

01

## Устойчивость случайного процесса с $1/f$ -спектром при детерминированном воздействии

© В.П. Коверда, В.Н. Скоков

Институт теплофизики УрО РАН,  
620016 Екатеринбург, Россия  
e-mail: koverda@itp.uran.ru

(Поступило в редакцию 14 февраля 2012 г. В окончательной редакции 26 июня 2012 г.)

С использованием принципа максимума энтропии проведен анализ устойчивости результирующего процесса, который возникает при взаимодействии случайного процесса с  $1/f$ -спектром с детерминированным воздействием. При воздействии гармонической силой устойчивые результирующие процессы разделены на две ветви в зависимости от амплитуды гармонической силы. При воздействии экспоненциальной релаксации при увеличении коэффициента затухания результирующий процесс приобретает лоренцевский спектр, в котором отсутствуют высокоэнергетические низкочастотные выбросы.

### Введение

Флуктуации в большинстве физических процессов отражают природу микроскопического взаимодействия частиц, составляющих систему. Они содержат важную информацию о системе, несмотря на случайный источник их происхождения. В равновесных условиях величина флуктуаций имеет гауссовское распределение и лоренцевский спектр мощности. Для низких частот спектр мощности постоянный, а при высоких спадает обратно пропорционально квадрату частоты. Для некоторых систем наблюдаются флуктуации с другим спектром мощности, который обратен пропорционален первой степени частоты в диапазоне нескольких порядков величины:  $S(f) \propto 1/f$  [1]. Обычно считается, что таким спектром флуктуаций обладают достаточно сложные системы, а некоторые характерные параметры состояния таких систем находятся далеко от равновесия. Стационарные случайные процессы с  $1/f$ -спектром характеризуются критической динамикой и масштабнo-инвариантным распределением флуктуаций. В таких системах энергия флуктуаций может накапливаться на низких частотах, и в них возможны катастрофические выбросы.

Формальное математическое описание  $1/f$ -флуктуаций дает дробное интегрирование белого шума [2], но такое описание трудно связать с физическими свойствами системы. Свойства масштабной инвариантности имеют флуктуации термодинамических величин вблизи критической точки [3], в которой происходит сближение свойств различных фаз. Поэтому в критической точке масштабнo-инвариантные флуктуации развиваются без приближения к какому-либо фиксированному равновесному состоянию фазы. Для турбулентных потоков жидкости также наблюдается динамическое развитие флуктуаций в широком диапазоне временных и пространственных масштабов [4]. Некоторые механизмы возникновения  $1/f$ -флуктуаций могут быть охарактеризованы концепцией самоорганизованной критичности [5], кото-

рая описывает лавинную динамику. С использованием клеточных автоматов была продемонстрирована критичность поведения в большом числе компьютерных моделей систем, включающих „кучу песка“ [5], биологическую эволюцию [6] и межфазную динамику [7]. Системы, имеющие свойства самоорганизованной критичности, показывают устойчивое пространственное и временное масштабнo-инвариантное состояния без тонкой подстройки параметров. В этом состоит отличие самоорганизованной критичности от термодинамической критической точки.

В работе [8] случайные процессы с  $1/f$ -спектром флуктуаций и масштабнo-инвариантным распределением моделируются системой нелинейных стохастических уравнений, описывающей взаимодействующие неравновесные фазовые переходы:

$$\begin{aligned} d\varphi/dt &= -\varphi\psi^2 + \psi + \Gamma_1(t), \\ d\psi/dt &= -\psi\varphi^2 + 2\varphi + \Gamma_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — динамические переменные, которые связаны с параметрами порядка докритического и закритического фазовых переходов теории Ландау.  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  —  $\delta$ -коррелированные шумы с нормальным распределением. Критичность системы (1) отвечает такому уровню белого шума, который соответствует индуцированному шумом переходу [9].

