

Краткие сообщения

01 Ускорение ионно-электронного потока в плоском промежутке

© Ю.А. Коваленко, Т.В. Чернышев, А.С. Чихачев

Всероссийский электротехнический институт им. В.И. Ленина,
111250, Москва, Россия
email: direkt@vei.ru

(Поступило в Редакцию 27 марта 2012 г. В окончательной редакции 6 августа 2012 г.)

Рассмотрены стационарные потоки ионов и электронов в плоском промежутке в самосогласованной одномерной задаче. Изучены потоки, совпадающие по направлению, причем показано, что возможно превышение ионами скорости ионного звука.

В связи с имеющимся интересом к плазменным и ионным двигателям представляется актуальным изучение ионно-электронных потоков в плоском промежутке. Одним из вопросов, требующих особого рассмотрения, является возможность превышения потоком скорости ионного звука. В работах [1,2] такая возможность изучалась для столкновительных систем, в [3] показана возможность преодоления звукового барьера в бесстолкновительной системе за счет изменения поперечного размера пучка.

В настоящей работе при использовании гидродинамического описания изучается поведение электронов и ионов в плоской задаче в изотермическом случае. При этом отношение величин потоков электронов может быть произвольным. Показана возможность превышения ионным потоком скорости ионного звука при одновременном ускорении ионов (электрическим полем) и электронов (градиентом давления).

1. Пусть при $x = 0$ имеется источник электронов и однократно ионизированных ионов, причем потенциал $\phi(x)|_{x=0} = \phi(0)$. Ионы считаются холодными, т.е. $T_i \rightarrow 0$ и на них действует только сила со стороны электрического поля; на электроны кроме поля действует градиент давления ∇P . В стационарном режиме уравнения, описывающие систему, имеют вид

$$M \frac{v_i^2}{2} = -e\phi + \frac{Mv_0^2}{2}, \quad (1)$$

$$mv_e \frac{dv_e}{dx} = e \frac{d\phi}{dx} - \frac{1}{n_e} \frac{dP}{dx}. \quad (2)$$

Здесь M — масса иона, m — масса электрона, $v_i(x)$, $v_e(x)$ — скорости ионов и электронов соответственно, v_0 — начальная скорость ионов, P — давление электронного газа. В изотермическом случае $P = n_e T$, $T = \text{const}$ — температура электронного газа. В уравнении (1) для ионов предполагается, что ионы холодные, т.е. температура ионов $T_i = 0$. Уравнение (2) может быть

проинтегрировано

$$m \frac{v_e(x)^2}{2} - e\phi(x) + T \ln \frac{n_e(x)}{n_*} = 0, \quad (3)$$

где n_* — произвольная константа, имеющая размерность плотности.

Положим, что имеется поток ионов Γ и поток электронов $\Gamma_e = \theta\Gamma$, где θ — отношение величин потоков. Тогда из уравнений непрерывности следует $v_e = \frac{\theta\Gamma}{n_e}$ и $v_i = \frac{\Gamma}{n_i}$. Обозначим $\frac{e\phi}{T} = \varphi$ и зададим начальные условия при $x = 0$ $n_e = n_i = n_0$, $\varphi = \varphi_0$. Тогда $\Gamma = n_0 v_0$, где v_0 — скорость ионов при $x = 0$. Из (3) следует $\varphi - \varphi_0 = \ln\left(\frac{n_e}{n_0}\right) - \frac{m\theta^2 v_0^2}{M} \left(1 - \frac{n_0^2}{n_e^2}\right)$.

