01

Влияние переменного тока на плазменную частоту, высоту потенциального барьера и порог термической активации в джозефсоновском переходе

© А.И. Ломтев

59585 Бат-Ям, Израиль
e-mail: lomtev.alexander@gmail.com

(Поступило в Редакцию 17 февраля 2012 г.)

Получено точное решение задачи об одновременной перенормировке высокочастотным током плазменной частоты, высоты потенциального барьера и порога термической активации в джозефсоновском переходе. Такая перенормировка осуществляется единой универсальной функцией.

При низких температурах джозефсоновские переходы проявляют уникальное макроскопическое квантовое поведение [1]. В последние годы подобные эффекты все больше привлекают внимание исследователей [2–5].

В работах [4,5] получены приближенные выражения для перенормировок переменным током порога термической активации и плазменной частоты в джозефсоновском переходе. Покажем, что задача о таких одновременных перенормировках решается точно в рамках одной работы.

Как известно, динамика джозефсоновского перехода подобна движению частицы в потенциале вида „стиральной доски“ [1]

$$U(\varphi) = -E_J(\cos\varphi + j\varphi), \qquad (1)$$

где постоянный ток j через джозефсоновский переход дается в единицах критического тока перехода I_C, φ — джозефсоновская фаза, $E_J = \frac{\hbar I_C}{2e}$ — джозефсоновская энергия. Если емкость джозефсоновского перехода достаточно велика, т.е. параметр МакКамбера–Стюарта β много больше единицы [1] $\beta = \left(\frac{2e}{\hbar}\right) I_C R_N^2 C \gg 1$ (R_N и C — сопротивление и емкость джозефсоновского перехода), то на дне потенциальной ямы могут происходить низкочастотные медленно затухающие плазменные колебания фазы, частота которых определяется соотношением

$$\omega_p = \left(\frac{2eI_C}{\hbar C}\right)^{1/2} (1 - j^2)^{1/4}. \qquad (2)$$

Эта зависимость впервые наблюдалась в работе [6] при изучении туннельных джозефсоновских переходов, подключенных к источнику постоянного тока. Время жизни состояния вблизи дна потенциальной ямы определяется формулой Крамерса [7] $\tau = \frac{2\pi}{\omega_A} \exp\left(-\frac{\Delta U}{kT}\right)$, где ω_A — частота попыток [1]. В случае туннельных джозефсоновских переходов с $\beta \gg 1$ частота попыток ω_A равна плазменной частоте ω_p. Здесь высота потенциального барьера ΔU дается выражением

$$\Delta U = \frac{3}{2} E_J (1 - j^2)^{3/2}, \qquad (3)$$

если к переходу приложен постоянный ток.

Для количественного и качественного анализа используем уравнение для динамики джозефсоновского перехода [1]

$$\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + \sin\varphi = j + j_d \sin(\omega_d t), \qquad (4)$$

где j, j_d — амплитуды постоянной и переменной составляющих тока в единицах критического тока I_C, ω_d — частота осцилляций высокочастотного тока, α — параметр затухания. В дальнейшем будем предполагать, что $\omega_d \gg \omega_p$.

Если высокочастотный ток отсутствует, то плазменная частота ω_p выражается формулой (1), в которой $j = \sin\varphi_0$, высота потенциального барьера ΔU выражается соотношением (3), где также $j = \sin\varphi_0$, а порог термической активации определяется потенциалом $U(\varphi_0) = -E_J(j\varphi_0 + \cos\varphi_0)$.

В присутствии переменного тока плазменная частота ω_p и высота потенциального барьера ΔU определяются соотношением $(\sin\varphi)_{\text{mid}} = j$, а порог термической активации — выражением $U_{\text{eff}}(\varphi) = -E_J[(\cos\varphi)_{\text{mid}} + j(\varphi)_{\text{mid}}]$, где усреднение осуществляется по периоду осцилляций высокочастотного тока $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$.

Джозефсоновскую фазу будем искать в следующем виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \qquad (5)$$

где φ_0 — медленная, а φ_1 — быстро осциллирующая части фазы.

