03

Нелинейный асимптотический расчет неустойчивости Кельвина–Гельмгольца

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, С.А. Суханов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 25 мая 2012 г.)

В третьем порядке малости получено аналитическое решение задачи о периодическом капиллярно-гравитационном волновом движении однородно заряженной границы раздела двух несмешивающихся идеальных несжимаемых жидкостей, нижняя из которых идеально электропроводна, а верхняя, диэлектрическая, совершает поступательное движение с постоянной скоростью параллельно границе раздела сред. Найдена нелинейная поправка к частоте, имеющая резонансный вид. Показано, что положения внутренних нелинейных резонансов определяются суммой полевого параметра и параметра Вебера и зависят от отношения плотностей сред и волнового числа. В ситуации, когда плотность верхней жидкости превышает плотность нижней, резонансных ситуаций нет.

Введение

Изучение периодческого волнового движения на границе раздела несмешивающихся жидкостей представляет интерес благодаря многочисленным техническим, технологическим и академическим приложениям. В этой связи проблема неоднократно становилась предметом исследования (см., например, [1–7] и указанную там литературу). Но до сих пор не проведено ее нелинейного анализа в третьем порядке малости с определением нелинейных поправок к частотам волн и особенностей реализации внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия. Это и составляет предмет настоящей работы.

Физическая и математическая формулировки задачи

Рассмотрим две несмешивающиеся идеальные несжимаемые жидкости, верхняя из которых диэлектрическая с диэлектрической постоянной ε_* имет плотность ρ_1 и заполняет в поле сил тяжести $\mathbf{g}$ полубесконечное пространство $z > 0$ ($\mathbf{g}_{\parallel} - \mathbf{n}_z$, $\mathbf{n}_z$ — орт декартовой оси), а нижняя, идеально проводящая плотности ρ_2, заполняет полупространство $z \le 0$. Плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной границей раздела сред, характеризуемой коэффициентом поверхностного натяжения σ. Примем, что в верхней среде имеется электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0 \equiv E_0\mathbf{n}_z$, это приводит к тому, что на невозмущенной капиллярным волновым движением границе раздела сред появляется электрический заряд с постоянной плотностью $\kappa \equiv \varepsilon_* E_0/4\pi$. Пусть верхняя среда движется параллельно границе раздела с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$ вдоль орта $\mathbf{n}_x$, а начальные условия имеют вид

$$t = 0: \qquad u = u_0, \quad \xi(x,t) = \xi\cos kx, \quad \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} = 0,$$

где k — волновое число, ξ — амплитуда волны, $\xi(x,t)$ — функция, описывающая малое вертикальное отклонение границы раздела сред от равновесного в поле силы тяжести состояния.

Проанализируем устойчивость капиллярно-гравитационных волн в описанной системе, полагая, что волновые течения жидкостей в верхней и нижней средах являются потенциальными с потенциалами $\Phi_1(\mathbf{r},t)$ и $\Phi_2(\mathbf{r},t)$ соответственно. Учитывая, что скорости гидродинамических движений жидкости много меньше скорости распространения электромагнитного сигнала в диэлектрической среде, электрическое поле в врехней среде будем описывать с помощью электрического потенциала $\Psi(\mathbf{r},t)$. В результате математическая формулировка задачи о расчете волнового движения в двухслойной системе несмешивающихся жидкостей при наличии на границе раздела равномерно распределенного электрического заряда и тангенциального скачка поля скоростей запишется в виде [7]

$$\Delta\Phi_j(\mathbf{r},t) = 0, \quad j = 1;2, \quad \Delta\Psi(\mathbf{r},t) = 0,$$

$$P_j(\mathbf{r},t) = -\rho_j\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}\Phi_j\right]^2 + gz\right),$$

$$z \to \infty: \qquad \boldsymbol{\nabla}\Phi_1(\mathbf{r},t) \to \mathbf{u}_0, \quad -\boldsymbol{\nabla}\Psi(\mathbf{r},t) \to \mathbf{E}_0,$$

