

01  
**Моды шепчущей галереи в неидеальных дисковых резонаторах**

© А.А. Донцов, А.М. Монахов, Н.С. Аверкиев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе  
 194021 Санкт-Петербург, Россия  
 e-mail: operatorne@yandex.ru, amon@les.ioffe.ru, averkiev@les.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 4 сентября 2012 г.)

Рассмотрена задача о модах шепчущей галереи резонаторов, имеющих форму кругового сегмента, близкого к диску или полудиску. Расчеты производились методами теории возмущений.

Резонаторы на модах шепчущей галереи (WGM от английского Whispering gallery mods), активно исследуются два последних десятилетия [1–3]. Недавно сообщалось [4] о полудисковых WGM-лазерах, излучающих в среднем ИК диапазоне.

При изготовлении дисковых и полудисковых резонаторов имеют место отклонения формы резонатора от идеальной. Так, при изготовлении полудискового лазера скол, как правило, не проходит точно через центр диска. На боковых поверхностях дисковых резонаторов возможно появление мелких сколов (рис. 1, *a, b*). Целью настоящей работы является изучение влияния небольших ( $\alpha \approx \frac{\Delta R}{R} \ll 1$ ) дефектов на модовую структуру соответствующего резонатора.

Как известно [6], решение уравнений Максвелла в цилиндрической области общего вида (не обязательно в круговом цилиндре) с идеально проводящими стенками сводится к решению двумерного уравнения для проекции напряженности электрического (ТМ-мода) или магнитного (ТЕ-мода) векторов напряженности на ось цилиндра. Уравнение для соответствующей компоненты имеет вид

$$\Delta\phi + k^2\phi = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями  $\phi = 0$  для ТМ-моды и  $\partial\psi/\partial n$  для ТЕ-моды. В общем случае в уравнение входит показатель преломления среды  $n_e \neq 1$  и необходимо положить  $k^2 \rightarrow n_e^2 k^2$ , но мы выберем скорость света так, что  $c/n_c = 1$ .

Следует помнить, что величины  $k$  и  $\lambda = 2\pi/k$  относятся к двумерной задаче. Полный же квадрат волнового

числа в трехмерном пространстве состоит из двух слагаемых  $k_p^2 = k_z^2 + k^2$ .

Как будет показано ниже, величины  $k$  для WG-мод неидеальных резонаторов имеют вид

$$k = k_0(1 + \delta), \tag{2}$$

где  $k_0$  — невозмущенное поперечное волновое число, а  $\delta$  — малая безразмерная величина, слабо зависящая от номера моды. Поэтому для „возмущенного“ полного волнового числа  $k'_p$  следует использовать формулу  $k'_p = k_{p0}(1 + \frac{k_0^2 \delta}{k_{p0}^2})$ , где  $k_{p0}$  — невозмущенное полное волновое число.

Рассмотрим случай полудискового резонатора, изображенного на рис. 1, *a*. Систему единиц всегда можно выбрать так, чтобы радиус диска  $R = 1$ . Введем цилиндрические координаты  $(r, \varphi)$ . Координаты выбраны так, что прямая часть границы полудиска соответствует углам  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ . Тогда решением задачи (1) для полудиска единичного радиуса будет

$$\begin{aligned} \phi_{m,n} &= A_{m,n} J_m(p_{m,n} r) \sin(m\varphi), \\ k_{m,n} &= p_{m,n}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $J_m$  — функция Бесселя  $m$ -го порядка,  $p_{m,n}$  —  $n$ -й нуль функции Бесселя  $m$ -го порядка, а  $m$  — натуральное число. Коэффициент  $A_{m,n}$  выбран так, чтобы  $\int_A |\phi_{m,n}|^2 dS = 1$ , где интегрирование производится по всему полудиску. Отсюда получим

$$A_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} \int_0^1 J_m(p_{m,n} r)^2 r dr}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4} |J_{m-1}(p_{m,n})|^2}}$$

При  $m \gg 1$  и  $n \ll m$  функция Бесселя существенно отличается от нуля только при  $r \approx 1$ . То есть решение (3) сосредоточено вблизи границы полудиска. Такие моды будут модами шепчущей галереи для этого резонатора.

