

05

Условия тепловой стабилизации критического состояния сверхпроводников

© В.Р. Романовский

Национальный исследовательский центр „Курчатовский институт“,
123182 Москва, Россия
e-mail: vromanovskii@netscape.net

(Поступило в Редакцию 30 июля 2012 г.)

Исследованы условия тепловой стабилизации электродинамических состояний сверхпроводников. Моделирование их макроскопических состояний выполнено в неизотермическом приближении на основе численного решения системы уравнений Фурье и Максвелла с неизвестной границей проникновения магнитного потока. Сформулированы соответствующие критерии устойчивости критического состояния, описываемого моделью вязкого течения. Полученные результаты сопоставлены с соответствующими результатами изотермической теории. Показано, что ошибки изотермического приближения существенны в случае теплоизолированного сверхпроводника. Поэтому известный адиабатический критерий устойчивости, сформулированный в изотермическом приближении, приводит к ограничению области устойчивых состояний, так как корректное определение условий перехода сверхпроводника в нормальное состояние должно основываться на учете тепловой предыстории стабильного формирования его сверхпроводящих состояний. В целом ошибка расчета тепловых потерь в изотермическом приближении увеличивается при уменьшении коэффициента теплоотдачи, при увеличении скорости нарастания внешнего магнитного поля или поперечного размера сверхпроводника. В то же время неизотермические условия стабильности расширяют класс допустимых состояний, так как приводят к существованию условий, являющихся связующим звеном между независимо развивающимися в настоящее время теориями термомангнитной неустойчивости, теорией потерь и тепловой стабилизации сверхпроводников.

Введение

Как известно, особенностями процессов, протекающих в сверхпроводниках, являются диссипативные явления, обусловленные термоактивированным движением вихрей. Они могут приводить к преждевременному разрушению сверхпроводящего состояния. При этом определяющую роль в возникновении неустойчивостей играют совместно развивающиеся тепловые и электромагнитные процессы. В результате в рамках макроскопических моделей были сформулированы важнейшие критерии устойчивости критического состояния [1–3]. Однако их вывод основывался на исследовании начальной стадии развития неустойчивости. Причем возможный стабильный перегрев сверхпроводника перед возникновением неустойчивости, зависящий от характера какого-либо возмущения, во внимание не принимался. Решение этой проблемы с учетом конечного повышения температуры сверхпроводника, происходящее уже на стадии устойчивого формирования сверхпроводящих состояний, расширяет класс явлений, рассматриваемых в феноменологической электродинамике сверхпроводников. В то же время проведенные в неизотермическом приближении исследования условий возникновения магнитной или токовой неустойчивостей [4–15] не позволяют дать исчерпывающий ответ о роли допустимого стабильного увеличения температуры сверхпроводника в условиях их устойчивости. Поэтому целью настоящей работы является анализ физических особенностей коллективного формирования температурного и электро-

магнитного полей в сверхпроводниках, когда возможна тепловая стабилизация критического состояния.

Модель

Рассмотрим охлаждаемую плоскопараллельную пластину из жесткого сверхпроводника, находящуюся во внешнем магнитном поле, параллельном его поверхности, в случае, когда оно нарастает с постоянной скоростью dB/dt . Для того чтобы установить границы использования существующих теорий, сформулированных без учета допустимого перегрева сверхпроводника перед возникновением неустойчивости, исследуем взаимосвязанное изменение температуры и электрического поля внутри сверхпроводника в рамках так называемой модели вязкого течения [3] на основе решения следующей системы уравнений:

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \begin{cases} 0, & 0 < x < x_p, \\ EJ, & x_p \leq x \leq a, \end{cases}$$

$$\mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \quad J = J_c(T, B_a) + E/\rho_f, \quad (1)$$

с начально-краевыми условиями

$$T(x, 0) = T_0, \quad E(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0,$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + h(T - T_0)|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x=a} = \begin{cases} \frac{dB}{dt}, & 0 < t < t_s, \\ 0, & t \geq t_s. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь T — температура, J — плотность тока, E — напряженность электрического поля, ρ_f — сопротивление сверхпроводника в режиме вязкого течения, B_a — индукция внешнего магнитного поля, C — объемная теплоемкость сверхпроводника, λ — коэффициент его теплопроводности, h — коэффициент теплоотдачи, a — полутолщина пластины, T_0 — температура хладагента, t_s — время нарастания внешнего магнитного поля, $J_c(T, B)$ — критическая плотность тока, x_p — изменяющаяся во времени координата глубины проникновения магнитного потока, определяемая из решения уравнения

$$\mu_0 \int_{x_p}^a J(x, t) dx = B_a = \frac{dB}{dt} t. \quad (3)$$

Система уравнений (1)–(3) описывает диссипативный процесс диффузии магнитного потока внутри жесткого сверхпроводника, динамика которого зависит не только от скорости изменения внешнего магнитного поля, но и от соответствующего повышения температуры. Отметим, что уравнение (3), описывающее в неявной форме закон изменения неизвестной границы проникновения $x_p(t)$, исключает использование известных методов решения систем уравнений параболического типа, описывающих диффузионные явления в средах с неизвестной границей раздела фаз [16–18]. Поэтому для ее решения был разработан численный метод, позволяющий исследовать процессы диффузии с неявно заданной границей раздела фаз. Для его верификации результаты численного анализа в неизотермическом приближении сопоставлялись с расчетом по известным аналитическим формулам, которые следуют из изотермической модели [1–3], предполагая линейную зависимость критической плотности тока от температуры

