

03

Внутренний нелинейный резонанс на заряженной струе

© С.О. Ширяева, Н.А. Петрушов, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 22 июня 2012 г.)

В нелинейных аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости показано, что движение заряженной струи относительно материальной среды приводит к появлению нарастающих во времени периодических волновых движений ее границы раздела со средой (неустойчивости Кельвина–Гельмгольца) и к появлению нелинейного внутреннего резонансного взаимодействия волн, параметры которого (интенсивность и характерное время взаимодействия) зависят от физических параметров системы: плотности электрического заряда на струе, скорости ее движения относительно среды, массовой плотности, значений волновых чисел взаимодействующих волн, величины коэффициента поверхностного натяжения границы раздела.

Введение

Исследование влияния движения жидкой цилиндрической заряженной струи относительно материальной диэлектрической среды (т.е. наличия тангенциального разрыва поля скоростей) на устойчивость границы раздела представляет интерес как в связи с многочисленными приложениями феномена диспергирования струи в технике и технологии [1–3], так и по чисто гносеологическим соображениям. Как объект исследования такая струя весьма интересна: помимо неустойчивости поверхности струи по отношению к капиллярным силам [4], в такой системе одновременно могут реализовываться и другие виды неустойчивости: изгибная [5], электростатическая типа Тонкса–Френкеля [6] (см. фотографии в [3]), а также неустойчивость типа Кельвина–Гельмгольца [7,8]. Особенности реализации нелинейного резонансного взаимодействия волн на поверхности такой струи (на границе раздела струи и среды) до настоящего времени не исследовались ввиду громоздкости расчетов. Этой проблеме и посвящена настоящая работа.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим задачу об устойчивости капиллярных волн на однородно заряженной с поверхностной плотностью заряда χ (вызывающего появление у струи электрического поля с напряженностью $\mathbf{E} = 4\pi\chi\mathbf{e}_r$) цилиндрической поверхности струи радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с коэффициентом межфазного натяжения σ и плотностью ρ_1 . Примем, что струя движется со скоростью \mathbf{U}_0 , параллельной \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z — орт продольной координаты), в идеальной несжимаемой диэлектрической среде, имеющей плотность ρ_2 и диэлектрическую проницаемость, равную единице. Задачу будем решать в инерциальной системе отсчета, связанной с осью симметрии невозмущенной струи и движущейся со скоростью \mathbf{U}_0 , в цилиндрической системе координат,

орт \mathbf{e}_z которой совпадает по направлению с \mathbf{U}_0 и с осью симметрии невозмущенной капиллярным волновым движением цилиндрической поверхности струи. Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых $R = \rho_1 = \sigma = 1$, а поверхность раздела сред, возмущенная капиллярным волновым движением, описывается соотношением

$$R = r - 1 - \xi(\varphi, z, t) = 0, \quad |\xi| \ll 1,$$

где $\xi(z, \varphi, t)$ — возмущение цилиндрической поверхности струи, обусловленное капиллярным волновым движением, φ — азимутальный угол.

Полная математическая формулировка задачи имеет вид

$$\partial_t \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1, \nabla) \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1, \quad \partial_t \mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_2, \nabla) \mathbf{u}_2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_2,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

$$r = 1 + \xi(\varphi, z, t) : \quad \frac{dF}{dt} = 0, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{u}_1) = (\mathbf{n}, \mathbf{u}_2),$$

$$p_1 - p_2 + p_E - p_\sigma = 0, \quad \Phi(r, \varphi, z, t) = \Phi_s(t),$$

$$r \rightarrow 0 : \quad \mathbf{u}_1 \rightarrow 0,$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \mathbf{u}_2 \rightarrow -\mathbf{U}_0, \quad \mathbf{E} \rightarrow 0,$$

$$t = 0 :$$

$$\xi(z, \varphi, t) = \xi[\exp(ikz + im\varphi) + \exp(ikz - im\varphi)] + (\text{к.с.}),$$

$$\partial_t \xi(z, \varphi, t) = 0, \quad (1)$$

где ξ — амплитуда начальной волновой деформации, k — волновое число, m — азимутальный параметр, $\rho \equiv \rho_2/\rho_1$ — безразмерная плотность окружающей среды.

В качестве дополнительных условий принимаются: условие постоянства объема струи, приходящегося на

одну длину волны $\lambda \equiv 2\pi/k$,

$$\int_V dV = \pi\lambda, \quad V = \left\{ 0 \leq r \leq 1 + \xi(\varphi, z, t), \right. \\ \left. 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda \right\}$$

и условие сохранения заряда на отрезке струи протяженностью в длину волны λ

$$\frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{n}, \mathbf{E}) dS = 2\pi\chi\lambda,$$

$$S = \left\{ r = 1 + \xi(\varphi, z, t), 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda \right\}.$$

В сформулированной задаче $\mathbf{u}_j \equiv \mathbf{u}_j(r, \varphi, z, t)$ — поля скоростей течения жидкости в струе ($j = 1$) и в среде ($j = 2$), генерируемые волнами на поверхности раздела сред, $p_j \equiv p_j(r, \varphi, z, t)$ — гидродинамические давления в струе ($j = 1$) и среде ($j = 2$), p_E — давление электрических сил

$$p_E = \frac{E^2}{8\pi}$$

и p_σ — давление сил поверхностного натяжения

$$p_\sigma = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n}$$

на границе раздела сред, $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, $\Phi \equiv \Phi(r, \varphi, z, t)$ — напряженность и потенциал электрического поля, $\Phi_s(t)$ — потенциал поверхности струи, \mathbf{n} — орт нормали к возмущенной поверхности струи.

В нижеследующем рассмотрении течения будем считать потенциальными

$$\mathbf{u}_1 = \nabla\psi_1, \quad \mathbf{u}_2 = -\mathbf{U}_0 + \nabla\psi_2.$$

2. Решение задачи

Решение задачи будем искать асимптотическим методом многих временных масштабов, выбирая в качестве малого параметра безразмерную амплитуду волны, заданной в начальный момент времени: $\varepsilon \sim |\xi|$:

$$\begin{aligned} \psi_j &= \varepsilon\psi_j^{(1)} + \varepsilon^2\psi_j^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ p_j &= p_j^{(0)} + \varepsilon p_j^{(1)} + \varepsilon^2 p_j^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ \xi(\varphi, z, t) &= \varepsilon\xi^{(1)} + \varepsilon^2\xi^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ \Phi &= \Phi^{(0)} + \varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2)$$

Разложения (2) подставим в систему (1). Все уравнения и граничные условия группируем по степеням ε , формируя задачи различных порядков малости. Задачи отыскания решений нулевого и первого порядков малости получаются однородными и мало отличаются по внешнему виду от исходной.