### Принцип максимума энтропии для случайного процесса с $1/f$ -спектром

При моделировании флуктуационных процессов стохастическими уравнениями критерием устойчивости решения может быть принцип максимума энтропии. Из решений стохастических уравнений находятся вероятностные функции распределения, по которым определяется

информационная энтропия Шеннона [10]

$$H = - \sum_n P_n \lg(P_n). \quad (2)$$

Функции распределения  $P_n$  должны быть нормированы:  $\sum_n P_n = 1$ . Индекс  $n$  относится к последовательности разбиения аргумента функции распределения по величине. Информационная энтропия по существу имеет свойства статистической энтропии Гиббса [11], но используется также в статистике биологических, коммуникационных и социальных систем. Для анализа устойчивости сложных случайных процессов, которые возникают при воздействии на них детерминированной силой, также возможно использование принципа максимума информационной энтропии. При этом проблемы возникают со случайным процессом, который имеет  $1/f$ -спектр. Оказалось, что для таких процессов энтропия Гиббса–Шеннона не обеспечивает согласия с принципом максимума энтропии [11,12]. Для решения этой проблемы предложены другие выражения энтропии: энтропия Цаллиса [13] и энтропия Реньи [14]. По нашему мнению сложная система не может быть охарактеризована единственным распределением. При построении достаточно подробной теории будем иметь систему нелинейных стохастических уравнений, которые находятся в иерархии управления и подчинения. Если управляющему уравнению отвечает функция распределения с гауссовскими „хвостами“, то не существует проблемы с использованием принципа максимума энтропии Гиббса–Шеннона. Энтропия Цаллиса [13] или Реньи [14] может использоваться при ограниченной информации о сложной системе, например при анализе экспериментальных данных.

В системе стохастических уравнений (1) существуют различные функции распределения динамических величин. Первое уравнение системы (1) имеет функцию распределения  $P(\varphi^2)$  со степенным „хвостом“ [15]. Второе уравнение системы (1) имеет функцию распределения  $P(\psi^2)$ , которая спадает при возрастании аргумента так же, как и для гауссовского распределения. Анализ управления и подчинения [15] показал, что второе уравнение в системе (1) является управляющим, поэтому функция распределения второго уравнения может быть использована для нахождения максимума информационной энтропии Гиббса–Шеннона (2). Численными методами была рассчитана энтропия для функции распределения  $P(\psi)^2$  при различных значениях интенсивности белого шума  $\sigma$ . Оказалось, что положение максимума энтропии определяет критическое состояние системы с интенсивностью белого шума в уравнениях (1), соответствующей индуцированному шумом переходу. При этом спектры флуктуирующих величин были обратно пропорциональны частоте. Существование максимума энтропии не только объясняет настройку на критичность, но и свидетельствует об устойчивости режимов с  $1/f$ -спектром флуктуаций.

## Детерминированное воздействие на случайный процесс с $1/f$ -спектром

Фундаментальный принцип максимума энтропии может быть использован для оценки устойчивости результирующего процесса, который возникает при взаимодействии случайного процесса с  $1/f$ -спектром с другим случайным процессом. Поскольку нельзя зафиксировать все параметры, то при взаимодействии случайные процессы могут обмениваться между собой энергией, и устойчивым результирующим процессом будет тот, который отвечает максимуму энтропии. То же можно сказать и про детерминированное воздействие на случайный процесс. И в этом случае возможен обмен энергией между случайным процессом и детерминированным воздействием, а устойчивому результирующему процессу отвечает максимум энтропии. Например, иногда предлагается снизить влияние опасных низкочастотных выбросов в системе, генерирующей случайные пульсации с  $1/f$ -спектром, путем воздействия на нее гармонической силой. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Динамика результирующего процесса описывается уравнениями

$$\begin{aligned} d\varphi/dt &= -\varphi\psi^2 + \psi + \Gamma_1(t) + A \sin(2\pi f_h t), \\ d\psi/dt &= -\psi\varphi^2 + 2\varphi + \Gamma_2(t) + A \sin(2\pi f_h t). \end{aligned} \quad (3)$$