$$J_c(T, B) = J_{c0}(T_{cB} - T)/(T_{cB} - T_0). \quad (4)$$

Здесь J_{c0} и T_{cB} — известные критические параметры сверхпроводника для заданного внешнего магнитного поля соответственно. В этом случае выражения, описывающие для плоскопараллельной пластины изменение во времени границы проникновения экранирующих токов x_p и объемной плотности тепловых потерь G , выделяемых в процессе диффузии магнитного потока, могут быть записаны в виде [1–3]

$$x_p(t) = a - \dot{B}t/(\mu_0 J_{c0}), \quad G = (\dot{B}t)^3/(6\mu_0^2 a J_{c0}).$$

На рис. 1 приведены результаты расчета глубины проникновения и объемной плотности потерь

$$G = \frac{1}{a} \int_0^t \int_0^a EJ dx dt,$$

полученные как в неизотермическом (штриховые линии), так и изотермическом (сплошные линии) приближениях. Исходные параметры принимались равными

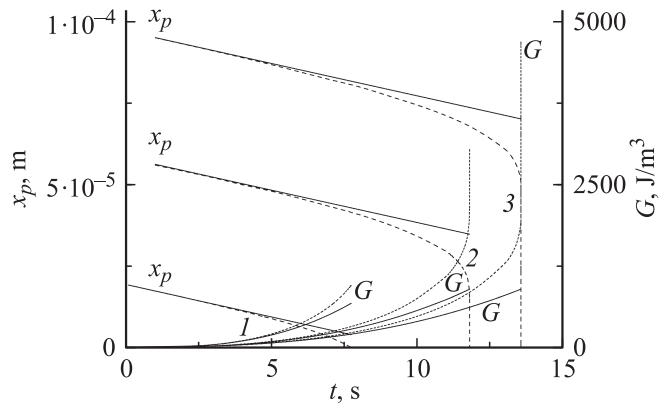


Рис. 1. Изменение во времени глубины проникновения и гистерезисных потерь при диффузии магнитного потока в неохлаждаемом сверхпроводнике ($dB/dt = 0.01$ T/s): $a = 2 \cdot 10^{-5}$ (1), $6 \cdot 10^{-5}$ (2), 10^{-4} м (3).

$C = 30T^3$ J/(m³K), $\lambda = 0.0075T^{1.8}$ W/(mK), $T_0 = 4.2$ K, $T_{cB} = 8.5$ K, $\rho_f = 5 \cdot 10^{-7}$ Ωm, $h = 0$, $J_{c0} = 4 \cdot 10^9$ A/m². Нетрудно заметить, что по сравнению с изотермическим приближением неизотермическая динамика критического состояния при адиабатических условиях характеризуется более интенсивным проникновением магнитного потока внутрь сверхпроводника. Поэтому неизотермический расчет потерь может приводить к отклонению от соответствующих значений, вычисленных в изотермическом приближении и особенно в моменты времени, предшествующие возникновению неустойчивости. В результате тепловая предыстория теплоизолированного сверхпроводника может оказать существенное влияние на условия возникновения и развития магнитной неустойчивости.

Физические закономерности неизотермического формирования критического состояния

Обсудим особенности формирования тепловых и электродинамических состояний жесткого сверхпроводника. Ниже приведены результаты численного анализа процессов, протекающих в ниобий-титановом сверхпроводнике ($a = 10^{-4}$ м) при различных условиях теплоотдачи и значениях индукции внешнего магнитного поля, близких к полю скачка потока. Они получены на основе решения задачи, описываемой системой уравнений (1)–(3). При этом тепловые и электрофизические свойства сверхпроводника принимались равными

$$\rho_f = \rho_n \frac{B}{B_{c2}(T)}, \quad \rho_n = 10^{-6} \text{ Ωm},$$

$$C = 0.812 \cdot 10^3 T \frac{B}{B_{c0}} + 42.737^3 \text{ J/(m}^3\text{K)} \text{ — по данным [19],}$$

$$\lambda = 0.0075T^{1.8} \text{ W/(mK)} \text{ — по данным [20],}$$

а критическая плотность тока $J_c(T, B)$ описывалась моделью Кима–Андерсона

$$J_c(T, B) = \frac{\alpha_0}{B + B_0} \left(1 - \frac{T}{T_{cB}}\right), \quad T_{cB} = T_{c0} \sqrt{1 - B/B_{c2}},$$

$$B_{c2} = B_{c0} [1 - (T/T_{c0})^2], \quad (5)$$

($\alpha_0 = 1.5 \cdot 10^{10}$ АТ/м², $T_{c0} = 9$ К, $B_{c0} = 14$ Т, $B_0 = 1.5$ Т).

