] Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. Вып. 3. С. 469–472.
- [6] Балханов В.К., Адвокатов В.Р., Башкуев Ю.Б. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 2. С. 146–148.
- [7] Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Фрактальные характеристики электромагнитных процессов. LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. Saarbrücken. Germany, 2011. 203 с.