Из (2) получим $e \frac{dv_e}{dx} = T \frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dx} \left(1 - \frac{\theta^2 n_0^2}{n_e^2} \frac{m v_0^2}{M}\right)$, где $v_s = \sqrt{\frac{T}{M}}$ — ионно-звуковая скорость. Уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi e(n_e - n_i). \quad (4)$$

Его можно переписать в виде

$$\left[\frac{n'_e}{n_e} \left(1 - \frac{m v_0^2 \theta^2 n_0^2}{M v_s^2 n_e^2} \right) \right]' = \frac{4\pi e^2 n_0}{T} \left[\frac{n_e}{n_0} - \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2T}{M}(\varphi - \varphi_0)}} \right]. \quad (5)$$

Второе слагаемое в правой части — плотность ионов. Используя выражение для потенциала, следующее из (3), получим уравнение, содержащее только плотность электронов

$$\left[\frac{n'_e}{n_e} \left(1 - \frac{m v_0^2 \theta^2 n_0^2}{M v_s^2 n_e^2} \right) \right]' = \frac{4\pi e^2 n_0}{T} \times \left[\frac{n_e}{n_0} \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2T}{M} \left(-\frac{m v_0^2 \theta^2}{2v_s^2} \left(1 - \frac{n_0^2}{n_e^2} \right) + \ln \frac{n_e}{n_0} \right)}} \right]. \quad (6)$$

Переходя к безразмерным переменным $y = \frac{x}{\lambda}$, $\lambda^2 = \frac{T}{8\pi e^2 n_0}$, $\eta = \frac{n_e}{n_0}$ и обозначив $a = \frac{m}{M} \frac{v_0^2}{v_s^2} \theta^2$, $S(\eta) = 1 - 2 \frac{v_0^2}{v_s^2} \left(\ln \eta + \frac{a}{2\eta^2} \right) + a \frac{v_s^2}{v_0^2}$ получим

$$2 \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dy} \left(1 - \frac{a}{\eta^2} \right) \right] = \eta - \frac{1}{\sqrt{S(\eta)}}. \quad (7)$$

Скорость потока ионов из вышеприведенных выражений определяется как $v_i = v_0 \sqrt{S(\eta)}$. Уравнение (7) имеет интеграл следующего вида:

$$\left[\frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dy} \left(1 - \frac{a}{\eta^2} \right) \right]^2 = C_0 + \left(\frac{a}{\eta} + \eta \right) + \frac{v_0^2}{v_s^2} \sqrt{1 - 2 \frac{v_s^2}{v_0^2} \left(\ln \eta + \frac{a}{2\eta^2} \right) + a \frac{v_s^2}{v_0^2}}. \quad (8)$$

Заметим, что интеграл вида (8) для уравнения (7) был ранее получен в работе [4]. В этой работе, однако, задача решалась при других начальных условиях, а именно полагалась малой начальная скорость ионного потока $v_0 \rightarrow 0$. При нулевом потоке электронов (т.е.

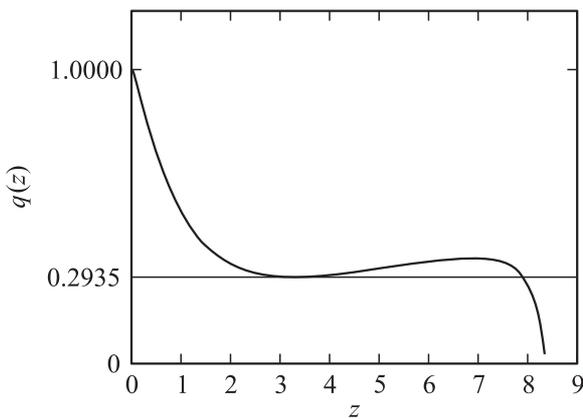


Рис. 1.