Определение поля скачка потока B_m основывалось на расчете последовательности значений индукции внешнего магнитного поля $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \rightarrow \dots \rightarrow B_s \rightarrow B_{s+1}$, когда для заданной точности расчета $|B_{s+1} - B_s| < \varepsilon$ определялись такие граничные значения B_s и B_{s+1} , при которых температура сверхпроводника, определяемая на основе решения задачи (1)–(3), стабилизируется при $B = B_s$ (неустойчивость отсутствует), а при $B = B_{s+1}$ температура сверхпроводника самопроизвольно увеличивается (введенный магнитный поток неустойчив).

На рис. 2 построены кривые, описывающие изменение температуры сверхпроводника при стабильных и нестабильных состояниях. Состояния, после которых скорость нарастания внешнего магнитного поля полагалась равной нулю, т.е. внешнее магнитное поле B_a фиксировалось, изображены штриховыми и штрихпунктирными линиями. Из рис. 2 следует, что изменение температуры жесткого сверхпроводника на протяжении всего процесса диффузии магнитного потока имеет характерный вид, наблюдающийся при действии до- и закритического импульсного теплового возмущения различной мощности [21–23]. Действительно, сверхпроводник может либо сохранить сверхпроводящие свойства, несмотря на

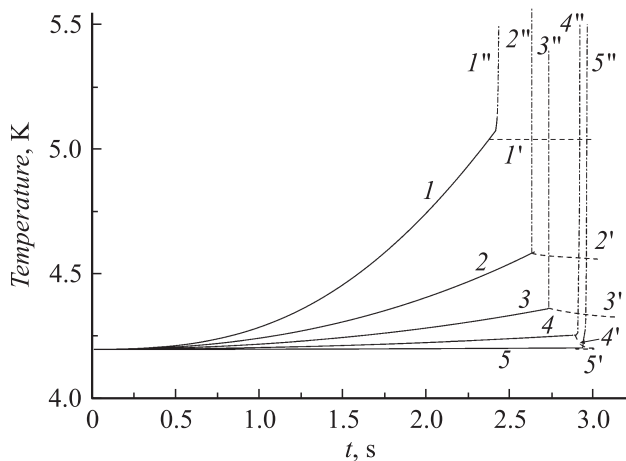


Рис. 2. Изменение температуры поверхности сверхпроводника до и после возникновения магнитной неустойчивости при варьировании коэффициента теплоотдачи $dB/dt = 0.1$ Т/с: $h = 0$: 1 — непрерывный ввод; 1' — $B_a = 0.255$ Т, 1'' — $B_a = 0.256$ Т; $h = 1$ Вт/м²К: 2 — непрерывный ввод; 2' — $B_a = 0.279$ Т, 2'' — $B_a = 0.280$ Т; $h = 3$ Вт/м²К: 3 — непрерывный ввод; 3' — $B_a = 0.287$ Т, 3'' — $B_a = 0.288$ Т; $h = 10$ Вт/м²К: 4 — непрерывный ввод; 4' — $B_a = 0.303$ Т, 4'' — $B_a = 0.304$ Т; $h = 100$ Вт/м²К: 5 — непрерывный ввод; 5' — $B_a = 0.304$ Т, 5'' — $B_a = 0.305$ Т.

его заметный допустимый перегрев, либо перейти в нормальное состояние при незначительном повышении его температуры даже после прекращения изменения внешнего магнитного поля. В частности, при быстром нарастании поля или при тепловой изоляции сверхпроводника, когда время стабильного проникновения магнитного потока t_s относительно мало, повышение его температуры перед возникновением магнитной неустойчивости весьма заметно. (В рассматриваемом численном эксперименте допустимый перегрев достигает 10% от величины критической температуры сверхпроводника.) Но с уменьшением dB/dt или при улучшении условий теплоотдачи допустимый перегрев уменьшается при соответствующем увеличении времени стабильной диффузии магнитного поля.

Оценим допустимый перегрев сверхпроводящей пластины по формуле

$$\Delta T \sim \frac{1}{a} \int_0^{t_s} \int_0^a E J dx dt / (C_t + ht_s/a), \quad t_s = B_a / \dot{B}, \quad (6)$$

которую нетрудно получить, переходя от уравнения теплопроводности к уравнению теплового баланса. Здесь C_t — среднеинтегральная теплоемкость сверхпроводника. Соответственно, когда неустойчивость инициируется за относительно малые времена, т.е. при $t_s \ll aC_t/h$, например, при диффузии магнитного потока в массивном или плохо охлаждаемом сверхпроводниках, допустимый перегрев зависит от общей энергии, выделенной в процессе диффузии магнитного поля. При этом условия теплообмена будут оказывать слабое влияние на значение ΔT , а условия возникновения неустойчивости будут слабо зависеть от характера изменения внешнего магнитного поля. С увеличением времени диффузии магнитного потока, предшествующего скачку потока, допустимый перегрев сверхпроводника уменьшается и при $t_s \gg aC_t/h$, например, при малых скоростях его нарастания или интенсивном охлаждении, основной вклад в величину перегрева сверхпроводника будет вносить мощность диссипируемого тепла. В этом случае характер изменения во времени внешнего магнитного поля будет оказывать влияние на стабильное формирование электродинамических состояний.

