Журнал технической физики, 2013, том 83, вып. 2

11

Теория рассеяния электромагнитных волн СВЧ-диапазона в мутной среде

© О.В. Константинов, А.В. Матвеенцев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 3 июля 2012 г.)

Вычислен коэффициент экстинкции электромагнитных СВЧ-волн за счет их рассеяния на кластерах, взвешенных в аморфной среде, которые делают эту среду мутной. Это происходит подобно тому, как кластеры масла превращают воду в молоко. В рассматриваемом случае кластеры являются проводящими, из металла или полупроводника. Коэффициент экстинкции связан известным образом с сечением рассеяния света на отдельном кластере. Получена новая формула для сечения рассеяния света, когда затухание колебаний электрона обусловлено лишь спонтанным излучением квантов света. При этом сечение резонансного рассеяния света может стать очень большим. Показано, что такое может быть лишь в нитевидном нанокластере. Кроме того, энергия фонона в отрезке нити должна быть больше энергии фотона, близкой к расстоянию между уровнями энергии электрона в кластере.

Введение

Объект изучения — это взвесь рассеивающих кластеров в прозрачном для СВЧ-волн аморфном диэлектрике. Она образует мутную для СВЧ-волн среду. В оптическом диапазоне хорошо известный пример мутной среды — это молоко, в котором рассеивающими частицами являются частицы жира. По аналогии можно предположить, что сильно рассеивающие наночастицы в диэлектрической основе могут рассеивать и СВЧ-волны. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы обратить внимание на преимущества частиц удлиненной формы (отрезки нитей), которые, по нашим оценкам, рассеивают гораздо сильнее, чем частицы компактной формы (сферы или кубики). Поэтому в работе вычисляется сечение рассеяния СВЧ-волн на нанотрезках проводящих нитей, изготовленных из металла или легированного полупроводника n-типа. С помощью полученной формулы для сечения находится коэффициент экстинкции волн в диэлектрике, содержащем данную концентрацию рассеивающих нано частиц.

1. Основные результаты

а) Сечение рассеяния на кластере

Основным результатом является формула для сечения резонансного рассеяния СВЧ-волн на нитевидном кластере длиной l:

$$\sigma = l^2\sqrt{\frac{3\lambda}{4\pi a_B}}\,\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\,A_{mn}J(z)\,\frac{1}{\varepsilon\mu};$$

$$A_{mn} = X_{mn}/l; \quad a_B = \hbar^2/me^2. \tag{1}$$

Здесь X_{mn} — матричный элемент координаты $\mathbf{X}$, a_B — боровский радиус, λ — длина СВЧ-волны, ω — ее частота, k_BT — тепловая энергия, ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, окружающей кластер. Величина J имеет зависимость от частоты, отражающую спектральную функцию плотности состояний. Она имеет максимум, примерно равный единице, при $\omega = \omega_0$, где $\hbar\omega_0 = E_n - E_m$ — энергия перехода из нижнего (сильнее заполненного) состояния в верхнее, менее заполненное. Аргументом функции J является переменная z:

$$z = \frac{\omega-\omega_0}{\nu}; \quad J(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}}\,\frac{1}{1+(y-z)^2};$$

$$\nu = \frac{4}{3}\,\frac{e^2}{\hbar c}\,|k_0X_{mn}|^2\omega_0. \tag{2}$$

Множитель $1/\sqrt{y}$ под интегралом и есть упомянутая выше функция плотности состояний, которая имеет корневую особенность при $y = 0$. Радиационная ширина резонанса при $\omega = \omega_0$ обозначена выше через ν. Физическая причина радиационного затухания состоит в переизлучении фотона. Резонансная частота дается формулой:

$$\omega_0 = 2\pi\sqrt{\omega_l\varepsilon_F}, \quad \omega_l = 2\hbar/ml^2, \quad \varepsilon_F = E_F/\hbar. \tag{3}$$