Для этой системы численными методами была рассчитана энтропия Гиббса–Шеннона  $H$  для функции распределения  $P(\psi^2)$  при различных значениях частот  $f_h$  и амплитуд  $A$  гармонической силы. Для численного интегрирования использован ансамбль, содержащий 256 систем, и в каждой системе проведено 4096 временных шагов интегрирования по методике, описанной в работе [15]. Результаты расчета энтропии в зависимости

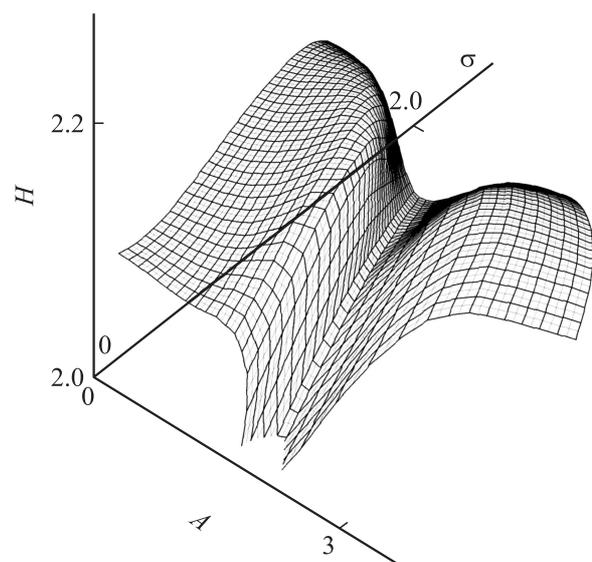
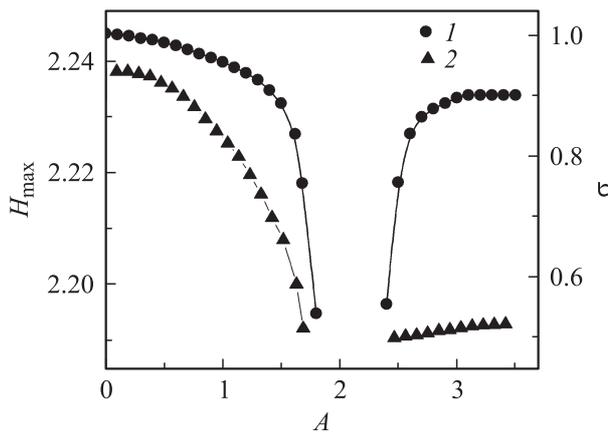


Рис. 1. Поверхность энтропии в зависимости от амплитуды белого шума  $\sigma$  и амплитуды гармонической силы  $A$  для частоты  $f_h = 0.2$ .

