

01

Экранирование низкочастотного электрического поля многослойным круговым диском

© В.Т. Ерофеенко,¹ Г.Ч. Шушкевич²

¹ Белорусский государственный университет,
220050 Минск, Белоруссия

² Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,
230023 Гродно, Белоруссия
e-mail: g_shu@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 13 марта 2012 г. В окончательной редакции 7 августа 2012 г.)

Решена граничная задача с неклассическими граничными условиями, описывающими процесс проникновения низкочастотного электрического поля через многослойный тонкий круговой диск. Решение задачи сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на коэффициент экранирования.

Введение

Источниками электромагнитных полей (ЭМП) являются радио- и телевизионные передающие устройства, системы обычной и сотовой связи, радиотелефоны. Уровень этих полей, созданных технической деятельностью человека, достаточно высок. Все это приводит к ухудшению параметров электромагнитной обстановки, снижению эффективности работы технических средств и обслуживающего персонала [1–3]. Особое влияние на человека оказывают низкочастотные поля, так как биологические функции в большей степени основаны на низкочастотных ритмах. Наиболее эффективным средством снижения уровня ЭМП (электрической и магнитной напряженностей) в окружающей среде является применение активного и пассивного экранирования либо пространства, в котором желательнее снизить уровень ЭМП, либо технических средств, влияние внешнего ЭМП на которые следует исключить [4–7]. В работах [4,8,9] предложена методика расчета низкочастотных электромагнитных полей в случае, когда незамкнутые экраны являются идеально проводящими. В этом случае поле не проникает через стенки экранов. Для экранов же с низкой проводимостью материала поле проникает через стенку оболочки — для моделирования таких процессов используют неклассические граничные условия [10,11].

Постановка задачи

В однородном изотропном пространстве R^3 с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_0, μ_0 расположен плоский экран в виде кругового диска D радиуса a и толщины Δ (рис. 1):

$$D = \left\{ -\frac{\Delta}{2} < z < \frac{\Delta}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

Диск D состоит из плоскопараллельных слоев

$$S_s = \{z_s < z < z_{s+1}, \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$s = 1, \dots, n,$$

где $z_1 = -\Delta/2, z_{n+1} = \Delta/2, \Delta_s = z_{s+1} - z_s$ — толщина s -го слоя, $\Delta = \sum_{s=1}^n \Delta_s$.

Слой S_s выполнен из материала с комплексными электромагнитными параметрами ϵ_s, μ_s .

Электромагнитное поле $\mathbf{E}^{(s)}, \mathbf{H}^{(s)}$ в слое S_s описывается уравнениями Максвелла $\text{rot } \mathbf{E}^{(s)} = i\omega\mu_s \mathbf{H}^{(s)}, \text{rot } \mathbf{H}^{(s)} = -i\omega\epsilon_s \mathbf{E}^{(s)}, \omega$ — круговая частота поля.

В точке O — центр диска D , введем цилиндрические координаты $\{\rho, \varphi, z\}$, разобьем пространство R^3 плоскостью $\Gamma(z=0), \Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_0, \Gamma_0 = \{z=0, \rho \geq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \Gamma_a = \{z=0, 0 \leq \rho < a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ на полупространства $D_1(z < 0), D_2(z > 0)$. Диск D ограничен плоскими круговыми поверхностями $\Gamma^\pm = \{z = \pm\Delta/2, 0 \leq \rho < a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

В полупространстве D_1 в точке $O_1(0, 0, -h), h > \Delta$, расположен источник низкочастотного электрического поля — диполь. Пусть u_0 — электрический потенциал

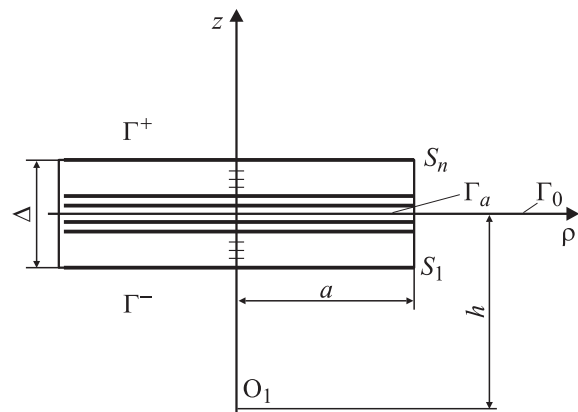


Рис. 1. Геометрия задачи.