Здесь E_F — энергия Ферми электронов в кластере, m — масса электрона. Частота ω_l для отрезка нити длиной $1\,\mu$m получается равной $2\cdot10^8\,\mathrm{s}^{-1}$. Частота $\omega_0 = 2\pi f_0$ $(f_0 = 10\,\mathrm{GHz})$ фактически совпадает с частотой зондирующего излучения ω. Таким образом, формула (3) определяет энергию Ферми в частотных единицах

$$\varepsilon_F = \frac{\omega_0^2}{4\pi^2\omega_l}. \tag{4}$$

Для рассмотренного примера $\varepsilon_F = 5\cdot10^{11}\,\mathrm{s}^{-1}$, $E_F = 3\cdot10^{-4}$ eV. Таким образом, энергия Ферми получается значительно меньше типичной для металла величины (порядка электронвольта). Поэтому рассматриваемый кластер должен быть изготовлен из легированного полупроводника или полуметалла.

б) Коэффициент экстинкции κ

Величина κ связана с сечением рассеяния σ СВЧ-волн на кластере. Сильное рассеяние получается только тогда, когда кластер подобен отрезку нити, что связано с корневой особенностью функции плотности состояний. Таким образом, получается и большая величина параметра экстинкции СВЧ-волны κ:

$$\kappa = N\sigma, \quad N = (10/l)^3. \tag{5}$$

Концентрацию кластеров в растворе N мы связали со средней длиной отрезка нити $l = 1\,\mu\text{m} = 10^{-4}\,\text{cm}$, т.е. принято $N = 10^{15}\,\text{cm}^{-3}$. Итак, окончательно

$$\kappa = \frac{10^3}{l}\sqrt{\frac{3\lambda}{4\pi a_B}}\,\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\,A_{mn}J(z)\,\frac{1}{\varepsilon\mu}. \tag{6}$$

Далее будет показано, что для нитки можно положить $J = 1$, $A_{mn} = 1$. Полагая $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$, $\lambda = 3\,\text{cm}$ $(\omega \cong 6\cdot 10^{10})$, $T = 300\,\text{K}$. Тогда получим $\kappa = 0.4\cdot 10^{-6}\,\text{cm}^{-1}$, т.е. длина экстинкции оказывается менее $0.1\,\mu$m.

2. Возбуждение верхнего состояния электрона

Наиболее компактный способ описания процесса возбуждения получается при использовании аппарата матрицы плотности. Уравнение для матрицы плотности будет иметь вид

$$i\hbar\partial\hat{F}/\partial t = \lfloor\hat{H},\hat{F}\rfloor, \quad \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}. \tag{7}$$

Здесь $\hat{H}$ — гамильтониан системы, содержащий невозмущенный оператор $\hat{H}_0$ и возмущение $\hat{V}$, создаваемое СВЧ-полем:

$$\hat{V} = -\frac{e}{mc}(\mathbf{A},\mathbf{p}); \quad \hat{\mathbf{p}} = -ih\boldsymbol{\nabla}, \tag{8}$$

$\mathbf{A}$ — векторный потенциал СВЧ-поля, $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}c/i\omega. \tag{9}$$

Амплитуда поля $\mathbf{E}_0$ предполагается малой, так что уравнение (7) для матрицы плотности можно линеаризовать, положив $\hat{F} = \hat{F}_0 + \hat{f}$, где $\lfloor\hat{H}_0,\hat{F}_0\rfloor = 0$, $\hat{f}$ — возмущенная часть матрицы плотности. Тогда получим

$$i\hbar\partial\hat{f}/\partial t = \lfloor\hat{H}_0,\hat{f}\rfloor + \lfloor\hat{V},\hat{F}_0\rfloor - i\hbar\nu\hat{f}. \tag{10}$$