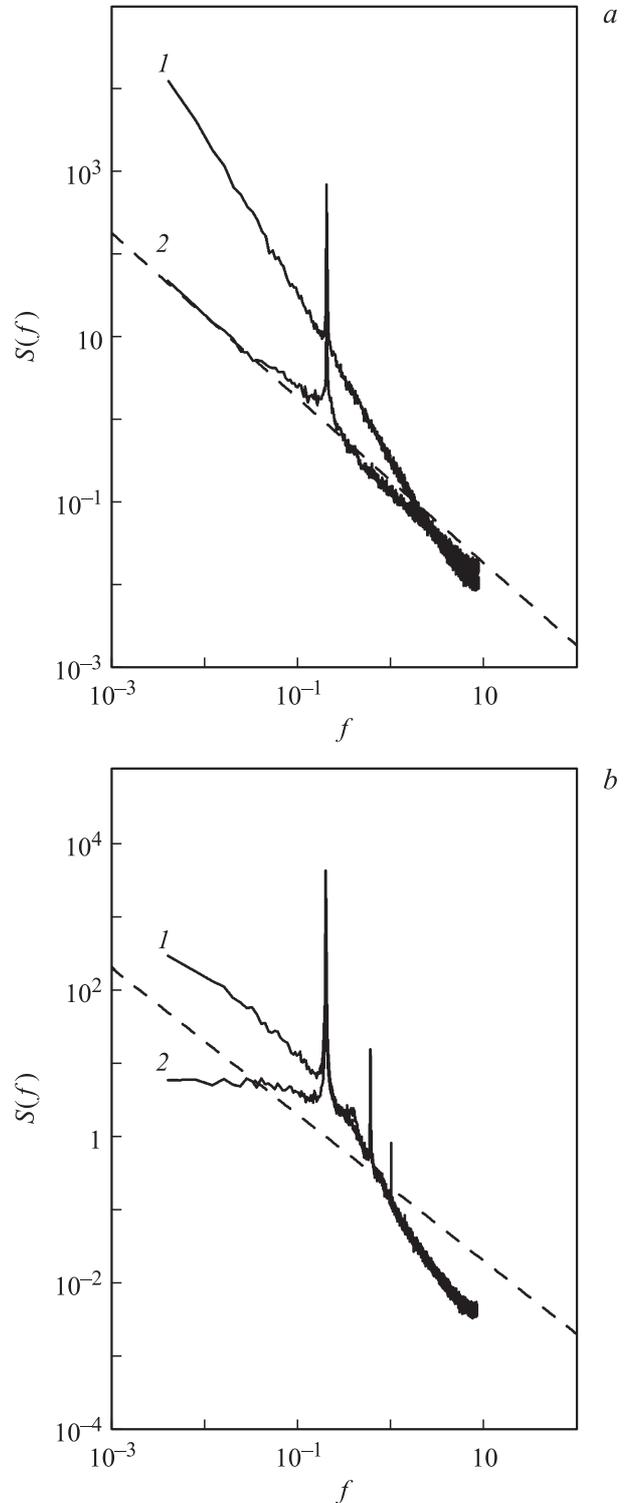


**Рис. 2.** Линии локальных максимумов энтропии, соответствующие устойчивым результирующим процессам, в зависимости от амплитуды гармонической силы — 1 и проекции локальных максимумов энтропии, соответствующие устойчивым результирующим процессам, на плоскость с координатами  $(\sigma, A)$  — 2.

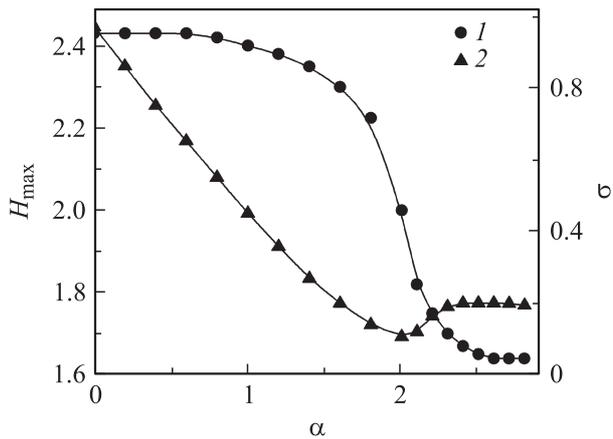
от амплитуды белого шума  $\sigma$  и амплитуды гармонической силы  $A$  для частоты  $f_h = 0.2$  иллюстрирует рис. 1. Устойчивым результирующим процессам отвечают точки локальных максимумов энтропии при фиксированном значении амплитуды гармонической силы  $A$  (или амплитуды белого шума  $\sigma$ , или фиксированного соотношения между этими амплитудами). На рис. 2 кружками приведена линия локальных максимумов энтропии, соответствующая устойчивым результирующим процессам, в зависимости от амплитуды гармонической силы. На этом же рисунке треугольниками изображена проекция линии максимумов энтропии на плоскость с координатами  $\sigma$  и  $A$ . Из рисунка видно, что случайный процесс с  $1/f$ -спектром не смешивается с гармоническим воздействием на систему.