диполя, $u_j = u_0 + u'_j$ — суммарный потенциал электрического поля в области D_j , $j = 1, 2$, u'_j — потенциал вторичного электрического поля.

Сформулируем краевую задачу экранирования со специальными граничными условиями на поверхности диска D , моделирующими проникновение электрического поля через экран.

Требуется определить вторичные потенциалы u'_j , $j = 1, 2$, которые удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u'_j = 0$, граничным условиям

$$(u_1 - u_2)|_{\Gamma_0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}(u_1 - u_2)|_{\Gamma_0} = 0, \quad (1)$$

$$u_2|_{\Gamma^+} = u_1|_{\Gamma^-} + V, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_2|_{\Gamma^+} - \frac{\partial}{\partial z}u_1|_{\Gamma^-} = Q_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}u_1|_{\Gamma^-} + Q_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}u_2|_{\Gamma^+}, \quad (3)$$

где

$$Q_1 = \frac{b_{11} - 1}{i\omega\epsilon_0 b_{12}}, \quad Q_2 = \frac{b_{22} - 1}{i\omega\epsilon_0 b_{12}},$$

i — мнимая единица, V — заданная разность потенциалов между внешними плоскостями диска D , и условию на бесконечности

$$u'_j(M) \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2.$$

При постановке задачи (1)–(3) диск рассматривается как конденсатор, на поверхностях которого распределены электрические заряды противоположных знаков, меняющиеся с частотой ω , разность потенциалов V считается заданной. При такой постановке задачи диск также является источником электрического поля.

Граничное условие (3), которое моделирует процесс проникновения электрического поля через экран D , следует из граничного условия [10]

$$\frac{\partial}{\partial z}u_1|_{\Gamma^-} - \frac{\partial}{\partial z}u_2|_{\Gamma^+} = F(Q_1 u_1|_{\Gamma^-} + Q_2 u_2|_{\Gamma^+}),$$

где для гармонической функции u

$$F(u) = (\mathbf{n}, \text{rot}[\mathbf{n}, \text{grad } u]) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_z.$$

Величины b_{mj} ($m, j = 1, 2$) являются элементами квадратной матрицы B размерности два, которая равна

$$B = A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & B_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$A_s = \begin{pmatrix} a_{11}^{(s)} & a_{12}^{(s)} \\ a_{21}^{(s)} & a_{22}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad a_{12}^{(s)} = i\omega\mu_s \frac{\sin(k_s \Delta_s)}{k_s},$$

$$a_{21}^{(s)} = ik_s \frac{\sin(k_s \Delta_s)}{\omega\mu_s},$$

$$a_{11}^{(s)} = \cos(k_s \Delta_s), \quad k_s = \omega\sqrt{\epsilon_s \mu_s}, \quad 0 \leq \arg k_s < \pi, \quad s = 1, \dots, n.$$

Матрица A_s связывает тангенциальные составляющие электромагнитного поля по обе стороны слоя S_s :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_\tau^{(s+1)} \\ \mathbf{H}_v^{(s+1)} \end{pmatrix} = A_s \begin{pmatrix} \mathbf{E}_\tau^{(s)} \\ \mathbf{H}_v^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_v = [\mathbf{H}, \mathbf{n}], \quad s = 1, \dots, n,$$

отсюда итерационно получим соотношение [10]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_\tau^{(n)} \\ \mathbf{H}_v^{(n)} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \mathbf{E}_\tau^{(1)} \\ \mathbf{H}_v^{(2)} \end{pmatrix},$$

которое используется при выводе граничного условия (3).

Учитывая представление $u_j = u_0 + u'_j$, вместо граничных условий (1)–(3) будем использовать граничные условия вида

$$(u'_1 - u'_2)|_{\Gamma_0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}(u'_1 - u'_2)|_{\Gamma_0} = 0, \quad (4)$$

$$u'_2|_{\Gamma^+} + u_0|_{\Gamma^+} = u'_1|_{\Gamma^+} + u_0|_{\Gamma^-} + V, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}u'_2|_{\Gamma^+} + \frac{\partial}{\partial z}u_0|_{\Gamma^+} - \frac{\partial}{\partial z}u'_1|_{\Gamma^+} - \frac{\partial}{\partial z}u_0|_{\Gamma^-} \\ = Q_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}u_1|_{\Gamma^-} + Q_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}u_2|_{\Gamma^+}. \end{aligned} \quad (6)$$

Задача (4)–(6) является модификацией задачи (1)–(3), в которой тонкий диск D заменен на идеально тонкий диск Γ_1 . На ребре $\gamma = \{z = 0, \rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ диска Γ_a требуется выполнение условия конечности электрической энергии в окрестности D_γ ребра γ :

$$\int_{D_\gamma} |\text{grad } u|^2 dV < \infty, \quad u(M) = u_j(M),$$

$$M \in D_j, \quad j = 1, 2.$$

Такая методика моделирования использовалась в работах [12,13] при расчете полей идеально тонких структур с ребром.