Решение задачи (1) нулевого порядка малости описывает равновесное состояние системы

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)} &= -4\pi\chi \ln r, \quad p_1^{(0)} = p_0 - \frac{\rho}{2} \mathbf{U}_0^2 - 2\pi\chi^2 + 1, \\ p_2^{(0)} &= p_0 - \frac{\rho}{2} \mathbf{U}_0^2, \end{aligned} \quad (3)$$

которому соответствует неподвижный (в движущейся системе координат) цилиндрический столб жидкости с постоянной поверхностной плотностью заряда χ . При записи потенциала, определяющего электрическое поле вблизи столба жидкости, принималось $\Phi_s^{(0)} = 0$. Динамическое граничное условие в нулевом приближении позволяет определить равновесный перепад давлений на поверхности струи.

Решение задачи (1) в линейном по малому параметру приближении находится стандартными методами [7,8] и имеет вид

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= \xi(T_1) [\exp(im\varphi) + \exp(-im\varphi)] \left[\frac{s_1}{s_1 - s_2} \right. \\ &\quad \left. \times \exp(is_1 T_0 + ikz) + \frac{s_2}{s_1 - s_2} \exp(is_2 T_0 + ikz) \right] + \text{к.с.}, \\ \Phi^{(1)} &= 4\pi\chi \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} \xi(T_1) [\exp(im\varphi) + \exp(-im\varphi)] \left[\frac{s_1}{s_1 - s_2} \right. \\ &\quad \left. \times \exp(is_1 T_0 + ikz) + \frac{s_2}{s_1 - s_2} \exp(is_2 T_0 + ikz) \right] + \text{к.с.}, \\ \psi_1^{(1)} &= i \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \frac{I_m(kr)}{k I_m'(k)} \xi(T_1) [\exp(im\varepsilon) + \exp(-im\varphi)] \\ &\quad \times \left\{ \exp[is_2 T_0 + ikz] - \exp[is_1 T_0 + ikz] \right\} + \text{к.с.}, \\ \psi_2^{(1)} &= i \frac{K_m(kr)}{(s_1 - s_2) k K_m'(k)} \xi(T_1) [\exp(im\varepsilon) + \exp(-im\varphi)] \\ &\quad \times \left\{ s_1 (s_2 - kU_0) \exp[is_2 T_0 + ikz] \right. \\ &\quad \left. - s_2 (s_1 - kU_0) \exp[is_1 T_0 + ikz] \right\} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (4)$$

где частоты $s_{1,2} = b_{m,k} \mp \omega_0$ определяются дисперсионным уравнением [7,8]

$$\begin{aligned} s^2 - \frac{2\delta_m}{\beta_m} s + \frac{\eta_m}{\beta_m} &= 0, \\ \omega_0(m, k) &\equiv \sqrt{\frac{\delta_m^2}{\beta_m^2} - \frac{\kappa_m}{\beta_m}}, \quad b_{m,k} \equiv \frac{\delta_m}{\beta_m} \equiv \frac{U_0 k \rho g_m}{h_m - \rho g_m}, \\ \beta_m(k) &\equiv \frac{h_m - \rho g_m}{g_m h_m}, \quad \delta_m(k, U_0) \equiv k \rho U_0 h_m^{-1}, \\ \eta_m(k, \chi, U_0) &\equiv \left\{ [1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)] - We k^2 h_m^{-1} \right\}, \\ h_m(k) &\equiv m - \frac{k K_{m+1}(k)}{K_m(k)}, \quad g_m(k) \equiv m + \frac{k I_{m+1}(k)}{I_m(k)}, \\ w &= 4\pi\chi^2, \quad We \equiv \rho U_0^2. \end{aligned}$$

Здесь $s(k, m)$ — комплексная частота капиллярной волны с волновым числом k и азимутальным параметром m , $I_m(k)$ и $K_m(k)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка m [9], штрихом при функциях Бесселя обозначается ее производная по аргументу. Величина $b_{m,k}$ имеет смысл частоты волны, претерпевающей неустойчивость типа Кельвина–Гельмгольца, когда $\omega_0(m, k)$ станет мнимым. В свою очередь $\omega_0(m, k)$ в этом случае определяет инкремент нарастания амплитуды волны с частотой $b_{m,k}$. В противном случае $\omega_0(m, k)$ определяет часть полной частоты $b_{m,k} \mp \omega_0$.

Задача второго порядка малости является неоднородной, где функции неоднородности выражаются через решения нулевого и первого порядков малости [10]. Ее полная формулировка имеет вид

$$\Delta\psi_2^{(2)} = 0, \quad \Delta\Phi^{(2)} = 0,$$

$$r \rightarrow 0: \psi_1^{(2)} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty: \psi_2^{(2)} \rightarrow 0, \quad \Phi^{(2)} \rightarrow 0,$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial T_0} = \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_1} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2\psi_1^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\varphi} \frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial T_0} + U_0 \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_1} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2\psi_2^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\varphi} \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial z},$$

$$\Phi^{(2)} + \partial_r\Phi^{(0)}\xi^{(2)} + \Phi_s^{(2)}(t) = -\frac{1}{2}\partial_{r,r}\Phi^{(0)}(\xi^{(1)})^2 - \partial_r\Phi^{(1)}\xi^{(1)},$$

$$\begin{aligned} &\xi^{(2)} + \frac{\partial^2\xi^{(2)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\xi^{(2)}}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\varphi}\right)^2 \\ &- \xi^{(1)}\left(\xi^{(1)} + 2\frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial\varphi^2}\right) - \frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial\psi_1^{(2)}}{\partial T_0} + \rho\frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial T_1} \\ &+ \rho + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial\varphi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial z}\right)^2 \\ &- \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\varphi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\psi_2^{(1)}}{\partial r}\right)^2 \\ &- \xi^{(1)}\frac{\partial^2\psi_1^{(1)}}{\partial r\partial T_0} + \rho\xi^{(1)}\frac{\partial^2\psi_2^{(1)}}{\partial r\partial T_0} - \rho U_0\frac{\partial\psi_2^{(2)}}{\partial z} - \rho U_0\xi^{(1)}\frac{\partial^2\psi_2^{(1)}}{\partial r\partial z} \\ &+ \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2}\right)^2 + \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r}\frac{\partial^3\Phi^{(0)}}{\partial r^3}\right](\xi^{(1)})^2 + 2\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r} \\ &\times\left(\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(2)}\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2}\right) + \left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\varphi}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}\right)^2 + 2\xi^{(1)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}\right)\Big] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\int_{z_0}^{z_0+\lambda}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r}\right)\xi^{(2)} + \left(\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}\right)\xi^{(1)}\right. \\ &+ \left.\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^3\Phi^{(0)}}{\partial r^3} + \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2}\right)(\xi^{(1)})^2 + \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\varphi}\right. \\ &\left.- \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}\right]d\varphi dz = 0, \end{aligned}$$