Решение (1) для области на рис. 1, *a* можно получить конформным отображением указанной области на полукруговую. Если функция  $w(z)$  ( $z = x + iy$ ) осуществляет такое преобразование, то уравнение (1) запишется в виде

$$\Delta\psi = -k^2 \cdot \psi \cdot \left| \frac{dw}{dz} \right|^2. \tag{4}$$

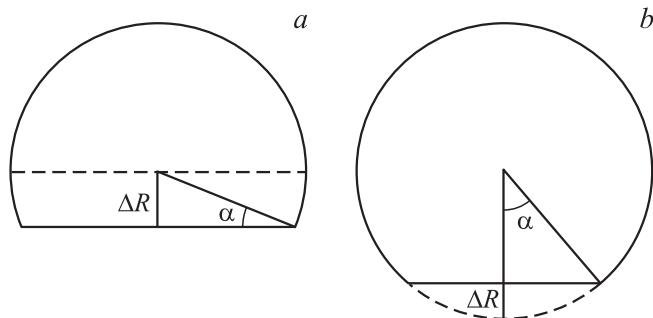


Рис. 1. Рассматриваемые неидеальные области, близкие к полудиску (*a*) и диску (*b*).

Здесь оператор  $\Delta$ , функция  $|\frac{dw}{dz}|^2$  и функция  $\psi$  рассматриваются в координатах для области полудиска. Если область на рис. 1, *a* близка к полудиску, то существует близкое к тривиальному преобразование  $w(z) \approx z + \alpha g(z)$  с малым постоянным параметром  $\alpha$ . Тогда  $|\frac{dw}{dz}|^2 \approx 1 + \alpha f(z)$ . Таким образом, с точностью до членов первого порядка малости по  $\alpha$  уравнение (4) имеет вид

$$\Delta\psi + k^2\psi = -\alpha k^2\psi f. \quad (5)$$

Это уравнение с малой правой частью для простой области полудиска с прежними граничными условиями  $\psi = 0$ . Для нее в случае  $\alpha = 0$  решения  $\phi_{m,n}$  известны. Для (5) можно использовать стандартную теорию возмущений [7], из которой следует, что с точностью до членов первого порядка малости по  $\alpha$

$$k^2 = k_{m,n}^2 \left( 1 - \alpha \int_A f \cdot \phi_{m,n} \cdot \phi_{m,n}^* dS \right). \quad (6)$$

В нашем случае отображение формы рис. 1, *a* на полукруг можно произвести функцией

$$z = \frac{\left(\frac{b+\omega}{b-\omega}\right)^{\pi/2\lambda} - 1}{\left(\frac{b+\omega}{b-\omega}\right)^{\pi/2\lambda} + 1}. \quad (7)$$

Здесь  $\lambda = 2 \arctg\left(\frac{1+\sin\alpha}{b}\right)$  и  $b = \cos\alpha$ . Разложив функцию (7) в ряд с точностью до первого порядка малости по  $\alpha$ , получим  $w = z + \frac{\alpha}{\pi} \left(1 - z^2\right) \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ .

Тогда  $f(r, \varphi)$  в выражении (5) примет вид

$$f(r, \varphi) = \frac{2}{\pi} \left[ 2 - r \cos(\varphi) \cdot \ln\left(\frac{1 + 2r \cos(\varphi) + r^2}{1 - 2r \cos(\varphi) + r^2}\right) + 2r \sin(\varphi) \cdot \arctg\left(\frac{2r \sin(\varphi)}{1 - r^2}\right) \right].$$

Интеграл в выражении (6) равен

$$\int_A f \cdot \phi_{m,n} \cdot \bar{\phi}_{m,n} dS = \int_0^1 \int_0^\pi A_{m,n}^2 J_m^2(p_{m,n} r)^2 \sin^2(m\varphi)^2 f(r, \varphi) r d\varphi dr. \quad (8)$$

Поскольку  $\sin(m\varphi)^2 = \frac{1 - \cos(2m\varphi)}{2}$ , а при больших  $m$  функция  $\cos(2m\varphi)$  быстро осциллирует по сравнению с медленно меняющейся  $f(r, \varphi)$ , то при интегрировании по углу слагаемым  $\cos(2m\varphi)$  можно пренебречь, оставляя только 1/2. Интеграл (8) тогда равен  $4/\pi$ . Подставив этот результат в (6), получим конечную формулу для волнового числа данной моды (в обычных единицах измерения)

$$k = k_0(1 + \delta), \quad \delta = -\alpha \frac{2}{\pi}, \quad (9)$$

где  $k_0 = \frac{p_{m,n}}{n_c R}$  — невозмущенное волновое число данной моды, а  $n_c$  — показатель преломления.