Данные результаты позволяют сформулировать общую закономерность, которая имеет место перед возникновением магнитной неустойчивости в сверхпроводнике: с увеличением времени стабильной диффузии магнитного потока допустимый перегрев сверхпроводника монотонно уменьшается, но количество тепла, выделенное за это время, увеличивается (рис. 3). Именно данная связь объясняет, почему при увеличении коэффициента теплоотдачи будет наблюдаться неожиданное на первый взгляд уменьшение допустимого перегрева сверхпроводника, на фоне которого происходит возникновение магнитной неустойчивости. Таким образом, возникновению магнитной неустойчивости всегда предшествует конечный допустимый перегрев сверхпроводника, зави-

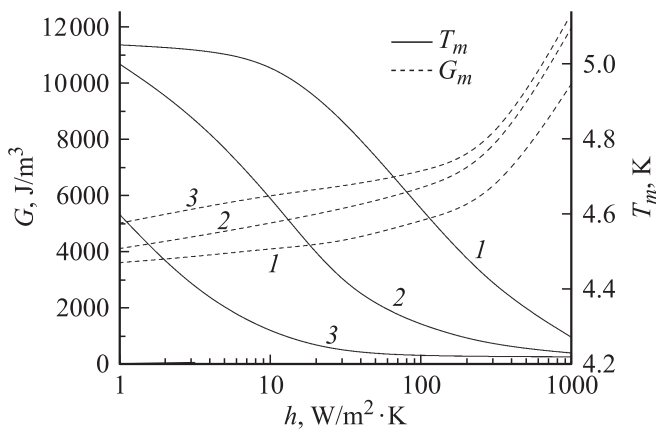


Рис. 3. Связь допустимого повышения температуры сверхпроводника T_m и количества тепла G_m , выделяемого перед скачком потока, при варьировании коэффициента теплоотдачи и различных значениях скорости нарастания внешнего магнитного поля dB/dt : 1 — 10, 2 — 1, 3 — 0.1 T/s.

связи от скорости изменения внешнего магнитного поля, условий охлаждения или его поперечных размеров. Наибольшие перегревы будут иметь место при отсутствии охлаждения или высоких скоростях нарастания внешнего магнитного поля. Это необходимо учитывать при определении условий устойчивости сверхпроводящих магнитных систем с плотными обмотками, подверженных воздействию быстро изменяющихся магнитных полей.

Подчеркнем важность сформулированных результатов, полученных для вольт-амперной характеристики сверхпроводника, описываемой моделью вязкого течения. Существующая в настоящее время точка зрения на условия возникновения магнитной неустойчивости допускает малый допустимый перегрев сверхпроводника, но только в рамках моделей, предполагающих непрерывное изменение вольт-амперной характеристики сверхпроводника. При этом в соответствии с условием устойчивости

$$\int_s E J ds \leq h p T_\delta, \quad (7)$$

сформулированном в [9,10,24] для сверхпроводников с вольт-амперной характеристикой вида

$$E = J \rho_n \exp[J/J_\delta + (T_0 - T_c(B))/T_\delta], \quad (8)$$

допустимое значение их стабильного перегрева независимо от пространственно-временных особенностей диффузии магнитного потока ограничивается малой величиной температурного параметра нарастания вольт-амперной характеристики сверхпроводника T_δ , зависящего только лишь от степени нелинейности вольт-амперной характеристики. Поэтому при предельном переходе к условиям стабильности сверхпроводников с биновской вольт-амперной характеристикой ($R_\delta \rightarrow 0$) критерий (7) не имеет физического смысла, так как

допустимый перегрев в этом случае должен быть равен нулю. Это привело авторов работ [9,10,24] к выводу о том, что в модели критического состояния сверхпроводники неустойчивы в быстро изменяющемся магнитном поле. Однако если анализ стабильности критического состояния проводить с точки зрения коллективного формирования тепловых и электродинамических состояний сверхпроводника, происходящего на протяжении всего процесса диффузии магнитного потока, то у жесткого сверхпроводника даже с вольт-амперной характеристикой, описываемой биновской моделью критического состояния, перед скачком магнитного потока будут иметь место не только конечный допустимый перегрев, но и его зависимость от условий электродинамического воздействия. Поэтому при вариации внешнего магнитного поля в соответствии с изменением допустимого перегрева сверхпроводника, зависящего от скорости нарастания магнитного поля, условий охлаждения или поперечного размера сверхпроводника, будет иметь место соответствующее изменение поля скачка магнитного потока. Следовательно, искусственное ограничение допустимого перегрева сверхпроводника перед возникновением неустойчивости может приводить к искажению условий возникновения скачка потока. Согласно рис. 2 и 3, ошибка вычислений, выполненных в предположении существования допустимого перегрева, равного T_δ , тем больше, чем больше скорость ввода магнитного поля или меньше коэффициент теплоотдачи.