$$t = 0: \quad \xi^{(2)}(\varphi, z, 0) = 0,$$

$$\partial_{T_0}\xi^{(2)}(\varphi, z, 0) + \partial_{T_1}\xi^{(1)}(\varphi, z, 0) = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{z_0}^{z_0+\lambda}(2\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2)d\varphi dz = 0. \quad (5)$$

Полное решение сформулированной задачи второго порядка малости весьма громоздко и в данном рассмотрении не приводится. Приведем лишь аналитическое выражение для поправки к форме поверхности струи второго порядка малости

$$\begin{aligned} &\xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) \\ &= \alpha_1\{\cos 2[kz + m\varphi + \omega_2 T_0] + \cos 2[kz - m\varphi + \omega_2 T_0]\} \\ &+ \alpha_2\{\cos 2[kz + m\varphi + \omega_1 T_0] + \cos 2[kz - m\varphi + \omega_1 T_0]\} \\ &+ \alpha_3\{\cos 2[kz + m\varphi - b_m T_0] + \cos 2[kz - m\varphi - b_m T_0]\} \\ &+ \alpha_4 \cos 2[kz + \omega_2 T_0] + \alpha_5 \cos 2[kz - \omega_2 T_0] \\ &+ \alpha_6 \cos 2[kz - b_m T_0] + \alpha_7\{\cos 2[m\varphi - \omega_0 T_0] \\ &+ \cos 2[-m\varphi - \omega_0 T_0]\} + \alpha_8 \cos 2[2m\varphi]. \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов α_g (где $g = 1, 2, \dots, 8$) не приводятся ввиду их большой громоздкости, но их можно найти в [11] (в указанном источнике они занимают пять страниц). Для дальнейшего анализа достаточно лишь отметить, что часть из коэффициентов содержит резонансно подобные множители

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \propto [4(s_{m,k}^{(1)})^2 - (s_{2m,2k}^{(1)})^2]^{-1}, \\ &\alpha_2 \propto [4(s_{m,k}^{(2)})^2 - (s_{2m,2k}^{(2)})^2]^{-1}, \\ &\alpha_3 \propto [4(b_{m,k})^2 - (s_{2m,2k}^{(1)})^2]^{-1}, \\ &\alpha_4 \propto [4(s_{m,k}^{(1)})^2 - (s_{0,2k}^{(1)})^2]^{-1}, \\ &\alpha_5 \propto [4(s_{m,k}^{(2)})^2 - (s_{0,2k}^{(2)})^2]^{-1}, \\ &\alpha_6 \propto [4(b_{m,k})^2 - (s_{0,2k}^{(1)})^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Положения резонансов определяются условиями обращения в нуль знаменателей в α_g . В (6) $s_{m,k}^{(j)}$ — корни дисперсионного уравнения для заданных k и m , верхний индекс $j = 1$ соответствует волне, бегущей в направлении $-\mathbf{n}_z$, а $j = 2$ — вдоль \mathbf{n}_z . При выполнении условий

резонанса волна с заданными волновым и азимутальным числами, дважды взаимодействуя, например, с более короткой волной с вдвое ббльшим волновым числом и с вдвое ббльшим азимутальным числом, передает ей энергию. Иногда резонансное взаимодействие идет с осесимметричной волной ($m = 0$) (как это видно из (6)).

В проведенных рассуждениях речь идет о вырожденных нелинейных резонансах, так как только они могут быть обнаружены в расчетах второго порядка малости при одноволновом начальном возмущении. Для обнаружения вторичных комбинационных резонансов нужно брать многоволновое начальное возмущение. А это требует проведения отдельного исследования.

Из задачи второго порядка малости также получается как результат, что вдали от резонанса коэффициент $\xi(T_1)$ не зависит от временного масштаба T_1 и является вещественной константой: $\xi = \bar{\xi}$.

3. Анализ резонансных ситуаций

Выписанные выше решения задачи справедливы вне области реализации резонансов, а в малой окрестности и резонанса они расходятся. Для детального исследования резонансов сформулируем задачу несколько иначе, задавшись целью получить эволюционные уравнения для амплитуд волн. Математическая формулировка задачи остается прежней. Решение равновесной задачи сохранит свой вид (3), а решения задачи первого порядка малости (4), оставляя без удовлетворения начальным условиям, запишем в виде суперпозиции волн с различными k и m

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (\exp[i m \varphi] + \exp[-i m \varphi]) (\xi_1(T_1) \\ &\times \exp[i k z + i s_1 T_0] + \xi_2(T_1) \exp[i k z + i s_2 T_0]) dk + (\text{к.с.}), \\ \Phi^{(1)} &= 4\pi\chi \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} (\exp[i m \varphi] + \exp[-i m \varphi]) (\xi_1(T_1) \\ &\times \exp[i k z + i s_1 T_0] + \xi_2(T_1) \exp[i k z + i s_2 T_0]) dk + (\text{к.с.}), \\ \psi_1^{(1)} &= i \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{I_m(kr)}{k I'_m(k)} (\exp[i m \varphi] + \exp[-i m \varphi]) \\ &\times (s_1 \xi_1(T_1) \exp[i k z + i s_1 T_0] + s_2 \xi_2(T_1) \\ &\times \exp[i k z + i s_2 T_0]) dk + (\text{к.с.}), \\ \psi_2^{(1)} &= i \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{K_m(kr)}{k K'_m(k)} (\exp[i m \varphi] + \exp[-i m \varphi]) \\ &\times \left\{ (s_1 - k U_0) \xi_1(T_1) \exp[i k z + i s_1 T_0] \right. \\ &\left. + (s_2 - k U_0) \xi_2(T_1) \exp[i k z + i s_2 T_0] \right\} dk + (\text{к.с.}). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя решения (9) в (6) из кинематических и динамического условий и условия эквипотенциальности, получим систему неоднородных граничных условий

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} &= N_1, \quad \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + U_0 \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial z} = N_2, \\ \Phi^{(2)} + \partial_r \Phi^{(0)} \xi^{(2)} &= N_3, \\ \rho \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial T_0} - \rho U_0 \frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial z} + \xi^{(2)} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial z^2} \\ + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(2)} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right) &= N_4. \end{aligned} \quad (8)$$

Функции неоднородности N_j , выраженные через решения первого порядка (7), приведены в Приложении 1 ($j = 1, 2, 3, 4$).