$$z \to -\infty: \qquad \boldsymbol{\nabla}\Phi_2(\mathbf{r},t) \to 0,$$

$$z = \xi(x,t): \quad (dF/dt) = 0, \ F(x,z,t) \equiv z - \xi(x,t) = 0,$$

$$U_z^{(1)}(\mathbf{r},t) = U_z^{(2)}(\mathbf{r},t), \quad \Psi = \Psi_S,$$

$$-P_1(\mathbf{r},t) + P_2(\mathbf{r},t) + P_E(\xi) - P_\sigma(\xi) = 0.$$

Здесь $P_1(\mathbf{r},t)$ и $P_2(\mathbf{r},t)$ — гидродинамические давления в первой и второй средах, $P_E \equiv \varepsilon_* E^2/8\pi$ и $P_\sigma(\mathbf{r},t) \equiv \sigma\,\mathrm{div}\,\mathbf{n}$ — давления на границу раздела электрических сил и сил поверхностного натяжения, $\mathbf{n} \equiv \boldsymbol{\nabla}F(x,z,t)/|\boldsymbol{\nabla}F(x,z,t)|$ — вектор нормали к границе раздела сред, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\boldsymbol{\nabla}\Psi(\mathbf{r},t)$ — напряженность электрического поля в верхней среде, $\Psi_S(t)$ —

электрический потенциал постоянный в каждый момент времени вдоль границы раздела сред.

Искомыми функциями являются $\xi(x,t)$, $\Phi_1(\mathbf{r},t)$, $\Phi_2(\mathbf{r},t)$ и $\Psi(\mathbf{r},t)$. Будем их искать в виде разложений по малому параметру $\varepsilon \equiv \xi\sqrt{\rho_2 g/\sigma}$ методом многих временных масштабов [8,9], в рамках которого функции представляются в виде асимптотических разложений по степеням ε и считаются зависящими не просто от времени t, но от разных его масштабов T_m, определенных по правилу: $T_m = \varepsilon^m t$. Искомые функции и потенциал проводящей границы раздела представим в виде разложений:

$$\xi(x,t) = \varepsilon\xi^{(1)}(x,T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2\xi^{(2)}(x,T_0,T_1) + \varepsilon^3\xi^{(3)}(x,T_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^4),$$

$$\Phi_1(\mathbf{r},t) = \Phi_1^{(0)}(\mathbf{r}) + \varepsilon\Phi_1^{(1)}(\mathbf{r},T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2\Phi_1^{(2)}(\mathbf{r},T_0,T_1) + \varepsilon^3\Phi_1^{(3)}(\mathbf{r},T_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^4),$$

$$\Phi_2(\mathbf{r},t) = \varepsilon\Phi_2^{(1)}(\mathbf{r},T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2\Phi_2^{(2)}(\mathbf{r},T_0,T_1) + \varepsilon^3\Phi_2^{(3)}(\mathbf{r},T_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^4),$$

$$\Psi_1(\mathbf{r},t) = \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \varepsilon\Psi^{(1)}(\mathbf{r},T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2\Phi^{(2)}(\mathbf{r},T_0,T_1) + \varepsilon^3\Phi^{(3)}(\mathbf{r},T_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^4),$$

$$\Psi_S(t) = \Psi_S^{(0)} + \varepsilon\Psi_S^{(1)}(T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2\Psi_S^{(2)}(T_0,T_1) + \varepsilon^3\Psi_S^{(3)}(T_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^4).$$

Производные по времени вычисляются с учетом полного набора временных масштабов

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\,\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\,\frac{\partial}{\partial T_2} + \varepsilon^3\,\frac{\partial}{\partial T_3} + \mathrm{O}(\varepsilon^4).$$

Подставляя выписанные разложения в сформулированную задачу и собирая слагаемые при одинаковых степенях ε, ее можно разделить на задачи различных порядков малости, причем задачи нулевого и первого порядков получаются однородными, а задачи второго и третьего — неоднородными. Функции неоднородности задачи второго порядка малости выражаются через решения нулевого и первого порядков, а функции неоднородности в задаче третьего порядка малости через решения нулевого, первого и второго порядков. Анализ проведем в безразмерных переменных, в которых $\rho_2 = \sigma = g = 1$, а малый параметр $\varepsilon \equiv \xi$. Оставим за всеми величинами прежние обозначения. Введем обозначение $\rho \equiv \rho_1/\rho_2$.