Таким образом, сформулированная выше связь между допустимым перегревом и условиями стабильности критического состояния описывает особенности тепловой стабилизации критического состояния. Она изначально лежит в основе зависимости поля скачка потока от скорости его изменения. В качестве иллюстрации данной закономерности на рис. 4 построены кривые, описывающие поле скачка потока в жестком сверхпроводнике в зависимости от коэффициента теплоотдачи для различных значений скорости нарастания внешнего магнитного поля.

Из результатов, обсужденных выше, также следует еще один важный вывод о существовании связи между допустимыми потерями энергии в сверхпроводнике, находящемся в переменном магнитном поле, и стабильным повышением его температуры перед возникновением неустойчивости. Согласно рис. 3, с улучшением условий теплоотдачи допустимые тепловыделения в сверхпроводнике, которые не будут вызывать возникновение неустойчивости, увеличиваются на фоне его монотонно уменьшающегося стабильного перегрева. Причем в случаях интенсивного охлаждения сверхпроводника потери приводят к возникновению неустойчивости, развивающейся на фоне малого допустимого перегрева сверхпроводника. В результате даже при идеальных условиях охлаждения поверхности сверхпроводника ($h \rightarrow \infty$) допустимое стабильное значение температуры сверхпроводника перед возникновением неустойчивости будет намного ниже критической температуры сверхпроводника,

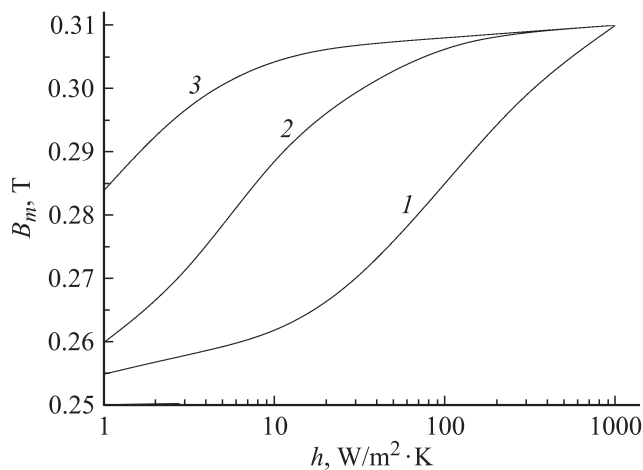


Рис. 4. Влияние коэффициента теплоотдачи и скорости ввода на поле скачка потока: 1 — $dB/dt = 10$, 2 — 1, 3 — 0.1 T/s.

но при этом оно будет выше температуры хладагента. Поэтому широко распространенное предположение, согласно которому тепловые потери в сверхпроводнике при интенсивных условиях теплообмена будут приводить к его переходу в нормальное состояние только после того, как температура сверхпроводника превысила его критическую температуру, является ошибочным. Подчеркнем, что данный вывод получен в рамках модели вязкого течения. В то же время в рамках существующей теории получить его принципиально невозможно в силу ограничения используемых моделей.

В связи с отмеченной нетривиальной связью между тепловыми потерями и допустимым перегревом сверхпроводника еще раз проанализируем критерий (7). Он приводит к нулевым значениям допустимых потерь при адиабатических условиях охлаждения ($h \rightarrow 0$), а также к их неограниченным значениям при идеальных условиях охлаждения ($h \rightarrow \infty$). Следовательно, критерий (7) не соблюдает предельных переходов к двум практически важным режимам охлаждения. В результате он не позволяет корректно оценить допустимый уровень потерь в зависимости от коэффициента теплоотдачи, так как допустимое повышение температуры сверхпроводника было введено искусственно. Между тем даже в рамках биновской модели критического состояния ($T_s = 0$) будет наблюдаться нетривиальная взаимосвязь между допустимыми потерями и перегревами жесткого сверхпроводника, которая существует во всем диапазоне варьирования значений коэффициента теплоотдачи. Она приводит к новой формулировке условий разрушения критического состояния: магнитная неустойчивость возникает вследствие тепловыделения, превышающего характерное (критическое) значение, которое зависит, например, от условий теплоотдачи, интенсивности электромагнитного возмущения. Данный вывод и обсужденные выше закономерности изменения допустимых перегревов связывают между собой независимо развивающиеся теорию

магнитной неустойчивости, теорию потерь и теорию тепловой стабилизации. Как известно, в рамках последней доказано существование значительных допустимых перегревов, зависящих от характера возмущения, введенного тока и условий теплоотдачи [21–23]. Поэтому в целом соблюдается общий тепловой механизм возникновения магнитной или тепловой неустойчивостей. Подчеркнем, что он позволяет с единых теоретических предпосылок сформулировать условия возникновения каких-либо неустойчивостей при действии возмущений различной природы, учитывая взаимосвязанное изменение тепловых и электродинамических состояний сверхпроводника перед их возникновением.