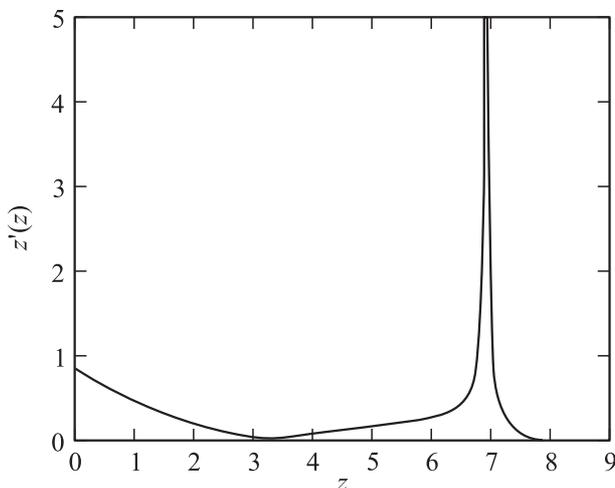


Рис. 2.

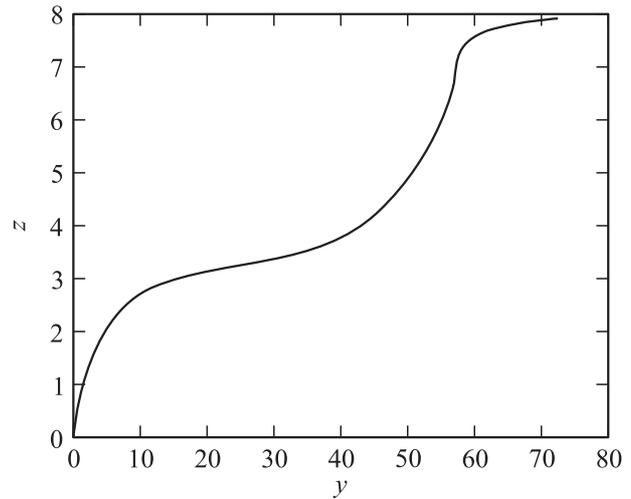


Рис. 3.

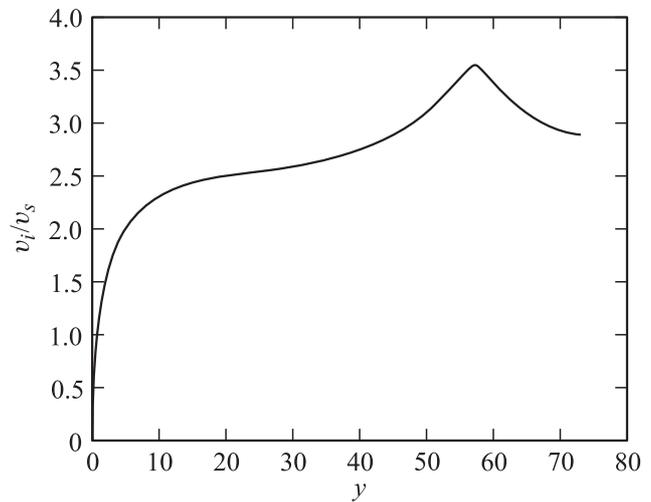


Рис. 4.

при $\theta = 0$) интеграл (8) переходит в интеграл, использованный в [5] для изучения критерия Бома. Система уравнений, описывающих частицы и поле, согласно определению [5], является гамильтоновской, имеющей интеграл системы уравнений. В рассматриваемом более сложном случае — при наличии ненулевого потока электронов — также имеется интеграл системы уравнений, определяемый соотношением (8), что позволяет дать компактное описание изучаемой системы.

Введем новую переменную $\eta = \exp(-z)$ и построим зависимость

$$q(z) = a \exp(z) + \exp(-z) + \frac{v_0^2}{v_s^2} \sqrt{1 - 2 \frac{v_s^2}{v_0^2} \left(-z + \frac{a}{2} \exp(2z) \right) + a \frac{v_s^2}{v_0^2}}.$$

В дальнейших расчетах положим $v_0 = 0.1v_s$. В случае, если масса иона $M \approx 2000m$ (т.е. ион — это протон) и при $\theta \sim 0.5$ параметр $a \approx 10^{-6}$.