Устойчивые результирующие процессы разделены на 2 ветви, одна из которых отвечает случайному  $1/f$ -процессу с гармоническим возмущением вблизи частоты  $f_h = 0.2$ , а другая — зашумленному гармоническому процессу, который развивается в потенциале взаимодействующих фазовых переходов [15]. Эти ветви разделены энергетической щелью. Величина и положение энергетической щели зависят от частоты гармонической силы. Воздействовать на нее можно также сдвигом фаз гармонической силы в уравнениях системы (3), но без существенных качественных отличий. На рис. 3 приведены спектры мощности переменных  $\psi(t)$  и  $\varphi(t)$ , соответствующие локальным максимумам энтропии для различных значений амплитуды гармонической силы, которые отвечают различным ветвям результирующего процесса. Штриховая линия на рис. 3, *a, b* отвечает  $1/f$ -спектру в отсутствие гармонического возмущения (при  $A = 0$ ). В результате можно отметить, что гармоническое воздействие не эффективно для подавления низкочастотных высокоэнергетических выбросов,

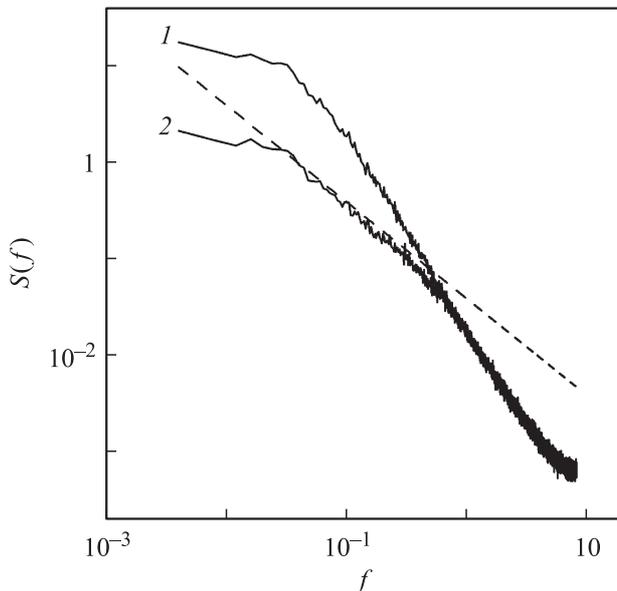
характерных для случайного процесса с  $1/f$ -спектром. Гармоническая сила, сбивающая такой спектр, требует относительно больших амплитуд, при которых само гармоническое воздействие оказывается больше, чем низкочастотные выбросы  $1/f$ -процесса.



**Рис. 3.** Спектры мощности переменных  $\psi(t)$  — 1 и  $\varphi(t)$  — 2. Частота гармонической силы  $f_h = 0.2$ ; амплитуда  $A = 1$  (a),  $A = 2.5$  (b). Штриховая линия — зависимость  $S(f) \propto 1/f$ .



**Рис. 4.** Зависимость локальных максимумов энтропии  $H_{\max}$  от коэффициента затухания  $\alpha$  — 1 и проекция линии локальных максимумов энтропии, соответствующая устойчивым результирующим процессам, на плоскость с координатами  $(\sigma, \alpha)$  — 2.



**Рис. 5.** Спектры мощности переменных  $\psi(t)$  — 1 и  $\varphi(t)$  — 2, соответствующие результирующему процессу при значении коэффициента затухания  $\alpha = 2.4$ .