Связь адиабатических условий устойчивости критического состояния с потерями и допустимым перегревом

Стабильное повышение температуры сверхпроводника, максимальное, как было показано выше, при адиабатических условиях изменения внешнего магнитного поля ($h \ll aC_t/t_s$), должно видоизменить известное адиабатическое условие стабильности критического состояния. Сформулируем соответствующий критерий в неизотермическом приближении для сверхпроводника с линейной температурной зависимостью критической плотности тока вида (4) в случае неполного проникновения магнитного потока внутрь сверхпроводника, предполагая, что $C \sim \text{const}$. Введем безразмерные переменные

$$X = x/a, \quad \tau = t/t_x (t_x = \mu_0 a^2 / \rho_f), \quad e = E / (J_{c0} \rho_f),$$

$$\theta = (T - T_0) / (T_{cB} - T_0).$$

Исключая плотность тока в системе уравнений (1), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \Lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \begin{cases} 0, & 0 < X < X_p, \\ \gamma e, & X_p \leq X \leq 1, \end{cases}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = \Lambda \frac{\partial^2 e}{\partial X^2} + \gamma e + \Lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}, \quad \gamma = \beta(1 - \theta),$$

где

$$\Lambda = \frac{\lambda \mu_0}{C \rho_f}, \quad \beta = \frac{\mu_0 J_{c0} a^2}{C} \left| \frac{dJ_c}{dT} \right|$$

— характерные безразмерные параметры, от которых зависит стабильность критического состояния [1–3].

В выписанной системе уравнений (9) второе уравнение, описывающее эволюцию электрического поля внутри сверхпроводника, относится к классу диффузионных уравнений с объемным размножением [25]. Типичным процессом указанного типа является диффузия нейтронов в активной среде с коэффициентом размножения $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, где $\gamma_1 = \beta$ — коэффициент рождения нейтронов, $\gamma_2 = \beta\theta$ — коэффициент поглощения нейтронов. При $\gamma > 0$ процесс объемной генерации нейтронов преобладает над их поглощением, и

при определенных условиях, зависящих от величины γ , возникает цепная реакция. Согласно данной аналогии, при $\gamma = \beta(1 - \theta) > 0$ возможно спонтанное возрастание напряженности электрического поля в сверхпроводнике, при котором может быть разрушено сверхпроводящее состояние. Однако повышение температуры сверхпроводника перед возникновением магнитной неустойчивости, аналогичное увеличению коэффициента поглощения, будет приводить к увеличению диапазона устойчивых состояний с точностью до величины и знака множителя $\Lambda \partial^2 \vartheta / \partial X^2$, также влияющего на характер перераспределения электрического поля внутри сверхпроводника. Другими словами, при допустимом увеличении температуры сверхпроводника будет наблюдаться тепловая стабилизация критического состояния.

В общем случае анализ условий устойчивости, проводимый даже на основе упрощенной системы (8), требует применения численных методов. Для того чтобы в неизотермическом приближении выписать критерии возникновения магнитной неустойчивости, исследуем начальную стадию эволюции электрического поля, когда температура сверхпроводника θ_m , до которой он нагрелся перед возникновением неустойчивости, и граница области намагниченности X_p не претерпевают значительного изменения. Для жестких сверхпроводников без стабилизирующей матрицы данный подход оправдан в силу того, что изменение температуры сверхпроводника изначально определяется диффузией магнитного поля, так как для жестких сверхпроводников $\Lambda \ll 1$ [3]. Кроме этого, будем учитывать, что распределение температуры внутри жесткого сверхпроводника при адиабатических условиях охлаждения практически однородно. Поэтому в приближении $\Lambda \ll 1$ анализ начальной стадии перераспределения электрического поля внутри сверхпроводника, на поверхности которого внешнее магнитное поле постоянно, может быть выполнен на основе исследования собственных чисел редуцированного уравнения вида

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 e}{\partial X^2} + \gamma e, \quad \gamma = \beta(1 - \theta_m) \sim \text{const} \quad (9)$$

с краевыми условиями

$$e(X_p, \tau) = 0, \quad \partial e / \partial X(1, \tau) = 0. \quad (10)$$

Решение начально-краевой задачи (9), (10) будем отыскивать в виде

$$e(X, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp[(\gamma - \nu_k)\tau] Q_k(X), \quad (11)$$

где A_k — константы интегрирования, $Q_k(X)$ — собственные функции и ν_k — собственные числа, которые следуют из решения задачи Штурма–Лиувилля

$$\frac{d^2 Q_k}{dX^2} + \nu_k Q_k = 0, \quad Q_k(X_p) = 0, \quad dQ_k/dX(1) = 0.$$

Согласно данной спектральной задаче, собственные числа удовлетворяют равенству

$$\sqrt{\nu_k}(1 - X_p) = (2k - 1)\pi/2, \\ 0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots, k = 1, 2, 3 \dots$$