Реальные электрические потенциалы и электрические поля определяются формулами

$$V_j = \text{Re}(u_j \exp(-i\omega t)), \quad \mathbf{E}_j = -\text{grad } V_j, \quad j = 1, 2,$$

где t — время.

Выполнение граничных условий

Потенциалы u'_j ($j = 1, 2$) представим в виде суперпозиции цилиндрических решений уравнения Лапласа [4,12,14] так, чтобы выполнялось условие на бесконечности

$$u'_1(\rho, z) = \int_0^\infty x(\lambda) J_0(\lambda\rho) \exp(\lambda z) d\lambda, \quad z < 0, \quad (7)$$

$$u'_2(\rho, z) = \int_0^\infty y(\lambda)J_0(\lambda\rho) \exp(-\lambda z)d\lambda, \quad z > 0, \quad (8)$$

где неизвестные функции $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ подлежат определению из граничных условий, $J_0(x)$ — функция Бесселя [14,15].

Потенциал электрического поля диполя, момент $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$ которого направлен вдоль оси Oz , равен

$$u_0(M) = \mathbf{p} \frac{z+h}{(\rho^2+(z+h)^2)^{3/2}} = \mathbf{p} \frac{1}{r_1^2} P_1(\cos \theta_1),$$

$$\mathbf{p} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0}, \quad (9)$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра [14,15], (r_1, θ_1) — сферические координаты точки M в сферической системе координат с началом в точке O_1 .

Используя табличный интеграл [16], представим потенциал u_0 через цилиндрическую функцию

$$u_0 = \int_0^\infty A_0(\lambda)J_0(\lambda\rho) \exp(-\lambda z)d\lambda,$$

$$A_0(\lambda) = \frac{\lambda p}{4\pi\epsilon_0} e^{-\lambda h}, \quad z > -h. \quad (10)$$

Принимая во внимание представления (7), (8), (10) и выполняя граничные условия (4), (5), получим

$$\int_0^\infty (y(\lambda) - x(\lambda))J_0(\lambda\rho)d\lambda = 0, \quad \rho > a, \quad (11)$$

$$\int_0^\infty \lambda(x(\lambda) + y(\lambda))J_0(\lambda\rho)d\lambda = 0, \quad \rho > a, \quad (12)$$

$$\int_0^\infty (y(\lambda) - x(\lambda))J_0(\lambda\rho)d\lambda = V + u_0|_{z=-\Delta/2} - u_0|_{z=\Delta/2},$$

$$0 \leq \rho < a. \quad (13)$$

Введем в рассмотрение новые функции [16]

$$V(\rho) = \begin{cases} v, & 0 \leq \rho < a, \\ 0, & \rho > a, \end{cases} = \int_0^\infty q_v(\lambda)J_0(\lambda\rho)d\lambda,$$

$$q_v(\lambda) = aVJ_1(\lambda a), \quad (14)$$

$$v_0(\rho) = \begin{cases} u_0|_{z=\Delta/2} - u_0|_{z=-\Delta/2} = \mathbf{p}H(\rho), & 0 \leq \rho < a, \\ 0, & \rho > a, \end{cases} \quad (15)$$

где, согласно представлению (9),

$$H(\rho) = u_0|_{z=\Delta/2} - u_0|_{z=-\Delta/2} = \frac{h + \Delta/2}{(\rho^2 + (h + \Delta/2)^2)^{3/2}} - \frac{h - \Delta/2}{(\rho^2 + (h - \Delta/2)^2)^{3/2}}.$$

Применив к функции $v_0(\rho)$ (15) преобразование Ханкеля, получим

$$q_0(\lambda) = \int_0^\infty v_0(\rho)J_0(\lambda\rho)\rho d\rho = \mathbf{p} \int_0^a H(\rho)J_0(\lambda\rho)\rho d\rho. \quad (16)$$