Решение сформулированной задачи в нулевом порядке малости легко выписывается

$$\Phi(0)_1 = u_0 x, \quad \Psi^{(0)} = -E_0 z,$$

$$P_1^{(0)} = -\rho z, \quad P_2^{(0)} = -z - \frac{\varepsilon_* E_0^2}{8\pi}.$$

Решение задачи первого порядка малости получается стандартными методами (см., например, [1,2,6,7]) и после удовлетворения начальным условиям принимает вид

$$\xi^{(1)}(x,t) = \xi\,\cos(kx - \omega_0 t),$$

$$\Phi_1^{(1)}(x,z,t) = -\left(\frac{\omega_0}{k} - u_0\right)\exp(-kz)\sin(kx - \omega_0 t),$$

$$\Phi_2^{(1)}(x,z,t) = -\frac{\omega_0}{k}\exp(kz)\sin(kx - \omega_0 t),$$

$$\Psi^{(1)}(x,z,t) = -E_0\exp(-kz)\cos(kx - \omega_0 t),$$

где частоты волн ω_0 удовлетворяют дисперсионному уравнению [10]:

$$\omega_0^2 - \frac{2\rho u_0 k}{(1+\rho)}\,\omega_0 + \frac{1}{(1+\rho)} \times \left[\rho u_0^2 k^2 + \frac{\varepsilon_* E_0^2 k^2}{4\pi} - (1-\rho)k - k^3\right] = 0. \qquad (1)$$

Полагая, что скорость не может быть ни отрицательной, ни комплексной величиной, выражения для частот представим в виде

$$\omega_0^{(1;2)} = \sqrt{\frac{\rho \mathrm{WE}}{(1+\rho)}}\,k \pm \sqrt{\frac{1}{(1+\rho)}\,[(1-\rho)k + k^3 - (\mathrm{We} + W)k^2]},$$

$$W \equiv \frac{\varepsilon_* E_0^2}{4\pi}, \quad \mathrm{We} \equiv \frac{\rho u_0^2}{1+\rho}. \qquad (2)$$

Несложно видеть, что из-за различия знаков перед радикалом существуют две волны с различными фазовыми скоростями. При $\rho < 1$ выражение под радикалом имеет минимум при $k \equiv \sqrt{1-\rho}$. Следовательно, для устойчивости границы необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$(W + \mathrm{We}) < 2\sqrt{(1-\rho)}.$$

При $(W + \mathrm{We}) = 2\sqrt{(1-\rho)}$ становится неустойчивой волна с $k \equiv \sqrt{1-\rho}$. Инкременты неустойчивости $\eta \equiv \eta(k,\rho)$ определяются модулем мнимой части частоты $|\mathrm{Im}\,\omega_0|$.

Решение неоднородной краевой задачи второго порядка малости можно записать в виде

$$\xi^{(2)}(x,t) = \frac{G}{L}\sin[2(kx - \omega_0 T_0)],$$

$$\Phi_1^{(2)}(x,z,t) = \frac{G_1}{L}\exp(-2kz)\sin[2(kx - \omega_0 T_0)],$$

$$\Phi_2^{(2)}(x,z,t) = \left(\frac{G_2}{L}\right)\exp(2kz)\sin[2(kx - \omega_0 T_0)],$$

$$\Psi^{(2)}(x,z,t) = \frac{G_3}{L}\exp(-2kz)\cos[2(kx - \omega_0 T_0) + \pi/2],$$