В этом уравнении введен релаксационный член $i\hbar\nu\hat{f}$ с затуханием ν, которое дается формулой (2). Отношение $\nu/\omega \ll 1$, поскольку в него входит два малых множителя — постоянная тонкой структуры $e^2/\hbar c = 1/137$ и $(kx_{mn})^2$. Последний содержит квадрат отношений матричного элемента x_{mn} к длине волны λ. Решение уравнения (10) для матричного элемента получается элементарно:

$$f_{nm} = \frac{V_{nm}}{\hbar(\omega + i\nu - \omega_{nm})}\,(F_m - F_n), \tag{11}$$

где обозначено

$$\hbar\omega_{nm} = E_n - E_m, \quad F_m = \frac{1}{e^{\frac{E_m-\mu}{k_BT}} + 1}. \tag{12}$$

Здесь F_m и F_n — фермиевские функции с химпотенциалом μ. Разность $F_m - F_n$ автоматически возникает из коммутатора $\lfloor\hat{V}_0,\hat{F}_0\rfloor$ и описывает спонтанное и вынужденное излучение.

Если $\hbar\omega \ll k_BT$, то эта разность упрощается:

$$F_m - F_n = \frac{\hbar\omega}{4k_BT\,\mathrm{ch}^2(\hbar\omega_{nm}/2k_BT)} \cong \frac{\hbar\omega}{4k_BT}. \tag{13}$$

Формула (11), содержащая разность функций заполнения $F_m - F_n$, является главным результатом применения аппарата матрицы плотности.

3. Сечение рассеяния СВЧ-волн на кластере

С помощью формулы (15) можно без труда найти СВЧ-электрический ток в кластере, наведенный внешним электрическим полем:

$$I = eV^*_{nm}f_{nm}, \tag{14}$$

где V_{nm} — матричный элемент оператора скорости электрона. Произведение $(\mathbf{IE})$ определяет энергетические потери СВЧ-волны на кластере в секунду

$$W = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\mathbf{IE}^*). \tag{15}$$

Отождествим теперь эти потери с рассеиваемой СВЧ-мощностью, т.е. с $\sigma_{mn}S$, где $S = \varepsilon\mu cE^2/4\pi$ — вектор Пойнтинга падающей волны.

$$\frac{\sigma_{mn}E^2\varepsilon\mu c}{4\pi} = W, \quad \sigma_{mn} = \frac{2\pi}{\varepsilon\mu c}\,\frac{\mathrm{Re}(\mathbf{IE})}{E^2}. \tag{16}$$

В результате приходим к следующей формуле для сечения рассеяния СВЧ-волны, сопровождающего одиночный переход электрона $(m \to n)$:

$$\sigma_{mn} = \frac{3}{4\pi\varepsilon\mu}\lambda^2\,\frac{\nu^2}{\nu^2 + (\omega - \omega_{nm})^2}\,(F_m - F_n). \tag{17}$$

Формула, подобная (17), впервые была получена в работе Макса Планка и повторена в большом числе монографий, ссылки на которые содержатся в [1]. При низкой температуре $(T \to 0,\ F_m \approx 1,\ F_n = 0,\ \nu \to 0)$ в условиях резонанса $\omega_{nm} = \omega \cong \omega_0$ в нашей работе [2] был впервые получен простой ответ

$$\sigma_{mn} = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\frac{1}{\varepsilon\mu}, \tag{18}$$

т.е. сечение примерно равно квадрату половины длины волны в диэлектрике.