Применяя обратное преобразование к равенству (16), получим представление функции $v_0(\rho)$ в виде интеграла

$$v_0(\rho) = \int_0^\infty q_0(\lambda)J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda. \quad (17)$$

Два равенства (11), (13) можно записать как одно, учитывая представления (14), (17),

$$\int_0^\infty (y(\lambda) - x(\lambda))J_0(\lambda\rho)d\lambda = \int_0^\infty q(\lambda)J_0(\lambda\rho)d\lambda,$$

$$0 \leq \rho < \infty, \quad (18)$$

где $q(\lambda) = q_v(\lambda) - \lambda q_0(\lambda) = aVJ_1(\lambda a) - \lambda q_0(\lambda)$.

Из представления (18) следует, что

$$x(\lambda) = y(\lambda) - q(\lambda), \quad 0 \leq \lambda < \infty. \quad (19)$$

Далее, удовлетворим граничному условию (6), подставляя интегралы (7), (8), (10) в (6). Получим

$$\int_0^\infty \lambda(x(\lambda) + y(\lambda))J_0(\lambda\rho)d\lambda + \int_0^\infty \lambda^2(Q_1x(\lambda) + Q_2y(\lambda)) \exp\left(\frac{-\lambda\Delta}{2}\right) j_0(\lambda\rho)d\lambda$$

$$+ 2 \int_0^\infty \lambda^2 A_0(\lambda) C\left(\frac{\lambda\Delta}{2}\right) J_0(\lambda\rho)d\lambda$$

$$= 2 \int_0^\infty \lambda A_0(\lambda) \operatorname{sh}\left(\frac{\lambda\Delta}{2}\right) J_0(\lambda\rho)d\lambda, \quad 0 \leq \rho < a, \quad (20)$$

где

$$C(x) = 0.5(Q_1 \exp(x) + Q_2 \exp(-x)).$$

С помощью (19) исключим функцию $x(\lambda)$ в равенствах (12), (20) и получим систему уравнений

$$\int_0^\infty (y(\lambda) - q(\lambda)/2)J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda = \Phi(\rho), \quad 0 \leq \rho < a,$$

$$\int_0^\infty (y(\lambda) - q(\lambda)/2)J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda = 0, \quad a < \rho < \infty, \quad (21)$$

где

$$\Phi(\rho) = \int_0^\infty \left[-\eta^2(Oy(\eta) - 0.5Q_1q(\eta)) \exp\left(\frac{-\eta\Delta}{2}\right) + \eta A_0(\eta) \left(\operatorname{sh}\left(\frac{\eta\Delta}{2}\right) - \eta C\left(\frac{\eta\Delta}{2}\right) \right) \right] J_0(\eta\rho)d\eta,$$

$$Q = 0.5(Q_1 + Q_2). \quad (22)$$

Введем обозначение

$$\Phi_0(\rho) = \begin{cases} \Phi(\rho), & 0 \leq \rho < a, \\ 0, & a < \rho < \infty \end{cases}$$

и запишем уравнения (21) в виде одного уравнения

$$\int_0^{\infty} (y(\lambda) - 0.5q(\lambda)) J_0(\lambda\rho) J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda = \Phi_0(\rho),$$

$$0 \leq \rho < \infty. \quad (23)$$

Применим к (23) обратное преобразование Ханкеля и получим

$$y(\lambda) - 0.5q(\lambda) = \int_0^{\infty} \Phi_0(\rho) J_0(\lambda\rho) \rho d\rho$$

$$= \int_0^a \Phi(\rho) J_0(\lambda\rho) \rho d\rho. \quad (24)$$

Преобразуем (24) — подставим в (24) представление функции $\Phi(\rho)$ из (22), положим, используя табличный интеграл [16],

$$L(\lambda, \eta) = \int_0^2 J_0(\eta\rho) J_0(\lambda\rho) \rho d\rho$$

$$= \frac{a}{\eta^2 - \lambda^2} [\eta J_1(\eta a) J_0(\lambda a) - \lambda J_1(\lambda a) J_0(\eta a)].$$