Таблица 1. Неидеальный полудиск

$\Delta R/\lambda$	$\Delta R$	$k_f^2$	$k_c^2$	$\frac{k_c^2 - k_f^2}{k_c^2}, \%$
1.7	0.1	$1.03 \cdot 10^4$	$1.04 \cdot 10^4$	1
2.1	0.12	$1.00 \cdot 10^4$	$1.02 \cdot 10^4$	2
2.4	0.14	$9.73 \cdot 10^3$	$9.97 \cdot 10^3$	2.4
2.8	0.16	$9.43 \cdot 10^3$	$9.74 \cdot 10^3$	3.3
3.1	0.18	$9.13 \cdot 10^3$	$9.52 \cdot 10^3$	4
3.5	0.2	$8.82 \cdot 10^3$	$9.30 \cdot 10^3$	5
3.8	0.22	$8.52 \cdot 10^3$	$9.10 \cdot 10^3$	6.3
4	0.24	$8.22 \cdot 10^3$	$8.90 \cdot 10^3$	7.6
4.5	0.26	$7.92 \cdot 10^3$	$8.71 \cdot 10^3$	9

Примечание. Результат, полученный численным решением задачи на компьютере ( $k_c^2$ ) и по формуле (9) ( $k_f^2$ ) при различных  $\Delta R = \alpha$ . Радиус диска  $R = 1$ ,  $m = 100$ , невозмущенное значение  $k_0^2 = 1.18 \cdot 10^4$ . Величина  $\frac{\Delta R}{\lambda}$  — отношение размера дефекта к длине волны.

ТЕ-моды волновода соответствует задача с однородными граничными условиями Неймана  $\frac{\delta\phi}{\delta n} = 0$ . Рассуждения, полностью аналогичные рассуждениям для ТМ-моды, дадут выражение, полностью повторяющее (9) с отличием в выражении для невозмущенного волнового числа  $\frac{\eta_{m,n}}{n_c R}$ , где  $\eta_{m,n}$  —  $n$ -й нуль производной функции Бесселя  $m$ -го порядка.

При  $m \rightarrow \infty$  собственные числа мод шепчущей галереи можно рассчитать из условия кратности набега фаз числу  $\pi$ , т.е.  $kn_c(\pi + 2\alpha)R = m\pi$  или

$$k = \frac{m}{n_c R} \left( 1 - \alpha \frac{2}{\pi} \right). \quad (10)$$

В выражении (9) при  $m \rightarrow \infty$  будет  $p_{m,n} \approx m$ , и выражения (10) и (9) совпадут. Таким образом, формула (9) подтверждается в предельном случае.

В табл. 1 проведено сравнение результатов формулы (9) и численного компьютерного расчета. Из нее видно, что даже для сравнительно небольшого  $m = 100$  формула (9) при  $\Delta R = \alpha = 0.26$  дает погрешность в 10%, что подтверждает применимость (9) и при сравнительно сильных неидеальностях.

Перейдем теперь к другой, похожей внешне задаче — в качестве невозмущенной области рассмотрим диск, а в качестве возмущенной — диск с малым сколом (рис. 1, *b*). Малый угол  $\alpha$  связан с малым дефектом по радиусу  $\frac{\Delta R}{R} \ll 1$  формулой  $\frac{\Delta R}{R} = 1 - \cos(\alpha) \approx \frac{\alpha^2}{2}$ .

Для этой задачи метод конформных отображений применим плохо, поскольку конформное отображение качественно изменяет форму круга и из-за этого сингулярно. Поэтому для второй задачи мы применим метод граничных возмущений [7].