Решения второго порядка малости, удовлетворяющие соответствующим уравнениям Лапласа и условиям ограниченности, будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{\mu}(kr) (a_1 \exp[i k z + i \mu \varphi] \\ &+ a_2 \exp[i k z - i \mu \varphi] + (\text{к.с.})) dk, \\ \psi_1^{(2)} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} I_{\mu}(kr) (b_1 \exp[i k z + i \mu \varphi] \\ &+ b_2 \exp[i k z - i \mu \varphi] + (\text{к.с.})) dk, \\ \psi_2^{(2)} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{\mu}(kr) (c_1 \exp[i k z + i \mu \varphi] \\ &+ c_2 \exp[i k z - i \mu \varphi] + (\text{к.с.})) dk. \end{aligned} \quad (9)$$

В аналогичном виде запишем выражение второго порядка малости к форме поверхности струи

$$\begin{aligned} \xi^{(2)} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (a_1 \exp[i k z + i \mu \varphi] \\ &+ a_2 \exp[i k z - i \mu \varphi] + (\text{к.с.})) dk. \end{aligned} \quad (10)$$

Решения (9) и (10) подставим в систему (8). Используя кинематические условия и условие эквипотенциальности, выразим неизвестные a_i, b_i, c_i через амплитуды α_i и, подставляя в динамическое граничное условие, получим неоднородное дифференциальное уравнение, описы-

вающее эволюцию амплитуд α_i во времени

$$\begin{aligned}
 & -\partial_{T_0, T_0} \alpha_i(T_0, T_1) \mp \frac{2i\delta_\mu}{\beta_\mu} \partial_{T_0} \alpha_i(T_0, T_1) + \frac{\eta_\mu}{\beta_\mu} \alpha_i(T_0, T_1) \\
 & = M_1 \xi_{\mu, \kappa}^{\prime(1)}(T_1) \exp(is_{\mu, \kappa}^{(1)} T_0) + M_2 \xi_{\mu, \kappa}^{\prime(2)}(T_1) \exp(is_{\mu, \kappa}^{(2)} T_0) \\
 & + M_3 \xi_{m_1, k_1}^{(1)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1 - \mu, k_1 - \kappa}^{(1)}(T_1) \exp(is_{m_1, k_1}^{(1)} T_0 - is_{m_1 - \mu, k_1 - \kappa}^{(1)} T_0) \\
 & + M_4 \xi_{m_1, k_1}^{(2)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1 - \mu, k_1 - \kappa}^{(1)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(-is_{m_1 - \mu, k_1 - \kappa}^{(1)} T_0 + is_{m_1, k_1}^{(2)} T_0) \\
 & + M_5 \xi_{m_1, k_1}^{(1)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1 - \mu, k_1 - \kappa}^{(2)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(is_{m_1, k_1}^{(1)} T_0 - is_{m_1 - \mu, k_1 - \kappa}^{(2)} T_0) \\
 & + M_6 \xi_{m_1, k_1}^{(2)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1 - \mu, k_1 - \kappa}^{(2)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(is_{m_1, k_1}^{(2)} T_0 - is_{m_1 - \mu, k_1 - \kappa}^{(2)} T_0) \\
 & + M_7 \xi_{m_1, k_1}^{(1)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1 - \mu, k_1 + \kappa}^{(1)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(-is_{m_1, k_1}^{(1)} T_0 + is_{m_1 - \mu, k_1 + \kappa}^{(1)} T_0) \\
 & + M_8 \xi_{m_1, k_1}^{(2)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1 - \mu, k_1 + \kappa}^{(1)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(is_{m_1 - \mu, k_1 + \kappa}^{(1)} T_0 - is_{m_1, k_1}^{(2)} T_0) \\
 & + M_9 \xi_{m_1, k_1}^{(1)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1 - \mu, k_1 + \kappa}^{(2)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(-is_{m_1, k_1}^{(1)} T_0 + is_{m_1 - \mu, k_1 + \kappa}^{(2)} T_0) \\
 & + M_{10} \xi_{m_1, k_1}^{(2)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1 - \mu, k_1 + \kappa}^{(2)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(-is_{m_1, k_1}^{(2)} T_0 + is_{m_1 - \mu, k_1 + \kappa}^{(2)} T_0) \\
 & + M_{11} \xi_{m_1 + \mu, k_1 - \kappa}^{(1)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1, k_1}^{(1)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(is_{m_1, k_1}^{(1)} T_0 - is_{m_1 + \mu, k_1 - \kappa}^{(1)} T_0) \\
 & + M_{12} \xi_{m_1 + \mu, k_1 - \kappa}^{(2)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1, k_1}^{(2)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(-is_{m_1 + \mu, k_1 - \kappa}^{(1)} T_0 + is_{m_1, k_1}^{(1)} T_0) \\
 & + M_{13} \xi_{m_1 + \mu, k_1 - \kappa}^{(2)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1, k_1}^{(1)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(is_{m_1, k_1}^{(1)} T_0 - is_{m_1 + \mu, k_1 - \kappa}^{(2)} T_0) \\
 & + M_{14} \xi_{m_1 + \mu, k_1 - \kappa}^{(2)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1, k_1}^{(2)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(is_{m_1, k_1}^{(2)} T_0 - is_{m_1 + \mu, k_1 - \kappa}^{(2)} T_0) \\
 & + M_{15} \xi_{m_1 + \mu, k_1 - \kappa}^{(1)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1, k_1}^{(1)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(-is_{m_1, k_1}^{(1)} T_0 + is_{m_1 + \mu, k_1 - \kappa}^{(1)} T_0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + M_{16} \xi_{m_1 + \mu, k_1 + \kappa}^{(1)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1, k_1}^{(2)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(is_{m_1 + \mu, k_1 + \kappa}^{(1)} T_0 - is_{m_1, k_1}^{(2)} T_0) \\
 & + M_{17} \xi_{m_1 + \mu, k_1 + \kappa}^{(2)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1, k_1}^{(1)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(-is_{m_1, k_1}^{(1)} T_0 + is_{m_1 + \mu, k_1 + \kappa}^{(2)} T_0) \\
 & + M_{18} \xi_{m_1 + \mu, k_1 + \kappa}^{(2)}(T_1) \bar{\xi}_{m_1, k_1}^{(2)}(T_1) \\
 & \quad \times \exp(-is_{m_1, k_1}^{(2)} T_0 + is_{m_1 + \mu, k_1 + \kappa}^{(2)} T_0),
 \end{aligned}$$