$$L \equiv \frac{(1+\rho)}{2k}\left[\big(2\omega_0(k)+\omega_0(2k)\big)-2(2k)u\right]$$
$$\times\,[2\omega_0(k)-\omega_0(2k)],$$
$$G \equiv \left[(1-\rho)\omega_0^2 - u\rho k\omega_0 - \rho u^2k^2 - Wk^2\right],$$
$$G_1 \equiv (\omega-uk)\left[(\rho+3)\omega_0^2k^{-1} - 5\gamma\omega_0\right.$$
$$\left.+(\rho-1)+(1+\rho)\mathrm{We}k - 4k^2 + Wk\right],$$
$$\gamma \equiv \sqrt{\rho(1+\rho)\mathrm{We}},$$
$$G_2 \equiv \omega\left[(3\rho+1)\omega_0^2k^{-1} - 3\gamma\omega_0 + (\rho-1)\right.$$
$$\left.+3(\rho+1)\mathrm{We}k - 4k^2 + 3Wk\right],$$
$$G_3 \equiv E_0\left[(\rho+3)\omega_0^2 - 5\gamma\omega_0k + (\rho-1)k\right.$$
$$\left.+(1+\rho)\mathrm{We}k^2 - 4k^3 + Wk^2\right].$$

Решение задачи третьего порядка малости не представляет особых математических трудностей, не считая громоздкости. Например, профиль поверхности с учетом слагаемых до третьего порядка малости включительно имеет вид

$$\xi(x,t) = \xi\cos\left[kx - (\omega_0+\varepsilon^2\delta)T_0\right] + \frac{G}{L}\,\xi^2$$
$$\times\sin[2(kx-\omega_0T_0)] + \frac{A}{D}\,\xi^3\sin[3(kx-\omega_0T_0)] + O(\varepsilon^4),$$
$$D \equiv (1+\rho)^2\{[2\omega_0(k)+\omega_0(2k)] - 2(2k)u\}\left[\big(3\omega_0(k)\right.$$
$$\left.+\omega_0(3k)\big) - 2(3k)u\right][2\omega_0(k)-\omega_0(2k)][3\omega_0(k)-\omega_0(3k)],$$
$$A \equiv 6k^3\Big\{\left(4\gamma\omega_0k - 2(1+\rho)\mathrm{We}k^2 + 2(1-\rho)\omega_0^2 - 2Wk^2\right)$$
$$\times\left[(1-\rho)\omega_0^2 - \gamma\omega_0k - (1+\rho)\mathrm{We}k^2 - Wk^2\right]$$
$$+\left(4\gamma\omega_0k^3 - 2(2\rho+1)\omega_0^2k^2\right) + \left[(3\rho+1)\omega_0^2 - 3\gamma\omega_0k\right.$$
$$\left.+(\rho-1)k + 3(1+\rho)\mathrm{We}k^2 + 3Wk^2 - 4k^3\right]$$
$$+\left(4\rho\omega_0^2k^2 - 8\gamma\omega_0k^3 + 4(1+\rho)\mathrm{We}k^4\right)\left[(\rho+3)\omega_0^2\right.$$
$$\left.-5\gamma\omega_0k + (\rho-1)k + (1+\rho)\mathrm{We}k^2 - 4k^3 + Wk^2\right]$$
$$-6Wk^4\left[(\rho+3)\omega_0^2 - 5\gamma\omega_0k + (\rho-1)k + (1+\rho)\right.$$
$$\left.\times\mathrm{We}\,k^2 + Wk^2 - 4k^3\right] + \Big[(\rho+2)\omega_0^2k^2 - \gamma\omega_0k^3$$
$$+Wk^4 + \frac{3}{2}k^5\Big]\left[2(\rho+1)\omega_0^2 + (\rho-1)k - 4\gamma\omega_0k\right.$$
$$\left.+2(1+\rho)\mathrm{We}\,k^2 - 4k^3 + 2Wk^2\right]\Big\},$$
$$\delta \equiv \frac{1}{2L[(1+\rho)\omega_0 - \gamma k]}$$
$$\times\left[\big(2(\rho-3)\omega_0 - 2\gamma k\big)k^2G_2 + 6Wk^3G_3 - M\right],$$
$$M \equiv (1+\rho)\omega_0^2k^2 + 5\gamma\omega_0k^3$$
$$-4(1+\rho)\mathrm{We}\,k^4 - 4Wk^4 + \frac{3}{2}\,k^5.$$