Если имеется ансамбль низко лежащих состояний m и высоко лежащих состояний n, то эффективное сечение рассеяния будет

$$\sigma = \sum_{m,n} \sigma_{mn}, \quad k_m = \frac{2\pi m}{l}. \tag{19}$$

Кинетическая энергия электрона

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar k^2}{2m}, \tag{20}$$

откуда

$$\Delta\varepsilon_k = \sqrt{\frac{2\hbar\varepsilon_k}{m}}\,\Delta k. \tag{21}$$

Правило отбора для матричного элемента координаты легко получить для одномерного случая. В этом случае состояния матричного элемента m и n должны быть разной четности, например, нижнее состояние m будет $\cos[2\pi mx/l]/\sqrt{l}$, а соседнее верхнее состояние n будет $\sin[2\pi(m+1)x/l]/\sqrt{l}$. Тогда матричный элемент координаты между соседними состояниями с разной четностью будет равен длине l отрезка нити, т.е. $X_{mn} = l$. Разность волновых векторов

$$\Delta k = k_{\mathrm{up}} - k_{\mathrm{low}} = \frac{2\pi(m+1)}{l} - \frac{2\pi n}{l} = \frac{2\pi}{l}. \tag{22}$$

Теперь формуле (21) можно придать вид

$$\Delta\varepsilon_k = \omega_0 = 2\pi\sqrt{\omega_l\varepsilon_k}, \tag{23}$$

где ω_l дается формулой (3). Рассматривая переход вблизи уровня Ферми, мы положили $\varepsilon_k = \varepsilon_F$.

Вычислим теперь полное сечение рассеяния света (19), суммируя (17) по m. Заменим сумму по m на интеграл

$$\sigma = \sigma_0 I, \quad \sigma_0 = \frac{3}{4\pi\varepsilon\mu}\lambda^2\frac{\hbar\omega}{4k_BT}, \tag{24}$$

$$I = \frac{l}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{1\left(\frac{\omega-\omega_{nm}}{\nu}\right)^2}. \tag{25}$$

Заменяя переменную интегрирования κ на переменную ε, согласно (20), получим выражение для интеграла I через введенный ранее (формулой (2)) интеграл J, т.е.

$$I(z) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\nu}{\omega_l}}\int\limits_0^{\infty}\frac{dy}{2\sqrt{y}}\frac{1}{1+(y-z)^2}. \tag{26}$$

Здесь переменная z определяется формулой (2). Формулы (2) и (26) связаны множителем $\sqrt{\nu/\omega_l}$ следующим образом:

$$I(z) = \sqrt{\frac{\nu}{\omega_l}}\,J(z). \tag{27}$$

Формула (24) для сечения рассеяния содержит два множителя, один σ_0 большой, а второй $\sqrt{\nu/\omega_l}$ маленький, который возник из плотности состояний. Для трехмерного кластера компактной формы (кубика или сферы) малый множитель будет содержать не $(\nu/\omega_l)^{1/2}$, а $(\nu/\omega_l)^{3/2}$. Благодаря этому сечение рассеяния на кластере компактной формы оказывается на много порядков меньшим, чем сечение рассеяния на нитке. Таким образом, из формулы (20) получается выражение (1) для сечения рассеяния света.

Функция $J(z)$ дается формулой (2), она приблизительно равна единице при $z = 0$, далее она спадает почти до нуля на частотном расстоянии порядка 20ν, это и будет спектральная ширина линии. Оценивая ν по формуле (2), получим, что отношение $\nu/\omega_0 = 4\cdot 10^{-10}$, таким образом, ширина спектральной линии на частоте падающего излучения $f_0 = 10\,\mathrm{GHz}$ составляет $0.5\,\mathrm{kHz}$. Такая ширина спектральной линии является неприемлемо узкой, и ее расширение возможно лишь за счет дисперсии нитевидных кластеров по их длине. Увеличение дисперсии длины отрезков кластеров на порядок приводит к увеличению ширины линии в 100 раз. При этом концентрация кластеров в клеевом растворе будет на порядок большей, т.е. мы получим $N = 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$.

Список литературы

[1] *Измайлов С.В.* Курс электродинамики. М.: Учпедгиз, 1962. 439 с.

[2] *Костантинов О.В., Матвеенцев А.В.* // ПЖФТ. 2010. Т. 36. Вып. 22. С. 17–20.