где $\xi_{m, k}^{(j)}(T_1)$ — комплексная амплитуда волны с частотой $s_m^{(j)}(k)$ при заданных m и k , а $\bar{\xi}_{m, k}^{(j)}(T_1)$ — комплексно-сопряженная ей амплитуда. Если индексы у $\xi_{m, k}^{(j)}(T_1)$ станут отрицательными: $m < 0$, то амплитуду следует брать комплексно-сопряженную, а частоту, соответствующую этой амплитуде, с противоположным знаком.

Исключение секулярных членов в функции неоднородности позволяет исследовать временную эволюцию амплитуд волн в состояниях, близких к состояниям реализации резонансов. Например, для резонанса

$$\Omega_1 = 4(s_{m, k}^{(1)})^2 - (s_{2m, 2k}^{(2)})^2 \approx \varepsilon \delta,$$

где δ — параметр расстройки, следует записать эволюционные уравнения для обеих мод, связанных резонансным взаимодействием, т.е. принять для первого уравнения $\mu = 2m, \kappa = 2k, m_1 = m$ и $k_1 = k$, для второго уравнения — $\mu = m, \kappa = k, m_1 = 2m$ и $k_1 = 2k$. Исключая секулярные слагаемые в каждом из уравнений, несложно получить систему дифференциальных уравнений для амплитуд первого порядка взаимодействующих мод, описывающих их зависимость от временного масштаба T_1

$$\begin{cases} iA_1 \xi_{2m, 2k, 1}'(T_1) + B_1 \xi_{m, k, 1}^2(T_1) \exp[i\delta T_1] = 0, \\ iC_1 \xi_{m, k, 1}'(T_1) + D_1 \xi_{2m, 2k, 1}(T_1) \bar{\xi}_{m, k, 1}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0. \end{cases}$$

Аналогичная процедура для резонанса

$$\Omega_2 = 4(s_{m, k}^{(2)})^2 - (s_{2m, 2k}^{(2)})^2 \approx \varepsilon \delta$$

приводит к системе

$$\begin{cases} iA_2 \xi_{2m, 2k, 2}'(T_1) + B_2 \xi_{m, k, 2}^2(T_1) \exp[i\delta T_1] = 0, \\ iC_2 \xi_{m, k, 2}'(T_1) + D_2 \xi_{2m, 2k, 2}(T_1) \bar{\xi}_{m, k, 2}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0. \end{cases}$$

Для резонанса

$$\Omega_3 = 4(b_m(k))^2 - (s_{2m, 2k}^{(1)})^2 \approx \varepsilon \delta$$

получаем

$$\begin{cases} iA_3 \xi_{2m, 2k, 1}'(T_1) + B_3 \xi_{m, k, 1}(T_1) \bar{\xi}_{m, k, 2}(T_1) \exp[i\delta T_1] = 0, \\ iC_3 \xi_{m, k, 2}'(T_1) + D_3 \xi_{2m, 2k, 1}(T_1) \bar{\xi}_{m, k, 1}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0, \\ iE_3 \xi_{m, k, 1}'(T_1) + F_3 \xi_{2m, 2k, 1}(T_1) \bar{\xi}_{m, k, 2}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0. \end{cases}$$

Для резонанса

$$\Omega_4 = 4(s_{m,k}^{(1)})^2 - (s_{0,2k}^{(1)})^2 \approx \varepsilon\delta$$

имеем

$$\begin{cases} iA_4 \xi_{0,2k,1}'(T_1) + B_4 \xi_{m,k,1}^2(T_1) \exp[i\delta T_1] = 0, \\ iC_4 \xi_{m,k,1}'(T_1) + D_4 \xi_{0,2k,1}(T_1) \bar{\xi}_{m,k,1}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0. \end{cases}$$

Для резонанса

$$\Omega_5 = 4(s_{m,k}^{(2)})^2 - (s_{0,2k}^{(2)})^2 \approx \varepsilon\delta$$

получим

$$\begin{cases} iA_5 \xi_{0,2k,2}'(T_1) + B_5 \xi_{m,k,2}^2(T_1) \exp[i\delta T_1] = 0, \\ iC_5 \xi_{m,k,2}'(T_1) + D_5 \xi_{0,2k,2}(T_1) \bar{\xi}_{m,k,2}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0. \end{cases}$$

Для резонанса

$$\Omega_6 = 4(b_m(k))^2 - (s_{0,2k}^{(1)})^2 \approx \varepsilon\delta$$

имеем систему

$$\begin{cases} iA_6 \xi_{0,2k,1}'(T_1) + B_6 \xi_{m,k,1}(T_1) \xi_{m,k,2}(T_1) \exp[i\delta T_1] = 0, \\ iC_6 \xi_{m,k,2}'(T_1) + D_6 \xi_{0,2k,1}(T_1) \bar{\xi}_{m,k,1}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0, \\ iE_6 \xi_{m,k,1}'(T_1) + F_6 \xi_{0,2k,1}(T_1) \bar{\xi}_{m,k,2}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0, \end{cases}$$

где δ — параметр расстройки.

Решения для амплитуд ищутся в виде

$$\xi_{m,k}^{(j)} = a_{m,k}^{(j)}(T_1) \exp[ib_{m,k}^{(j)}(T_1)]. \quad (12)$$

Начальные условия для систем уравнений получаются подстановкой проектов решений (12) в начальные условия задачи.

Обсуждение полученных результатов

Решения дисперсионного уравнения, в частности, определяют области устойчивости различных капиллярных волн на поверхности струи. Очевидно, что исследование временной эволюции амплитуд, взаимодействующих при резонансе волн путем численного решения систем дифференциальных уравнений (11), имеет смысл проводить только в области их устойчивости.

Заметим, что инкремент неустойчивости γ любой волны определяется модулем мнимой части ее частоты, являющейся решением дисперсионного уравнения.