Теперь уравнение (4) можно представить как систему двух уравнений

$$\ddot{\varphi}_1 + \alpha\dot{\varphi}_1 = j_d \sin(\omega_d t), \qquad (6)$$

$$\sin(\varphi_0 + \varphi_1) = j. \qquad (7)$$

Решение уравнения (6) для φ_1 имеет вид

$$\varphi_1 = -\frac{j_d}{\omega_d^2 + \alpha^2} \sin(\omega_d t) - \frac{\alpha}{\omega_d} \frac{j_d}{\omega_d^2 + \alpha^2} \cos(\omega_d t) \qquad (8)$$

в противоположность решениям (6) и (4) в работах [4] и [5] соответственно, в которых осциллирующие множители содержат ω_p вместо ω_d. В работе [4] также сказано, „что в уравнении состояния джозефсоновского перехода (2) при усреднении по периоду переменного тока $\sin\varphi$ зануляется и получается уравнение (3)“. К сожалению, это утверждение ошибочно, так как при отличном от нуля постоянном токе j никакой процедурой усреднения $\sin\varphi$ не может быть обращен в нуль.

Подставляя решение (8) в уравнение (7), получаем

$$
\begin{aligned}
j &= \sin(\varphi_0+\varphi_1) = \sin\varphi_0\cos\varphi_1 + \cos\varphi_0\sin\varphi_1 \\
&= \sin\varphi_0\cos[a\sin(\omega_d t) + b\cos(\omega_d t)] - \cos\varphi_0\sin[a\sin(\omega_d t) \\
&\quad + b\cos(\omega_d t)] = \sin\varphi_0\{\cos[a\sin(\omega_d t)]\cos[b\cos(\omega_d t)] \\
&\quad - \sin[a\sin(\omega_d t)]\sin[b\cos(\omega_d t)]\} - \cos\varphi_0\{\sin[a\sin(\omega_d t)] \\
&\quad \times\cos[b\cos(\omega_d t)] + \cos[a\sin(\omega_d t)]\sin[b\cos(\omega_d t)]\} \\
&= \sin\varphi_0\Bigg\{\bigg[J_0(a) + 2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(a)\cos(2k\omega_d t)\bigg] \\
&\quad \times\bigg[J_0(b) + 2\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l J_{2l}(b)\cos(2l\omega_d t)\bigg] \\
&\quad - 2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(a)\sin\big((2k+1)\omega_d t\big)2\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l J_{2l+1}(b) \\
&\quad \times\cos\big((2l+1)\omega_d t\big)\Bigg\} - \cos\varphi_0\Bigg\{2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(a) \\
&\quad \times\sin\big((2k+1)\omega_d t\big)\bigg[J_0(b) + 2\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l J_{2l}(b)\cos(2l\omega_d t)\bigg] \\
&\quad + \bigg[J_0(a) + 2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(a)\cos(2k\omega_d t)\bigg]2\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l J_{2l+1}(b) \\
&\quad \times\cos\big((2l+1)\omega_d t\big)\Bigg\},
\end{aligned} \tag{9}
$$

где

$$a = \frac{j_d}{\omega_d^2+\alpha^2} \quad \text{и} \quad b = \frac{\alpha}{\omega_d}\frac{j_d}{\omega_d^2+\alpha^2}.$$

Здесь мы использовали следующие ряды Фурье [8]:

$$
\begin{aligned}
\cos(z\sin\theta) &= J_0(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(z)\cos(2k\theta), \\
\sin(z\sin\theta) &= 2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(z)\sin\big((2k+1)\theta\big), \\
\cos(z\cos\theta) &= J_0(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(z)\cos(2k\theta), \\
\sin(z\cos\theta) &= 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(z)\cos\big((2k+1)\theta\big),
\end{aligned} \tag{10}
$$

где $J_k(z)$ — функция Бесселя k-го порядка.

Усредненное по периоду осциллирующего тока T_d выражение (9) имеет вид

$$\sin\varphi_0 = \frac{j}{J_0(a)J_0(b) + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(a)J_{2k}(b)}. \tag{11}$$

Перенормированная амплитудой j_d и частотой ω_d переменного тока плазменная частота определяется соотношением

$$\omega_{\text{peff}} = \left(\frac{2eI_C}{\hbar C}\right)^{1/2} \times\left\{1 - \frac{j^2}{\big[J_0(a)J_0(b) + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(a)J_{2k}(b)\big]^2}\right\}^{1/4}. \tag{12}$$

Аналогично перенормированная высота потенциального барьера ΔU_{eff} дается выражением

$$\Delta U_{\text{eff}} = \frac{3}{2}E_J \times\left\{1 - \frac{j^2}{\big[J_0(a)J_0(b) + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(a)J_{2k}(b)\big]^2}\right\}^{3/2}. \tag{13}$$

Из формул (12) и (13) видно, что при перенормировке плазменная частота и высота потенциального барьера с ростом амплитуды высокочастотного тока j_d уменьшаются.