Более эффективным для подавления низкочастотных выбросов случайного  $1/f$ -процесса является воздействие обычной экспоненциальной релаксации. Устойчивость результирующего процесса можно рассмотреть с помощью энтропийного анализа так же, как и для приведенного выше для гармонического воздействия. Стохастические уравнения, описывающие этот процесс, следующие:

$$\begin{aligned} d\varphi/dt &= -\varphi\psi^2 + \psi + \Gamma_1(t) - \alpha\varphi, \\ d\psi/dt &= -\psi\varphi^2 + 2\varphi + \Gamma_2(t) - \alpha\psi, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\alpha$  — коэффициент затухания. Численные расчеты проведены в том же объеме, что и для гармонического

воздействия. На рис. 4 кружками приведена зависимость локальных максимумов энтропии  $H_{\max}$  от коэффициента затухания  $\alpha$ . При увеличении коэффициента затухания результирующий процесс приобретает лоренцевский спектр, в котором отсутствуют высокоэнергетические низкочастотные выбросы. Переход от случайного процесса с  $1/f$ -спектром к процессу с лоренцевским спектром на зависимости локальных максимумов энтропии от коэффициента затухания сопровождается перегибом. На этом же рисунке треугольниками приведена проекция линии локальных максимумов на плоскость с координатами  $(\sigma, \alpha)$ . Переход от случайного процесса с  $1/f$ -спектром к процессу с лоренцевским спектром соответствует минимуму зависимости  $\sigma(\alpha)$  для устойчивого результирующего случайного процесса. Спектр результирующего процесса после перехода при значении коэффициента затухания  $\alpha = 2.4$  показан на рис. 5. Штриховая линия на этом же рисунке — невозмущенный  $1/f$ -спектр (при  $\alpha = 0$ ).

## Заключение

В заключение отметим, что в настоящей работе показано использование принципа максимума информационной энтропии для исследования устойчивости сложных стохастических процессов, которые возникают при детерминированном воздействии на случайный процесс с  $1/f$ -спектром. Энтропийный анализ позволяет найти область управляющих параметров, в которой случайный процесс является устойчивым. Аналогичный подход может быть использован для анализа устойчивости при взаимодействии разных случайных процессов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 12-08-00019-а, Программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 12-Т-2-1002).

## Список литературы

- [1] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995. (Klimontovich Yu.L., Statistical Theory of Open Systems, Kluwer Academic, Dordrecht. 1998).
- [2] *Mandelbrot B.B., van Ness J.W.* // SLAM Rev. 1968. Vol. 10. P. 422.
- [3] *Паташинский А.З., Покровский В.Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982. (Patashinskii A.Z., Pokrovskii V.L., Fluctuation Theory of Phase Transitions. Elsevier. 1979).
- [4] *Колмогоров А.Н.* // ДАН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 299–303. (Kolmogorov A.N., Proceedings of the USSR Academy of Sciences. 1941. Vol. 30. P. 299.)
- [5] *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38. N 1. P. 364–374.
- [6] *Bak P., Sneppen K.* // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 4083.
- [7] *Sneppen K.* // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 69. P. 3539.

- [8] *Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. № 5. С. 1748–1757 (Koverda V.P., Skokov V.N. Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1998. Vol. 86. Issue 5. P. 953–958.)
- [9] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // ДАН. 2002. Т. 386. № 2. С. 187–189. (Koverda V.P., Skokov V.N. Doklady Physics. 2002. Vol. 47. Issue 9. P. 654–656.)
- [10] *Shannon C.A.* // Bell Syst. Tech. 1948. Vol. 27. P. 379–423.
- [11] *Башикиров А.Г.* // ТМФ. 2006. Т. 149. № 2. С. 299–317 (Bashkirov A.G. Theoretical and Mathematical Physics. 2006. Vol. 149. Issue 2. P. 1559–1573.)
- [12] *Montroll E.W., Shlesinger M.F.* // J. Stat. Phys. 1983. Vol. 32. N 2. P. 209–230.
- [13] *Tsallis C.* // J. Stat. Phys. 1988. Vol. 52. P. 479–487.
- [14] *Renyi A.* Probability Theory. Amsterdam: North-Holland, 1970.
- [15] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 11. С. 1–6. (Koverda V.P., Skokov V.N. Technical Physics. 2011. Vol. 56 Issue 11. P. 1539–1545.)