На рис. 1, *a* для резонанса $\Omega_1 \approx \varepsilon\delta$ изображены как функции от безразмерного параметра w и безразмерного волнового числа k , численно рассчитанные при $m = 1$, $We = 0.1$ и $\rho = 0.001$: поверхность

$$J \equiv \Omega_1 = 4(s_{m,k}^{(1)})^2 - (s_{2m,2k}^{(1)})^2$$

(на рисунке отмечена цифрой 1) и поверхности инкрементов взаимодействующих волн $\gamma(2m, 2k)$ и $\gamma(m, k)$

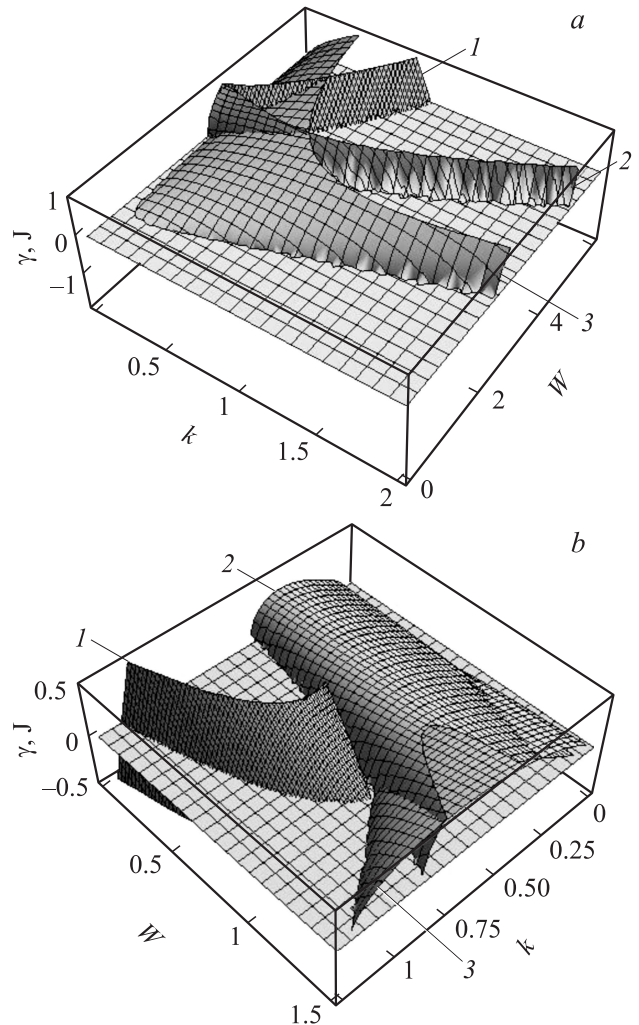


Рис. 1. Взаимное расположение поверхностей, соответствующих инкрементам взаимодействующих волн и комбинации квадратов их частот. Рассчитано при $We = 0.1$, $m = 1$, $\rho = 0.001$. *a* — резонанс $J \equiv \Omega_1 = 4(s_m^{(1)}(k))^2 - (s_{2m}^{(1)}(2k))^2 \approx \varepsilon\delta$, *b* — резонанс $J \equiv \Omega_4 = 4(s_0^{(1)}(k))^2 - (s_m^{(1)}(2k))^2 \approx \varepsilon\delta$.

(отмеченные соответственно цифрами 2 и 3). Секущая плоскость является нулевой, пересечение секущей плоскости и поверхности $J \equiv \Omega_1$ будет являться линией реализации резонанса $\Omega_1 \approx \varepsilon\delta$. Поверхности 2 и 3 продолжают расти с увеличением параметра w . Как видно из рисунка, область реализации возможного резонанса полностью лежит в области неустойчивости взаимодействующих волн. Сказанное означает нереализуемость данного резонанса.

Аналогичная ситуация складывается и для других возможных резонансов

$$\Omega_2 = 4(s_{m,k}^{(2)})^2 - (s_{2m,2k}^{(2)})^2 \approx \varepsilon\delta,$$