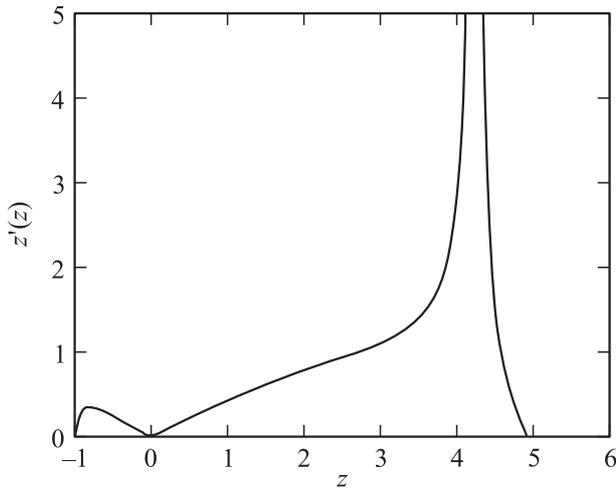


Рис. 5.

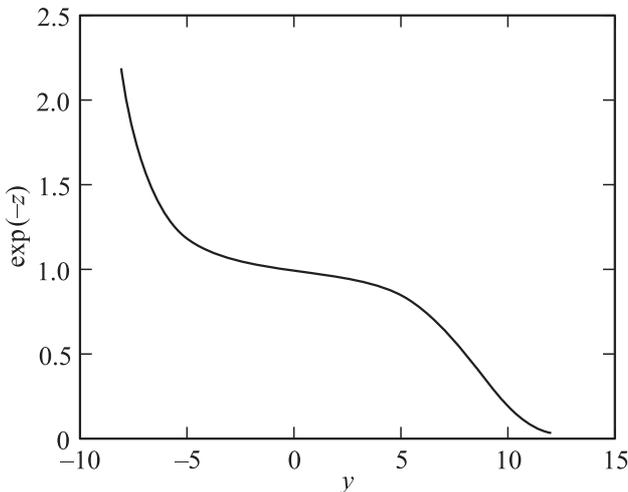


Рис. 6.

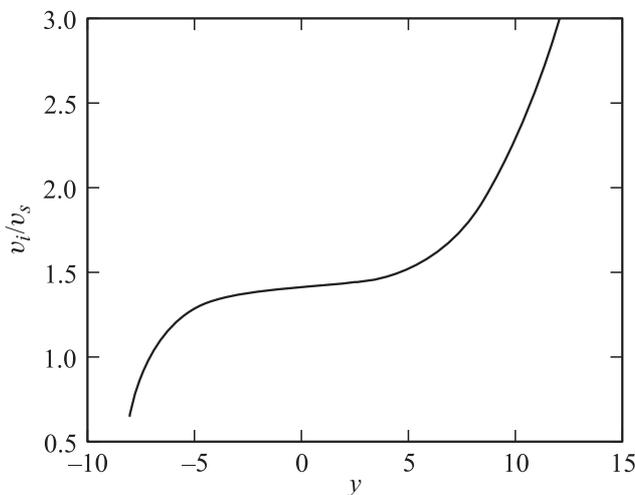


Рис. 7.

При этих значениях зависимость $q(z)$ имеет вид, изображенный на рис. 1.

Фазовая траектория $z'(z)$, уравнение для которой следует из (8)

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\sqrt{C_0 + \exp(-z(y)) + 10^{-6} \exp(z(y)) + 0.01 \sqrt{1 + 10^{-6}(1 - \exp(2z(y)))} + 200z(y)}}{|1 - 10^{-6} \exp(2z(y))|} \quad (9)$$

при $S_0 = -0.2935$, изображена на рис. 2.

Отметим, что значение константы C_0 выбрано таким образом, чтобы фазовая траектория касалась оси $z' = 0$. Если $C_0 < -0.2935$, то фазовая траектория распадается на две не связанные области, что не позволяет перевести поток от малых скоростей к относительно большим. При выбранном значении C_0 начальное поле минимально.