Видно, что нелинейная поправка к частоте δ, знаменатель которой содержит множитель $\sim[2\omega_0(k)-\omega_0(2k)]$, имеет резонансный вид ([11,12]). Причем резонанс совпадает с резонансом амплитудной поправки второго порядка малости (собственно говоря, этот резонанс сохраняется и в третьем порядке, но он уже не единственный). Амплитудный множитель третьего порядка малости в знаменателе содержит выражения $\sim[2\omega_0(k)-\omega_0(2k)][3\omega_0(k)-\omega_0(3k)]$ и, следовательно, также является резонансным. В обоих случаях речь идет о внутренних нелинейных вырожденных резонансах.

Положения резонансов определяются условиями обращения в ноль знаменателей L и D в нелинейных амплитудных поправках $\left(\frac{G}{L}\right.$ и $\left.\frac{A}{D}\right)$ и в поправке к частоте δ. Эти условия очевидно имеют вид $2\omega_0(k)=\omega_0(2k)$ и $3\omega_0(k)=\omega_0(3k)$.

В этих выражениях частота $\omega_0(k)$ определяется из дисперсионного уравнения (1), а частота $\omega_0(2k)$ — из дисперсионного уравнения:

$$\omega_0^2 - \frac{4\rho u_0k}{(1+\rho)}\,\omega_0 + \frac{1}{(1+\rho)}$$
$$\times\left[4\rho u_0^2k^2 + \frac{4\varepsilon_*E_0^2k^2}{4\pi} - 2(1-\rho)k - 8k^3\right] = 0,$$

которое получается из (1) при удвоении волнового числа. Наконец, частота $\omega_0(3k)$ является решением дисперсионного уравнения

$$\omega_0^2 - \frac{6\rho u_0k}{(1+\rho)}\,\omega_0 + \frac{1}{(1+\rho)}$$
$$\times\left[9\rho u_0^2k^2 + \frac{9\varepsilon_*E_0^2k^2}{4\pi} - 3(1-\rho)k - 27k^3\right] = 0,$$

которое получается из (1) при утроении волнового числа.

При выполнении условий резонанса второго порядка волна с волновым числом k, заданная в начальный момент времени, дважды взаимодействуя с более короткой волной с вдвое бóльшим волновым числом, передает ей энергию. В резонансе третьего порядка волна, заданная в начальный момент времени, трижды взаимодействуя с более короткой волной с волновым числом втрое бóльшим, передает ей часть своей энергии. О времени такого взаимодействия и о доле передаваемой энергии без дополнительных весьма громоздких расчетов судить нельзя.

На рис. 1 приведена зависимость резонансного сомножителя в нелинейном амплитудном члене третьего порядка малости: $\Omega\equiv3\omega_0(k)-\omega_0(3k)$, от волнового числа k и отношения плотностей ρ. Положения резонансов определяются геометрическим множеством точек

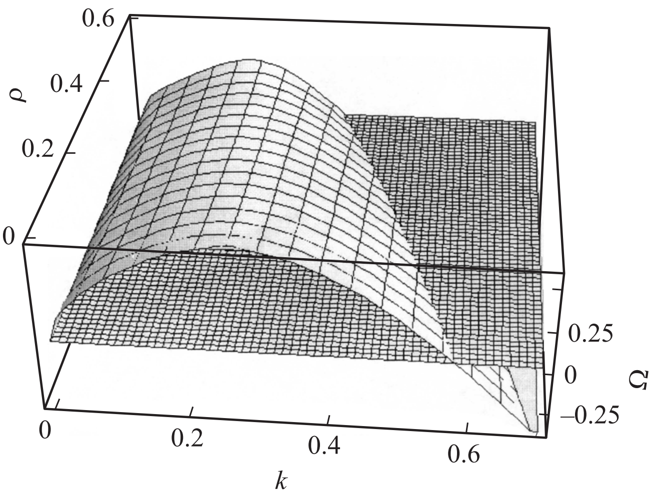

Рис. 1. Зависимость резонансного сомножителя $\Omega \equiv \equiv 3\omega_0(k) - \omega_0(3k)$ от безразмерного волнового числа k и отношения плотностей ρ, пересеченная нулевой плоскостью. Рассчитано при $\mathrm{We} + W = 1.2$.