$$\Omega_3 = 4(b_{m,k})^2 - (s_{2m,2k}^{(1)})^2 \approx \varepsilon\delta,$$

$$\Omega_6 = 4(b_{m,k})^2 - (s_{0,2k}^{(1)})^2 \approx \varepsilon\delta.$$

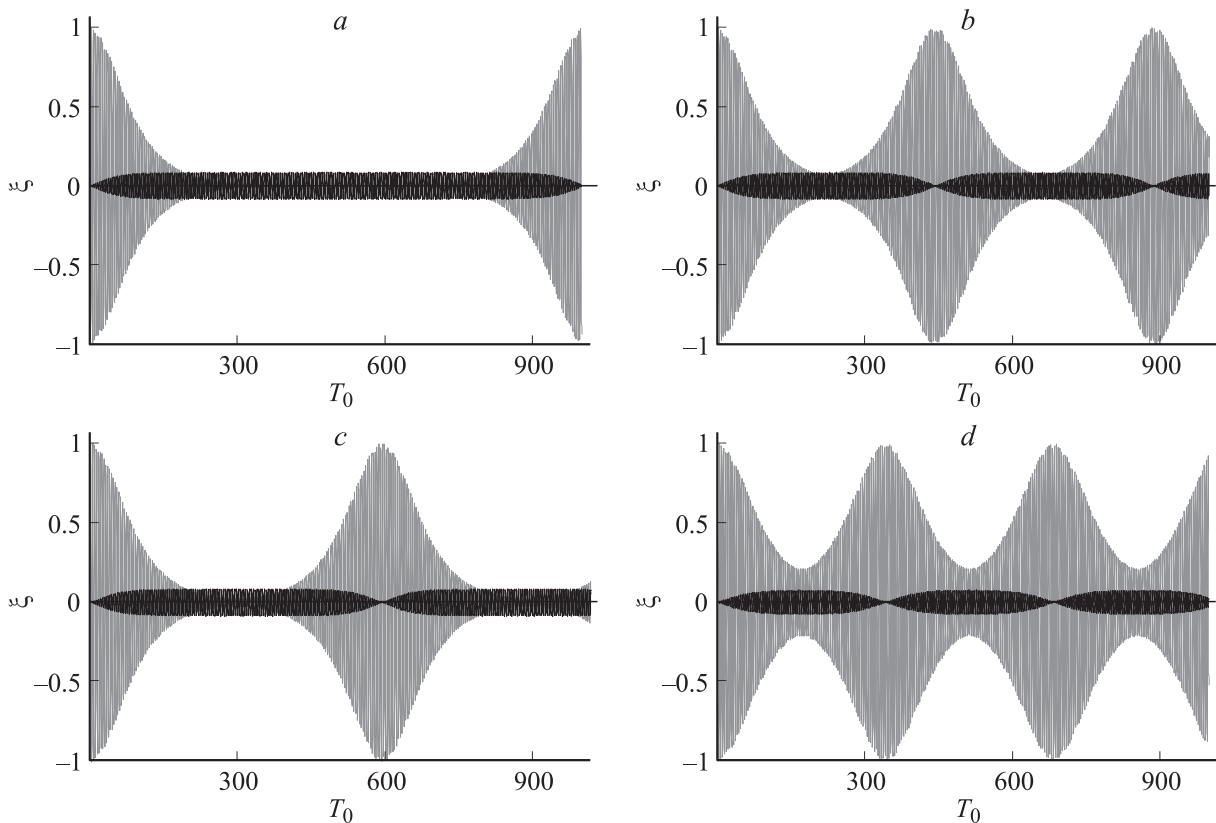


Рис. 2. *a* — иллюстрация резонансного взаимодействия волн при нелинейном резонансе $\Omega_4 = 4(s_m^{(1)}(k))^2 - (s_0^{(1)}(2k))^2 \approx \varepsilon\delta$. Рассчитано при значениях параметров $m = 1, w = 0.5, We = 0.1, \rho = 0.001, \varepsilon = 0.3, k = 0.99\ 611\ 217$. *b* — то же, что на рис. 2, *a*, но рассчитано при $k = 0.0996$. *c* — то же, что на рис. 2, *a*, но рассчитано при $k = 0.09961$. *d* — то же, что на рис. 2, *a*, но рассчитано при $k = 0.0997$.

Как и в предыдущем случае, линии реализации этих резонансов полностью лежат в области неустойчивости взаимодействующих волн. Резонансы не реализуются.

Ситуация с резонансом

$$\Omega_4 = 4(s_{m,k}^{(1)})^2 - (s_{0,2k}^{(1)})^2 \approx \varepsilon\delta$$

иная. На рис. 1, *b* поверхность

$$J \equiv \Omega_4 = 4(s_{m,k}^{(1)})^2 - (s_{0,2k}^{(1)})^2$$

отмечена цифрой 1, поверхности $\gamma(0, 2k)$ и $\gamma(m, k)$ — цифрами 2 и 3 соответственно. Поверхности построены при тех же значениях параметров, что в предыдущем случае. Однако в данном случае часть линии реализации данного типа резонанса лежит в области устойчивости взаимодействующих волн.

Численное решение системы дифференциальных уравнений (11) для данного резонансного взаимодействия при значениях параметров $m = 1, We = 0.1, \rho = 0.001, k = 0.99\ 611\ 217, w = 0.5, \varepsilon = 0.3$ позволяет установить характер временной эволюции взаимодействующих волн с частотами $s_{1,k}^{(1)}$ и $s_{0,2k}^{(1)}$ (рис. 2, *a*). Светлым тоном отмечена волна с частотой $s_{1,k}^{(1)}$, а темным — $s_{0,2k}^{(1)}$.

Коэффициенты A_4, B_4, C_4, D_4 для системы дифференциальных уравнений (11) приведены в Приложении 2. Резонансное взаимодействие очень чувствительно к значениям параметров, при которых оно рассчитывается. На рис. 2, *b-d* построены аналогичные кривые при тех же значениях параметров, незначительно изменяется лишь безразмерное волновое число. Несложно видеть, что интенсивность (доля энергии, которой обмениваются резонансно взаимодействующие волны) и характерное время резонансного взаимодействия (резонансного обмена энергией) при этом изменяются значительно.

Качественно также реализуется и последний возможный вырожденный нелинейный резонанс

$$\Omega_5 = 4(s_m^{(2)}(k))^2 - (s_0^{(2)}(2k))^2 \approx \varepsilon\delta.$$

Вид поверхности $J = \Omega_5$ и поверхностей инкрементов для него не приводится, поскольку он подобен приведенному на рис. 1, *a*. Соответствующие этому резонансу временные зависимости амплитуд взаимодействующих волн приведены на рис. 3. Они построены при тех же значениях параметров, что и в предыдущем случае, кроме волнового числа. Рис. 3, *a-c* иллюстрируют чувствительность резонансного взаимодействия при ва-

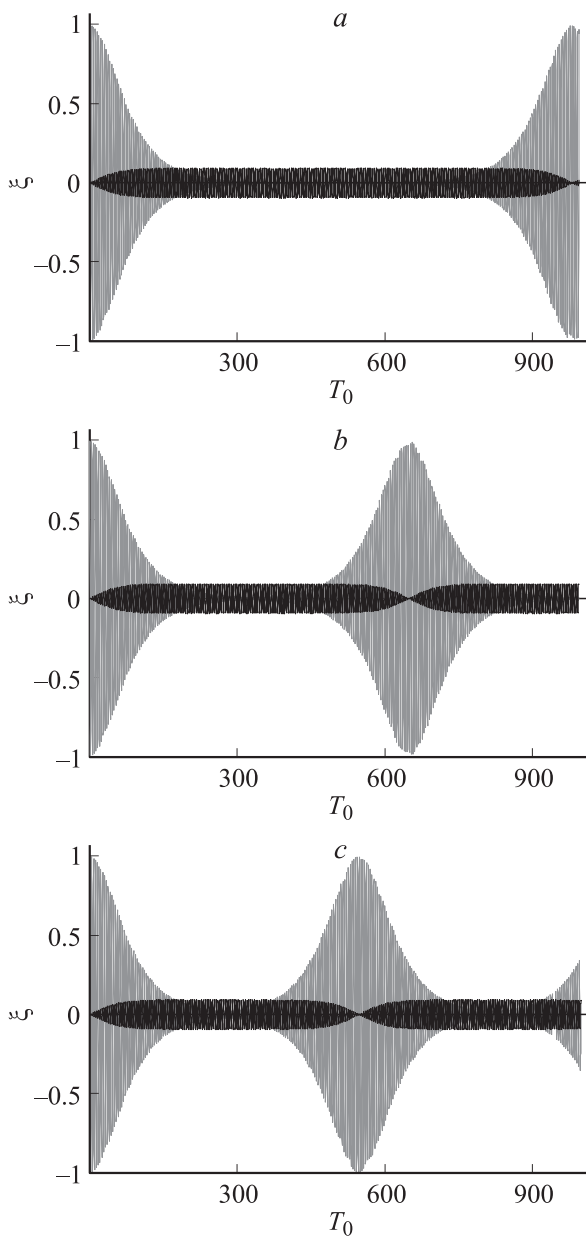


Рис. 3. *a* — иллюстрация резонансного взаимодействия волн при нелинейном резонансе $J \equiv \Omega_5 = 4(s_m^{(2)}(k))^2 - (s_0^{(2)}(2k))^2 \approx \varepsilon\delta$. Рассчитано при значении параметров $m = 1$, $w = 0.5$, $We = 0.1$, $\rho = 0.001$, $\varepsilon = 0.3$, $k = 1.0022191$. *b* — то же, что на рис. 3, *a*, но рассчитано при $k = 1.0022$. *c* — то же, что на рис. 3, *a*, но рассчитано при $k = 1.0021$.