Поэтому электрическое поле, индуцированное изменяющимся внешним магнитным полем, будет спонтанно возрастать (рис. 2) даже при фиксированном значении внешнего магнитного поля, если выполняется условие $\gamma - \nu_1 > 0$, когда в выражении (11) появится первый множитель, экспоненциально нарастающий со временем. Следовательно, в неизотермическом приближении сверхпроводящее состояние не разрушается, если соблюдается условие адиабатической устойчивости вида

$$\beta < \frac{\pi^2}{4(1 - \theta_m)(1 - X_p)^2}, \quad (12)$$

которое относительно размерных переменных может быть записано как

$$\frac{\mu_0 a^2 J_{c0}}{C} \left| \frac{dJ_c}{dT} \right| \left(1 - \frac{x_p}{a} \right)^2 \frac{T_{cB} - T_m}{T_{cB} - T_0} < \frac{\pi^2}{4}. \quad (13)$$

Нетрудно найти, что в предельном случае $T_m \rightarrow T_0$ и $X_p \rightarrow 0$ критерии (12) и (13) приводят к соответствующим изотермическим условиям адиабатической устойчивости [1–3]. Критерии (12) и (13) также наглядно демонстрируют влияние допустимого увеличения температуры сверхпроводника на условия стабильности критического состояния при неполном проникновении экранирующего тока внутрь сверхпроводника, и, в частности, на величину допустимого увеличения области намагниченности. Согласно (13), критическое состояние устойчиво, если ее подвижная координата x_p удовлетворяет условию

$$a - x_p < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C(T_{cB} - T_0)^2}{\mu_0 J_{c0}^2 (T_{cB} - T_m)}}, \quad (14)$$

а внешнее магнитное поле не превысило значение

$$B_m = \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu_0 C (T_{cB} - T_m)}. \quad (15)$$

Следовательно, чем больше стабильное увеличение температуры сверхпроводника, тем больше величина x_p , а значит, по мере стабильного заполнения экранирующими токами поперечного сечения сверхпроводника условия возникновения магнитной неустойчивости выйдут за рамки электродинамических условий и будут становиться более зависимыми от теплового состояния сверхпроводника. В результате наибольшее влияние температуры на условия адиабатической устойчивости будет наблюдаться при полном проникновении экранирующих токов внутрь сверхпроводника.

Проведенный упрощенный анализ влияния температуры на условия адиабатической стабильности критического состояния был выполнен, изучая только лишь

начальную стадию перераспределения электрического поля, индуцированного изменяющимся внешним магнитным полем. Рассмотрим теперь другую сторону данной проблемы, а именно исследуем динамику температуры сверхпроводника, предположив, что распределение электрического поля внутри области намагниченности удовлетворяет так называемому биновскому приближению [1–3] и в терминах выше введенных безразмерных переменных может быть записано как

$$e(X, \tau) = \frac{a\dot{B}}{J_{c0}\rho_f} (X - X_p). \quad (16)$$

Перейдем в системе уравнений (8) от уравнения теплопроводности к уравнению теплового баланса, проинтегрировав его по X в пределах от 0 до 1, учитывая адиабатические тепловые граничные условия $\partial\theta/\partial X(0, \tau) = 0$, $\partial\theta/\partial X(1, \tau) = 0$ и однородное распределение температуры, которое имеет место при адиабатических условиях [3]. После несложных преобразований получим следующее уравнение

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \beta(1 - \theta) \int_{X_p}^1 e(X, \tau) dX.$$

Подставив в него формулу (16) и выполнив соответствующее интегрирование, найдем связь между скоростью нарастания температуры и глубиной проникновения магнитного потока

$$(1 - X_p)^2 = \frac{2J_{c0}\rho_f}{\beta(1 - \theta)} \frac{d\theta}{d\tau}.$$

Тогда из критерия (12) следует, что критическое состояние устойчиво, если скорость нарастания температуры сверхпроводника не превышает некоторое характерное значение, т. е. удовлетворяет условию тепловой стабилизации

$$\frac{d\theta}{d\tau} < \frac{\pi^2}{8} \frac{\dot{B}a}{J_{c0}\rho_f}.$$

В размерном виде оно записывается как

$$\frac{dT}{dt} < \frac{\pi^2}{8} \frac{\dot{B}(T_{c0} - T_0)}{\mu_0 J_{c0} a}.$$

Согласно данной оценке и уравнению теплового баланса, записанному в виде

$$C \frac{dT}{dt} = \frac{1}{a} \int_{x_p}^a EJ dx,$$

легко найти соответствующее ограничение на величину выделяемых потерь. А именно при

$$\int_{x_p}^a EJ dx < \frac{\pi^2}{8} \frac{C(T_{cB} - T_0)\dot{B}}{\mu_0 J_{c0}},$$

а значит, и при

$$\int_0^t \int_{x_p}^a EJ dx dt < \frac{\pi^2}{8} \frac{C(T_{cB} - T_0)B_a(t)}{\mu_0 J_{c0}}$$

критическое состояние устойчиво. Физический смысл последнего неравенства очевиден: при адиабатических условиях формирования критического состояния существует верхняя граница допустимого значения объемной плотности тепловых потерь, при превышении которой возникнет магнитная неустойчивость.