Тогда из (24) получим

$$y(\lambda) + \int_0^{\infty} \eta \exp\left(\frac{-\eta\Delta}{4}\right) L(\lambda, \eta) \times$$

$$\times \left[Q\eta \exp\left(\frac{-\eta\Delta}{4}\right) y(\eta) - \Psi(\eta) \right] d\eta = 0.5q(\lambda),$$

$$0 \leq \lambda < \infty, \quad (25)$$

где

$$\Psi(\eta) = 0.5Q_1q(\eta)\eta \exp\left(\frac{-\eta\Delta}{4}\right) + A_0(\eta) \left(\frac{\eta\Delta}{4}\right) \left(\operatorname{sh}\left(\frac{\eta\Delta}{2}\right) - \eta C\left(\frac{\eta\Delta}{2}\right)\right).$$

Далее умножим обе части (25) на $Q\lambda \exp(-\lambda\Delta/4)$ и положим

$$z(\lambda) = Q\lambda \exp\left(\frac{-\lambda\Delta}{4}\right) y(\lambda) - \Psi(\lambda),$$

$$K(\lambda, \eta) = Q\lambda\eta \exp\left(\frac{-(\lambda + \eta)\Delta}{4}\right) L(\lambda, \eta),$$

$$G(\lambda) = A_0(\lambda) \exp\left(\frac{\lambda\Delta}{4}\right) \left(\lambda C\left(\frac{\lambda\Delta}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\lambda\Delta}{2}\right)\right) + 0.25(Q_2 - Q_1)\lambda \exp\left(\frac{-\lambda\Delta}{4}\right) q(\lambda).$$

В результате из (25) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$z(\lambda) + \int_0^{\infty} K(\lambda, \eta) z(\eta) d\eta = G(\lambda), \quad 0 \leq \lambda < \infty. \quad (26)$$

Вычисление коэффициента экранирования

Определим коэффициент экранирования электрического поля диском D . Вычислим напряженность вторичного электрического поля в точке $M_0(\rho, z)$, $z > \Delta$:

$$\mathbf{E}_2(\rho, z) = -\operatorname{grad} u_2(\rho, z)$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda (y(\lambda) + A_0(\lambda)) J_1(\lambda\rho) \exp(-\lambda z) d\lambda \mathbf{e}_\rho$$

$$+ \int_0^{\infty} \lambda (y(\lambda) + A_0(\lambda)) J_0(\lambda\rho) \exp(-\lambda z) d\lambda \mathbf{e}_z.$$

Напряженность первичного поля в отсутствие экрана равна

$$\mathbf{E}_0(\rho, z) = -\operatorname{grad} u_0(\rho, z)$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda A_0(\lambda) J_1(\lambda\rho) \exp(-\lambda z) d\lambda \mathbf{e}_\rho$$

$$+ \int_0^{\infty} \lambda A_0(\lambda) J_0(\lambda\rho) \exp(-\lambda z) d\lambda \mathbf{e}_z.$$

Коэффициент экранирования низкочастотного электрического поля диском D вычислим по формуле

$$K_e(\rho, z) = \frac{|\mathbf{E}_2(\rho, z)|}{|\mathbf{E}_0(\rho, z)|}.$$

Если точка $M_0(\rho, z)$ расположена на оси Oz , тогда $\rho = 0$, $J_0(0) = 1$, $J_1(0) = 0$,

$$K_e(0, z) = \left| 1 + \frac{E'_2(z)}{E_0(z)} \right|, \quad (27)$$

где

$$E'_2(z) = \int_0^{\infty} \lambda y(\lambda) \exp(-\lambda z) d\lambda,$$

$$E_0(z) = \int_0^{\infty} \lambda A_0(\lambda) \exp(-\lambda z) d\lambda = 2\bar{p}(h+z)^{-3}.$$

Были проведены вычисления коэффициента экранирования $K_e(0, z)$ по формуле (27) для некоторых параметров задачи.

Рассматривая интеграл на конечном промежутке интегрирования от 0 до A , используя обобщенную квадратурную формулу Симпсона, которая имеет четвертый порядок точности, интегральное уравнение Фредгольма второго рода (26) преобразовано к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида [17]

$$z_n + \sum_{k=0}^N A_k K_{nk} z_k = g_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (29)$$

где $K_{nk} = K(\lambda_n, \lambda_k)$, $g_n = G(\lambda_n)$, $\lambda_n = nh$, $h = A/N$, N — четное число, A_k — весовые коэффициенты, которые вычисляются по формулам

$$A_0 = A_N = \frac{h}{3}, \quad A_{2j} = \frac{2h}{3}, \quad A_{2j+1} = \frac{4h}{3},$$

$$j = 1, 2, \dots, N/2 - 1.$$

Решение системы (29) z_n , $n = 0, 1, \dots, N$, принимается за приближенное решение интегрального уравнения (26) в точках λ_n .