рировании безразмерного волнового числа вблизи его точного резонансного значения.

Из рис. 2, 3 следует, что при реализации внутреннего нелинейного резонанса закономерности обмена энергиями между взаимодействующими волнами определяются физическими параметрами.

Следует отметить, что на рис. 2, 3 безразмерная амплитуда волны, заданной в начальный момент времени, принята равной единице.

Заключение

Внутреннее нелинейное вырожденное резонансное взаимодействие капиллярных волн на поверхности однородно заряженной цилиндрической струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, движущейся относительно идеальной же несжимаемой материальной среды вдоль оси симметрии невозмущенной струи, может реализоваться в резонансных ситуациях двух типов. В обоих случаях энергия передается от изначально возбужденной волны (независимо от ее симметрии) в волну осесимметричную. Интенсивность и характерное время внутреннего резонансного взаимодействия определяются физическими параметрами задачи.

Приложение 1

$$N_1 \equiv \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z},$$

$$N_2 \equiv \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z},$$

$$N_3 \equiv -\frac{1}{2} \partial_{r,r} \Phi^{(0)} (\xi^{(1)})^2 - \partial_r \Phi^{(1)} \xi^{(1)},$$

$$\begin{aligned} N_4 \equiv & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \xi^{(1)} \left(\xi^{(1)} + 2 \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial \varphi^2} \right) \\ & + \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial T_1} - \rho \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \\ & - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial r} \right)^2 \\ & + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_1^{(1)}}{\partial r \partial T_0} - \rho \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial r \partial T_0} + \rho U_0 \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi_2^{(1)}}{\partial r \partial z} \\ & - \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Phi^{(0)}}{\partial r^3} (\xi^{(1)})^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + 2\xi^{(1)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned}$$

Приложение 2

$$A_4 = \frac{\rho g_0(2k)(2kU_0 - s_{0,2k}^{(1)}) + (2h_0(2k) - \rho g_0(2k))s_{0,2k}^{(1)}}{g_0(2k)h_0(2k)},$$

$$B_4 = -\frac{1}{2g_m^2(k)h_m^2(k)} \left\{ (5k^2 - 5m^2 + 4G_m(k))h_m^2(k)s_{m,k}^{(1)} + g_m^2(k) \left[-12\pi\chi^2 h_m^3(k)(1 + h_m(k)) - \rho(kU_0 - s_{m,k}^{(1)}) \times (kU_0(k^2 - m^2) - s_{m,k}^{(1)}(5k^2 - 5m^2 + 4H_m(k))) + h_m^2(k) \times (2 + k^2 - 3m^2 + 3\rho k^3 U_0^2 - 12\pi\chi^2 + 4\pi\chi^2(k^2 - m^2) + 8\pi\chi^2 H_m(k) - 6\rho k U_0 s_{m,k}^{(1)} + 3(\rho - 1)(s_{m,k}^{(1)})^2) \right] \right\},$$

$$C_4 = \frac{\rho g_m(k)(kU_0 - s_{m,k}^{(1)}) + (2h_m(k) - \rho g_m(k))s_{m,k}^{(1)}}{g_m(k)h_m(k)},$$

$$D_4 = \frac{1}{2g_m(k)h_m(k)g_0(2k)h_0(2k)} \left\{ 2h_m(k)h_0(2k)s_{m,k}^{(1)} \times \left((3k^2 - G_m(k))s_{0,2k}^{(1)} + s_{m,k}^{(1)}(-2k^2 + G_m(k)) \right) - g_m(k)g_0(2k) \left[4\pi\chi^2 h_0^2(2k)h_m(k)(1 + 3h_m(k)) + 2\rho(kU_0 - s_{m,k}^{(1)})(2k^3 U_0 + s_{0,2k}^{(1)}(-3k^2 + H_m(k)) + s_{m,k}^{(1)}(2k^2 - H_m(k))) + h_m(k)h_0(2k)(-2 + 2k^2 + 4m^2 + 12\pi\chi^2 + 8\pi\chi^2(k^2 + h_m(k) - H_m(k)) + (2s_{m,k}^{(1)} - s_{0,2k}^{(1)})) \times (\rho k U_0 - s_{m,k}^{(1)}(\rho - 1)) \right] \right\},$$

$$h_m(k) \equiv \frac{kK'_m(k)}{K_m(k)} \equiv m - \frac{kK_{m+1}(k)}{K_m(k)},$$

$$g_m(k) \equiv \frac{kI'_m(k)}{I_m(k)} \equiv m + \frac{kI_{m+1}(k)}{I_m(k)},$$

$$H_m(k) \equiv \frac{k^2 K''_m(k)}{K_m(k)}; \quad G_m(k) \equiv \frac{k^2 I''_m(k)}{I_m(k)}.$$

[10] Григорьев А.И., Петрушов Н.А., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 1. С. 81–92.

[11] Григорьев А.И., Петрушов Н.А., Ширяева С.О. // ЭЖ. Исследовано в России. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2011/044.pdf>. С. 569–577.

Список литературы

- [1] Ентов В.М., Ярин А.Л. // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1984. Т. 18. С. 112–197.
- [2] Eggers J., Willermaux E. // Rep. Prog. Phys. 2008. Vol. 71. N 036 601. P. 1–79.
- [3] Kim O.V., Dunn P.F. // Langmuir. 2010. Vol. 26. P. 15 807–15 813.
- [4] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2007. 340 с.
- [5] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 4. С. 24–32.
- [6] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 4. С. 35–46.
- [7] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Петрушов Н.А. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 2. С. 16–22.
- [8] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Петрушов Н.А., Волкова М.В. // ЭОМ. 2010. № 4. С. 23–31.
- [9] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.