Таким образом, данные результаты строго доказывают не только существование критического значения допустимого тепловыделения, но и критической скорости нарастания температуры сверхпроводника. Подчеркнем, что данные значения не могут быть корректно определены в рамках моделей, которые не учитывают тепловую предысторию формирования сверхпроводящего состояния.

Выводы

Результаты выполненного анализа показывают, что существует нетривиальная связь между допустимыми потерями и соответствующими перегревами сверхпроводника. Поэтому помимо электродинамического условия устойчивости сверхпроводящего состояния соблюдаются и соответствующие тепловые условия стабильности, описывающие возникновение магнитной неустойчивости в сверхпроводниках при тепловыделениях, превышающих критическое значение. Данный результат принципиально важен, так как он обосновывает применение единой методики нахождения условий возникновения неустойчивостей различной природы, основанной на определении границы стабильных состояний как у низкотемпературных, так и у высокотемпературных сверхпроводящих материалов. Она позволяет сближать предельные переходы к известным условиям устойчивости сверхпроводящего состояния, полученным в рамках различных моделей вольт-амперной характеристики сверхпроводников. В результате условия стабильности будут являться прямым следствием превышения соответствующего значения критической энергии, зависящей, в частности, от характера внешнего возмущения (электромагнитного, механического, теплового или их комбинации). Поскольку макроскопическая электродинамика сверхпроводников развита, как правило, в изотермическом приближении, то полученные результаты важны для описания процессов, происходящих в неинтенсивно охлаждаемых сверхпроводящих магнитных системах с массивными токонесущими элементами, находящимися в быстро изменяющихся магнитных полях или несущими переменный ток.

Работа выполнена в рамках проекта № 12-08-00261 Российского фонда фундаментальных исследований.

Список литературы

- [1] *Альтов В.А., Зенкевич В.Б., Кремлев М.Г., Сычев В.В.* Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем. М.: Энергоатомиздат, 1984. 312 с.
- [2] *Уилсон М.* Сверхпроводящие магниты. М.: Мир, 1985. 408 с.
- [3] *Гуревич А.В., Миц Р.Г., Рахманов А.Л.* Физика композитных сверхпроводников. М.: Наука, 1987. 240 с.
- [4] *Morton N., Darby M.I.* // *Cryogenics*. 1973. Vol. 13. N 4. P. 232.
- [5] *Darby M.I., Morton N.* // *J. Comp. Phys*. 1973. Vol. 13. N 1. P. 35.
- [6] *Bussiere J.F., LeBlanc M.A.R.* // *J. Appl. Phys*. 1975. Vol. 46. N 1. P. 406.
- [7] *Gijsbertse E.A., van der Klundert L.J.M., van Rij M.L.D.* et al. // *Cryogenics*. 1981. Vol. 21. N 6. P. 419.
- [8] *van der Klundert L.J.M.* // *Cryogenics*. 1992. Vol. 32. N 5. P. 508.
- [9] *Klimenko E.Yu., Martovetsky N.N., Novikov S.I.* // *Proc. of MT-9 Conf. Zurich. Switzerland*, 1985. P. 581.
- [10] *Клименко Е.Ю., Мартовецкий Н.Н., Новиков С.И.* // *Техническая сверхпроводимость в электроэнергетике и электротехнике*. М.: СЭВ, 1986. С. 161.
- [11] *Клименко Е.Ю., Мартовецкий Н.Н., Новиков С.И.* // *Сверхпроводимость: физика, химия, техника*. 1989. Т. 28. № 11. P. 152.
- [12] *Klimenko E.Yu., Martovetsky N.N.* // *IEEE Trans. Magn*. 1992. Vol. 28. N 1. P. 842.
- [13] *Klimenko E.Yu., Martovetsky N.N., Novikov S.I.* // *Proc. of MT-11 Conf. Tsukuba. Japan*, 1989. Vol. 2. P. 1066.
- [14] *Клименко Е.Ю., Козицын В.Е., Мартовецкий Н.Н., Новиков С.И.* // *ДАН СССР*. 1987. Т. 292. № 5. С. 1119.
- [15] *Клименко Е.Ю., Мартовецкий Н.Н., Новиков С.И.* // *ДАН СССР*. 1981. Т. 261. № 6. С. 1350.
- [16] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
- [17] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
- [18] *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
- [19] *Elrod S.A., Miller J.R., Dresner L.* // *Adv. Cryog. Eng*. 1982. Vol. 28. P. 601.
- [20] *Шмидт К.* // *Приборы для научных исследований*. 1979. № 3. С. 62.
- [21] *Keilin V.E., Romanovsky V.R.* // *Cryogenics*. 1982. Vol. 22. N 6. P. 313.
- [22] *Романовский В.Р.* // *ДАН СССР*. 1984. Т. 279. № 4. С. 884.
- [23] *Romanovsky V.R.* // *J. Phys. D. Appl. Phys*. 1985. Vol. 18. P. 121.
- [24] *Клименко Е.Ю., Мартовецкий Н.Н., Новиков С.И.* // *ДАН СССР*. 1985. Т. 282. № 5. P. 1123.
- [25] *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1996. 368 с.