Приведем далее зависимость $z(y)$ от координаты, следующей при решении (7) при условии $z(0) = 0$. Из-за наличия особенности в уравнении (7) зависимость обнаруживает характерный излом — разрыв производной (рис. 3). В соответствии с этой зависимостью плотность электронов $n_e = n_0 \exp(-z)$ весьма быстро — экспоненциально — убывает с ростом значения координаты.

Приведем график зависимости $\frac{v_i}{v_s} = 0.1 \sqrt{S(\eta(y))}$, определяющей скорость потока ионов (рис. 4).

Наличие излома при $y \approx 60$ также объясняется особенностью в (7) при $z \approx 8$. В этой точке отношение скорости потока к скорости звука максимально и равно ≈ 3.5 , т.е. скорость потока ионов в 3.5 раза превышает ионно-звуковую скорость. Отметим здесь, что эта же кривая характеризует и поведение потенциала — в соответствии с (1) $\varphi \sim -(v_i^2 - v_0^2)$.

2. Представляет также интерес рассмотрение ситуации при других значениях параметров. Рассмотрим случай, когда $v_0 > v_s$.

На рис. 5 представлена зависимость $z'(z)$ при $C_0 = 3$, $a = 2 \cdot 10^{-4}$, $\frac{v_0^2}{v_s^2} = 2$. Характерной особенностью ускорения сверхзвукового потока является тот факт, что минимум z' достигается при $z = 0$, что имеет место также и в случае нулевого потока электронов, рассмотренном в [5].

На рис. 6 приведена зависимость плотности электронов от координаты, также весьма быстро убывающая с ростом координаты. Отметим, что если в случае, рассмотренном в предыдущем разделе, во внутреннем корне в (7) отрицательное значение появляется при $z < 0$, то при параметрах настоящего раздела внутренний корень имеет смысл при $z > -1$. С этим также связано появление физически разумных решений для плотности и скорости ионов при отрицательных значениях координаты. На рис. 7 приведена зависимость отношения скорости ионов к скорости ионного звука от координаты ($\frac{v_i'}{v_s} = \sqrt{2} \sqrt{S(\eta(y))}$).

Можно видеть, что при ускорении их точки с координатой $y < 0$ начальная скорость может быть меньше

звуковой, однако, как можно видеть из рис. 6, плотность электронов в этом случае возрастает. В этой точке не выполняется равенство плотностей ионов и электронов, а значение потенциала отличается от φ_0 . Отметим также важность создания определенных начальных условий для потоков частиц. Величина θ является отношением начальных скоростей и определяется начальными условиями. Параметр a удовлетворяет условию $a \ll 1$ в широкой области параметров, в том числе при $\theta = 1$, т. е. при равенстве потоков ионов и электронов.

Таким образом, в работе показано, что возможно одновременное ускорение ионов и электронов в плоском промежутке — ионов электрическим полем, а электронов — градиентом давления при достаточно большом перепаде электронной плотности, причем скорость ионов может превосходить ионно-звуковую скорость.

Список литературы

- [1] *Raites Y., Fisch N.J., Ashkenazy J., Fruchtman A.* // Plasma Phys. Contr. F. 1999. N 41. A357.
- [2] *Chernyshev T.V., Chekhachev A.S., Shramov A.N.* // Plasma Phys. Rep. 2011. Vol. 37. N 13. P. 1088–1091.
- [3] *Коваленко Ю.А., Чернышев Т.В., Чихачев А.С.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 5. С. 139–141.
- [4] *Коваленко Ю.А., Чернышев Т.В., Чихачев А.С.* // Изв. РАН. Сер. энергетика. 2011. № 4. С. 24–28.
- [5] *Sternberg N., Godyak V.* // IEEE T. Plasma Sci. 2007. Vol. 35. N 5. P. 1341–1349.