Для нахождения перенормировки порога термической активации достаточно найти усредненное по периоду переменного тока T_d значение $(\cos\varphi)_{\text{mid}}$, учитывая, что, согласно формуле (8), $(\varphi_1)_{\text{mid}} = 0$.

Итак, используя формулы (8), (10), получаем

$$
\begin{aligned}
\cos\varphi &= \cos(\varphi_0+\varphi_1) = \cos\varphi_0\cos\varphi_1 - \sin\varphi_0\sin\varphi_1 \\
&= \cos\varphi_0\cos[a\sin(\omega_d t) + b\cos(\omega_d t)] + \sin\varphi_0\sin[a\sin(\omega_d t) \\
&\quad + b\cos(\omega_d t)] = \cos\varphi_0\{\cos[a\sin(\omega_d t)]\cos[b\cos(\omega_d t)] \\
&\quad - \sin[a\sin(\omega_d t)]\sin[b\cos(\omega_d t)]\} + \sin\varphi_0\{\sin[a\sin(\omega_d t)] \\
&\quad \times\cos[b\cos(\omega_d t)] + \cos[a\sin(\omega_d t)]\sin[b\cos(\omega_d t)]\} \\
&= \cos\varphi_0\Bigg\{\bigg[J_0(a) + 2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(a)\cos(2k\omega_d t)\bigg] \\
&\quad \times\bigg[J_0(b) + 2\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l J_{2l}(b)\cos(2l\omega_d t)\bigg] \\
&\quad - 2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(a)\sin\big((2k+1)\omega_d t\big)2\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l J_{2l+1}(b) \\
&\quad \times\cos\big((2l+1)\omega_d t\big)\Bigg\} + \sin\varphi_0\Bigg\{2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(a)
\end{aligned}
$$

$$\times \sin\big((2k+1)\omega_d t\big)\left[J_0(b) + 2\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l J_{2l}(b)\cos(2l\omega_d t)\right]$$

$$+\left[J_0(a) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(a)\cos(2k\omega_d t)\right] 2\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l J_{2l+1}(b)$$

$$\times \cos\big((2l+1)\omega_d t\big)\bigg\}. \tag{14}$$

Усреднение выражения (14) по периоду переменного тока T_d дает

$$(\cos\varphi)_{\text{mid}} = \cos\varphi_0\big[J_0(a)J_0(b) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(a)J_{2k}(b)\big]. \tag{15}$$

Перенормированный потенциал термической активации имеет вид

$$U_{\text{eff}}(\varphi_0) = -E_J\big\{\big[J_0(a)J_0(b) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(a)J_{2k}(b)\big]$$

$$\times \cos\varphi_0 + j\varphi_0\big\}. \tag{16}$$

Из выражения (16) следует, что с ростом амплитуды переменного тока j_d порог термической активации понижается.

Полученные результаты находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными работы [9]. О связи теории с экспериментом более подробно смотрите в работах [4,5].

Таким образом, в настоящей работе найдены точные, одновременно перенормированные высокочастотным током плазменная частота, высота потенциального барьера и порог термической активации джозефсоновского перехода при воздействии как переменного, так и постоянного токов. Такие перенормировки осуществляются единой универсальной функцией.

Список литературы

[1] *Лихарев К.К.* Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985. 320 с.

[2] Quantum Mesoscopic Phenomena and Mesoscopic Devices in Microelectronics / Ed. by I.O. Kulik, R. Ellialtioglu, Kluwer Academic Publisher, 2000.

[3] *Cosmelli C., Carelli P., Castelliano M.G.* et al. // Superconductor Science and Technology. 2003. Vol. 16. N 6. P. 1337–1340.

[4] *Аскерзаде Н.И.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 20. С. 30–34.

[5] *Аскерзаде Н.И.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 14. С. 83–87.

[6] *Dahm A.J., Denenstein A., Finnegan T.F., Langenberg D.N., Scalapino D.J.* // Phys. Rev. Lett. 1968. Vol. 20. N 5. P. 859–861.

[7] *Kramers H.* // Physica. 1940. Vol. 7. N 2. P. 284–289.

[8] *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

[9] *Gronbech-Jensen N., Castelliano M.G., Chiarello F., Torrioli G.* et al. // Cond-Mat. 2004. 0 403 245.