пересечения поверхности $\Omega(k, \rho)$ нулевой плоскостью. Видно, что оно, в частности, зависит и от k, и от ρ.

На рис. 2, a приведена зависимость резонансного сомножителя в нелинейном амплитудном члене третьего порядка малости: $\Omega \equiv 3\omega_0(k) - \omega_0(3k)$, от волнового числа k и суммы параметров $\mathrm{We} + W$ при фиксированном отношении плотностей ρ, когда среда над жидкостью принимается газовой. Видно, что положение резонансов практически не меняется с изменением величины $\mathrm{We} + W$. На рис. 2, b приведена аналогичная зависимость, но рассчитанная при $\rho = 0.1$, а на рис. 2, c — при $\rho = 0.7$. Из сравнения рис. 2, a с b и рис. 2, b с c видно, что при увеличении отношения плотностей значение Ω практически не меняется, но меняется положение резонансов, которые сдвигаются в сторону меньших значений волновых чисел. Такая зависимость Ω от отношения плотностей ρ представляется очевидной: из десперсионного уравнения видно, что отношение плотностей ρ начинает играть заметную роль, только когда становится по величине сравнимо с единицей. Зависимость Ω от суммы параметров $\mathrm{We} + W$ определяется тем, что разность $m\omega_0(k) - \omega_0(mk)$ в соответствии с видом решения для дисперсионного уравнения (2) равна

$$m\sqrt{\frac{\rho \mathrm{We}}{(1+\rho)}}k$$

$$\pm m\sqrt{\frac{1}{(1+\rho)}[(1-\rho)k + k^3 - (\mathrm{We}+W)k^2]}$$

$$-\sqrt{\frac{\rho \mathrm{We}}{(1+\rho)}}km$$

$$\mp \sqrt{\frac{1}{(1+\rho)}[(1-\rho)mk + m^3k^3 - (\mathrm{We}+W)m^2k^2]}$$

$$= \pm m\sqrt{\frac{1}{(1+\rho)}[(1-\rho)k + k^3 - (\mathrm{We}+W)k^2]}$$

$$\mp \sqrt{\frac{1}{(1+\rho)}[(1-\rho)mk + m^3k^3 - (\mathrm{We}+W)m^2k^2]},$$

т.е. зависит только от суммы $\mathrm{We} + W$, а не от каждого из параметров We и W в отдельности.

Интересно отметить, что, согласно рис. 1, 2, все резонансные ситуации лежат в области гравитационных волн: $k < 1$ (в размерно виде: $k\sqrt{\sigma/\rho_2 g} < 1$). Расчеты