Известно, что любое решение  $\psi(r)$  с собственным числом  $k$  уравнения (1) для возмущенной области (лежащей внутри невозмущенной) с граничными условиями  $\psi(r) = 0$  удовлетворяет внутри этой области точному

интегральному уравнению

$$\psi(r) = \sum_q \phi_q(r) \oint_{S_0} \frac{\phi_q^*(r_0) \frac{\delta\psi(r_0)}{\delta n_0}}{k_q^2 - k^2} dl_0, \quad (11)$$

где функции  $\phi_q(r)$  с волновыми числами  $k_q$  — решения для невозмущенной области. Если при этом возмущение мало, то  $k \approx k_q$  для некоторого  $q$ . Интегрирование и дифференцирование в данном выражении производятся по координатам  $r_0$ , а  $\mathbf{n}_0(r_0)$  — нормаль к поверхности возмущенной области в точке  $r_0$ . Интегрирование производится по контуру — границе возмущенной области.

В нашем случае моды  $\phi_q$  дважды вырождены, т.е. невозмущенному значению  $k_q$  соответствуют две ортогональные моды, поэтому приближение для  $\psi$  ищется в виде  $\psi(r) = a_1\phi_1(r) + a_2\phi_2(r)$ . Умножив полученное выражение на  $\phi_j^*$  ( $j = 1, 2$ ) и проинтегрировав по невозмущенной области, получим из ортогональности мод систему однородных алгебраических уравнений, решение которой существует при равенстве нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} V_{1,1} + k^2 - k_0^2 & V_{1,2} \\ V_{2,1} & V_{2,2} + k^2 - k_0^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (12)$$

где

$$V_{i,j} = \oint \phi_i^*(r_0) \frac{\delta\phi_j(r_0)}{\delta n_0} dl_0. \quad (13)$$

Решением задачи (1) для диска единичного радиуса с однородными граничными условиями  $\phi = 0$  являются функции

$$\phi_{m,n} = B_{m,n} J_m(p_{m,n}r) e^{\pm im\varphi} \quad k_{m,n} = p_{m,n}.$$

При этом одному значению  $k_{m,n}$  отвечают две ортогональные моды с показателями степени  $\pm im\varphi$ . Примем, как и в предыдущем примере,  $\int_A |\phi_{m,n}|^2 dS = 1$ . Тогда

$$B_{m,n} = A_{m,n}/2.$$

При вычислении матричных элементов (13) необходимо вести интегрирование лишь по возмущенным участкам границы, поскольку на невозмущенных выполняется  $\phi_j = 0$ . Тогда

$$V_{1,1} = V_{2,2} = \int_{-\alpha}^{\alpha} B_{m,n}^2 J_m(p_{m,n}r) \left[ J'_m(p_{m,n}r) \cos(\varphi) p_{m,n} + \frac{im \sin(\varphi) J_m(p_{m,n}r)}{r} \right] \frac{\cos(\alpha)}{\cos^2(\varphi)} d\varphi, \quad (14)$$

где  $J'_m(p_{m,n}r) = \frac{dJ_m(x)}{dx} \Big|_{x=p_{m,n}r}$ . При интегрировании по границе следует положить  $r = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\varphi)}$ .

Для  $V_{1,2} = V_{2,1}^*$  в выражении (14) под знаком интеграла появится множитель  $e^{\pm i2m\varphi}$ . Разложив  $J_m(p_{m,n}r)$  в ряд возле значения  $r = 1$  с точностью до третьего порядка

малости по  $\alpha$  (полагая, что  $m\alpha$  произвольно, а не мало), получим из (12) конечную формулу для  $\delta$  из (2)

$$\delta^{\pm} = \frac{\alpha^3}{3\pi} \pm \frac{\Delta}{2}, \quad (15)$$

где

$$\Delta = (k^+ - k^-)/k_0 = \frac{1}{2\pi m^2} \left( \alpha \cos(2m\alpha) - \frac{\sin(2m\alpha)}{2m} \right)$$

определяет расщепление волновых чисел.

В выражение (15) не входят функция Бесселя и ее производные, поскольку их оказывается возможным исключить после интегрирования при помощи точной формулы  $J_{m-1}(p_{m,n}) = J'_m(p_{m,n})$ .