Вычисления показали, что для получения решения системы (29) с точностью 10^{-3} для рассмотренных параметров задачи следует положить $A = 200$, $h = 0.25$.

Функция $E'_2(z)$ через решение системы (29) представляется в виде

$$E'_2(z) = \frac{1}{Q} \int_0^\infty \psi(\lambda) \exp(-\lambda z + \lambda \Delta/4) d\lambda$$

$$+ \frac{1}{Q} \sum_{k=0}^N A_k z_k \exp(-kh(z - \Delta/4)). \quad (30)$$

Несобственный интеграл в (30) вычислялся с точностью 10^{-5} [17].

Численно исследованы экранирующие свойства трехслойного диска с разными параметрами.

На рис. 2 представлены графики $K_e(0, z)$, $z > \Delta$, для параметров $f = 1000$ Hz, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0.05$ m, $h = 1$ m, $a = 0.7$ m, $V = 0.1$ V, $p = 1.1 \cdot 10^{-10}$ C · m, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Hn/m и различных значений ε : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 4\varepsilon_0$ (1), $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 20\varepsilon_0$, $\varepsilon_3 = 50\varepsilon_0$ (2), $\varepsilon_1 = 50\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = 20\varepsilon_0$, $\varepsilon_3 = 4\varepsilon_0$ (3), $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 50\varepsilon_0$ (4), $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

На рис. 3 представлены графики $K_e(0, z)$, $z > \Delta$, для параметров $f = 100$ Hz, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0.01$ m, $h = 0.5$ m, $V = 0$, $p = 1.1 \cdot 10^{-10}$ C · m, $\mu_1 = \mu_3 = \mu_0$, $\mu_2 = 1000\mu_0$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Hn/m, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ и различных значений $\varepsilon_1, \varepsilon_3$: $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = (3.5 + 2.3i)\varepsilon_0$ (1), $\varepsilon_1 = (3.5 + 2.3i)\varepsilon_0$, $\varepsilon_3 = (10.5 + 2.3i)\varepsilon_0$ (2), $\varepsilon_1 = (15.5 + 2.3i)\varepsilon_0$, $\varepsilon_3 = (3.5 + 2.3i)\varepsilon_0$ (3), $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = (15.5 + 2.3i)\varepsilon_0$ (4).

На рис. 4 представлены графики $K_e(0, z)$, $z > \Delta$, для значений V : $V = 1$ V, $V = 0.5$ V, $V = 0.1$ V, $V = 0.01$ V

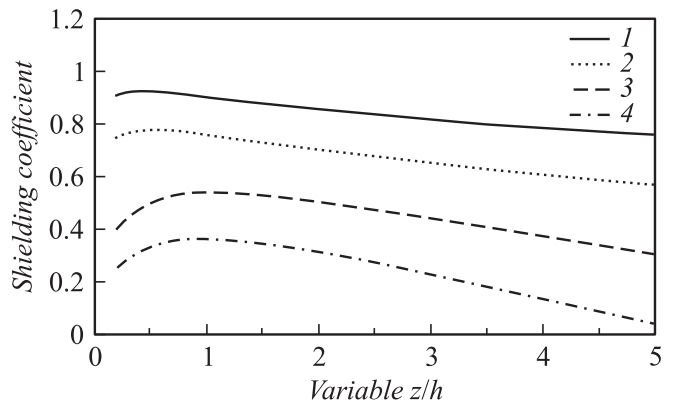


Рис. 2. Графики коэффициентов экранирования $K_e(0, z)$ для некоторых действительных значений ε_s , $s = 1, 2, 3$.

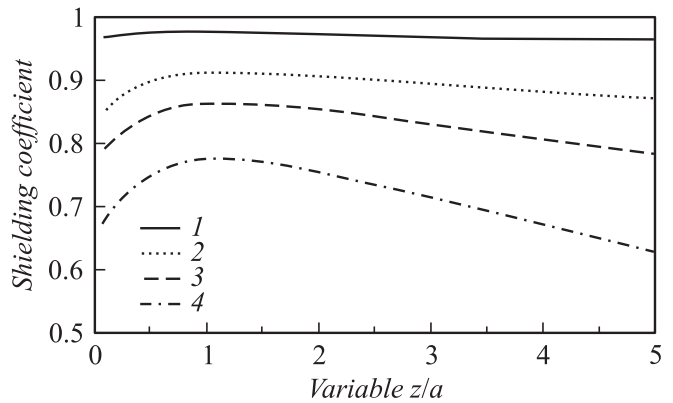


Рис. 3. Графики коэффициентов экранирования $K_e(0, z)$ для некоторых комплексных значений ε_s , $s = 1, 3$.