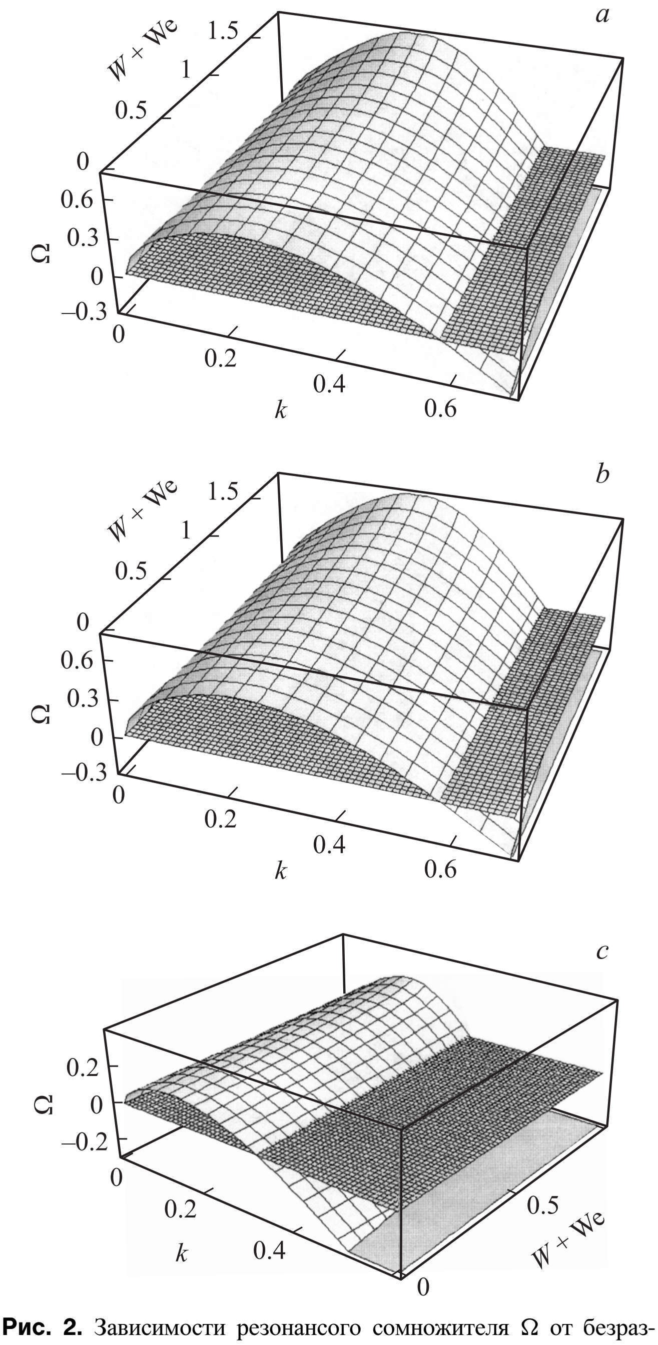

Рис. 2. Зависимости резонансого сомножителя Ω от безразмерного волнового числа k и суммы параметров $\mathrm{We} + W$. Рассчитано при: a — $\rho = 0.001$, b — $\rho = 0.1$, c — $\rho = 0.7$.

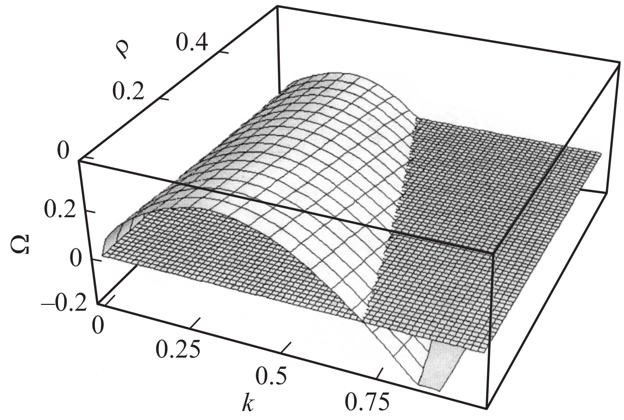

Рис. 3. Зависимость резонансного множителя $R \equiv \equiv 2\omega_0(k) - \omega_0(2k)$ от безразмерного волнового числа k и отношения плотностей ρ, пересеченная нулевой плоскостью. Рассчитано при $\mathrm{We} + W = 1$.

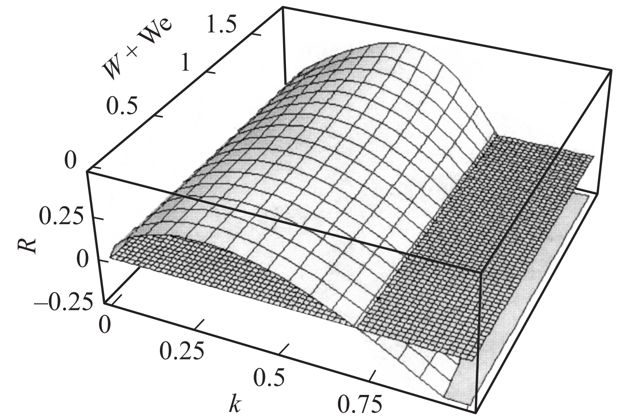

Рис. 4. Зависимость резонансного сомножителя R от безразмерного волнового числа k и суммы параметров $\mathrm{We} + W$. Рассчитано при $\rho = 0.001$.

показывают, что при $\rho > 1$ резонансных ситуаций не возникает ни при каких k. В области реализации неустойчивости Рэлея–Тейлора (по отношению плотностей и по волновым числам) гравитационного волнового движения как такового не существует. В области (по волновым числам), где существует капиллярное волновое движение, резонансных ситуаций также нет.

На рис. 3 приведены расчетные зависимости резонансного множителя в поправке к частоте и в амплитудном члене второго порядка малости: $R \equiv 2\omega_0(k) - \omega_0(2k)$ от волнового числа k и отношения плотностей ρ. На рис. 4 приведена зависимость резонансного сомножителя R от волнового числа k и суммы параметров $\mathrm{We} + W$ при фиксированном отношении плотностей ρ. Несложно видеть, что по разные стороны положения резонанса и знак нелинейной попарвки к частоте различен, это означает, что за счет нелинейного взаимодействия частота волны может как увеличиваться, так и уменьшаться.

Устойчивость границы нарушается, когда при изменении физических параметров квадрат частоты проходит через ноль в область отрицательных значений. С точностью до слагаемых четвертого порядка малости это условие можно записать в виде

$$\omega^2 = \left(\omega_0 + \delta\varepsilon^2\right)^2 \cong \omega_0^2 + 2\delta\omega_0\varepsilon^2 \le 0.$$

Видно, что знак нелинейной поправки к частоте определяет влияние нелинейного взаимодействия на устойчивость границы раздела сред по отношению к распределенному на ней электрическому заряду, приводя либо к увеличению устойчивости при положительных δ, либо к снижению устойчивости при отрицательных δ. Нелинейное взаимодействие волн приводит к изменению критической для реализации неустойчивости величины суммы безразмерных параметров $\mathrm{We} + W$. Напомним, что параметр W характеризует устойчивость плоской однородно заряженной поверхности электропроводной жидкости по отношению к поверхностному заряду [7,13], а параметр We — ее устойчивость по отношению к тангенциальному скачку поля скоростей [7,10,13].

Заключение

Проанализированы нелинейные закономерности реализации капиллярно-гравитационного волнового движения и его устойчивость в системе двух несмешивающихся жидкостей в поле силы тяжести, верхняя из которых является диэлектрической и движется относительно нижней поступательно с постоянной скоростью параллельно однородно заряженной поверхности раздела сред. Найдены положения внутренних нелинейных вырожденных резонансов. Показано, что нелинейная поправка к частоте имеет резонансный вид. Внутреннее нелинейное резонансное взаимодействие для неустойчивости Рэлея–Тейлора ($\rho > 1$) отсутствует как в области реализации неустойчивости, так и в той области, где существует капиллярное волновое движение.

Список литературы

[1] *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. I. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
[2] *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
[3] *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т. 2. М.: Мир, 1981. 366 с.
[4] *Кузнецов Е.А., Лушников П.М.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. № 2. С. 614–630.
[5] *Захватаев В.Е.* // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 45–55.
[6] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Федоров М.С.* // ЖТФ. Т. 81. Вып. 11. С. 31–39.
[7] *Ширяева С.О., Суханов С.А.* // ЭЖ „Исследовано в России“. 045. 2009. С. 522–531. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/045.pdf.
[8] *Nayfeh A.H.* // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. 3. P. 545–550.
[9] *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

[10] *Григорьев А.И., Федоров М.С., Суханов С.А.* // Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны. Саров. РФЯЦ–ВНИИЭФ. XIII Харитоновские чтения. 2011. С. 565–569.
[11] *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 336 с.
[12] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2008. 535 с.
[13] *Григорьев А.И., Суханов С.А., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 4. С. 99–109.