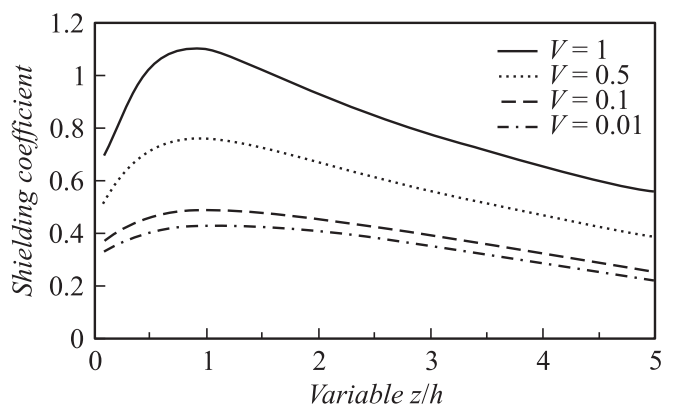


Рис. 4. Графики коэффициентов экранирования $K_e(0, z)$ для некоторых положительных значений V .

и параметров $f = 1000$ Hz, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0.01$ m, $h = 1$ m, $a = 0.9$ m, $p = 1.1 \cdot 10^{-10}$ C · m, $\mu_1 = \mu_3 = \mu_0$, $\mu_2 = 1000\mu_0$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Hn/m, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 100\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$.

Заключение

Предложена методика аналитико-численного решения задачи экранирования низкочастотного электрического поля многослойным диском с использованием двухсторонних граничных условий на поверхности полупрозрачного тонкого диска.

Разработан метод сведения решения поставленной краевой задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Выведена формула для вычисления коэффициента ослабления поля экраном. Проведен вычислительный эксперимент. Расчеты показали, что при увеличении диэлектрической проницаемости диска коэффициент экранирования уменьшается (рис. 2, 3), магнитная проницаемость слоев диска слабо влияет на коэффициент экранирования. Изменение разности потенциалов на внешних плоскостях диска влияет на коэффициент экранирования (рис. 4), поэтому, варьируя разность потенциалов, можно управлять экранированием.

Список литературы

- [1] *Аполлонский С.М., Каляда Т.В., Синдаловский Б.Е.* Безопасность жизнедеятельности человека в электромагнитных полях. СПб.: Политехника, 2006. 263 с.
- [2] *Довгуша В.В., Тихонов М.Н., Довгуша Л.В.* // Экология человека. 2009. № 12. С. 3–9.
- [3] *Ветошкин А.Г.* Защита окружающей среды от энергетических воздействий. М.: Высшая школа, 2010. 383 с.
- [4] *Аполлонский С.М., Ерофеев В.Т.* Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. Минск: Университетское, 1988. 246 с.
- [5] *Apollonskii S.M., Erofeenko V.T., Shushkevich G.Ch.* // Proceedings of St. Petersburg IEEE Chapters. 2003. P. 68–72.
- [6] *Резинкина М.М.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 11. С. 17–24.
- [7] *Шапиро Д.Н.* Электромагнитное экранирование. Долгопрудный: Изд. Дом „Интеллект“, 2010. 120 с.
- [8] *Ерофеев В.Т., Шушкевич Г.Ч.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 3. С. 10–15.
- [9] *Shushkevich G.Ch.* // Computer Algebra Systems in Teaching and Research: Proc. 4-th Intern. Workshop, CASTR 2007. 2007. P. 287–296.
- [10] *Ерофеев В.Т., Козловская И.С.* Аналитическое моделирование в электродинамике. Минск: БГУ, 2010. 303 с.
- [11] *Ерофеев В.Т., Козловская И.С., Шушкевич Г.Ч.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 9. С. 8–15.
- [12] *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
- [13] *Лебедев Н.Н., Скальская И.П.* // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 12. С. 2325–2331.
- [14] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.–Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.
- [15] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 840 с.
- [16] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
- [17] *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 848 с.