Следует подчеркнуть, что мы нигде не вводили ограничений на  $m$  или  $n$ , поэтому формула (15) применима для любой моды, для которой справедливо приближение  $\psi(r) = a_1\phi_1(r) + a_2\phi_2(r)$ . В частности, для мод шепчущей галереи физический смысл такого приближения в том, что мощность WG-моды возмущенного резонатора остается распределенной вблизи стенок резонатора.

Аналогичные рассуждения можно провести для ТЕ-моды. При этом в ходе рассуждений все промежуточные выражения отличаются из-за отличия граничных условий, однако после интегрирования и упрощений мы вновь получим формулу (15) с единственным отличием — для ТЕ невозмущенное волновое число вырожденных мод  $k_0 = \frac{\eta_{m,n}}{n_c R}$ , где  $\eta_{m,n}$  —  $n$ -й нуль производной функции Бесселя  $m$ -го порядка. При вычислении использована точная формула  $J''_m(\eta_{m,n}) = (\frac{m^2}{\eta_{m,n}^2} - 1)J_m(\eta_{m,n})$ .

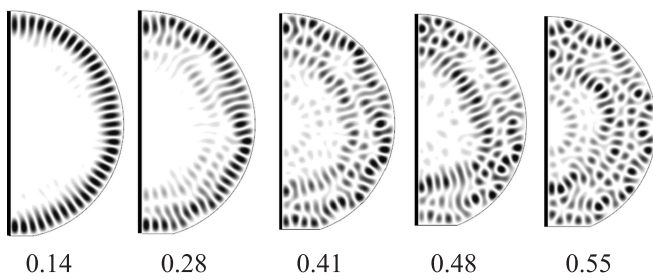
При возрастании расщепление  $\Delta$  начинает осциллировать с частотой  $2m$  вокруг нуля, возрастая по амплитуде. Огибающую легко найти  $|\Delta|_{\max} = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha}{m^2}$ . Отсюда видно, что максимальное расщепление медленно увеличивается с ростом  $\alpha$  и быстро уменьшается с ростом  $m$ , поэтому  $\Delta$  для WG-мод ( $m \gg 1$ ) вряд ли может быть получено прямым измерением спектра, однако в некоторых случаях можно измерить расщепление, пропустив излучение через нелинейную среду и измерив разностную частоту.

В табл. 2 сравниваются результаты формулы (15) и численного расчета на компьютере. Для дисковой формы резонатора характерно очень сильное искажение поля

Таблица 2. Неидеальный диск

$\Delta R/\lambda$	$\Delta R$	$k_f^2$	$k_c^2$	$\frac{k_c^2 - k_f^2}{k_c^2}, \%$
0.55	0.1	$1.251 \cdot 10^3$	$1.253 \cdot 10^3$	0.2
0.67	0.12	$1.258 \cdot 10^4$	$1.257 \cdot 10^4$	0.1
0.78	0.14	$1.266 \cdot 10^3$	$1.264 \cdot 10^3$	0.2
0.83	0.15	$1.274 \cdot 10^3$	$1.266 \cdot 10^3$	0.6

Примечание. Обозначения повторяют табл. 1. Радиус диска  $R = 1$ , номер невозмущенной моды  $m = 29$ , значение невозмущенного поперечного собственного числа  $k_0^2 = 1.227 \cdot 10^3$ . Собственные числа получены для трех размеров дефектов, при которых поле моды качественно еще можно отнести к модам шепчущей галереи.



**Рис. 2.** Распределение величины модуля проекции на ось  $z$  вектора электрического поля ( $|E_z|$ ) для ТМ-моды ( $m = 37$ ,  $n = 1$ ), полученное численным расчетом при различных значениях размера дефекта  $\frac{\Delta R}{\lambda}$  (указан под каждой из структур). Более темные участки соответствуют большей величине поля. Изображены только половины возмущенных дисков, жирной линией обозначены линии симметрии.

моды при небольших дефектах. При этом формула (15) дает хорошее приближение для собственных чисел даже для сильно искаженных полей, хотя само понятие моды шепчущей галереи к таким модам может оказаться неприменимо. На рис. 2 показано, насколько сильно поле меняется при малых по сравнению с длиной волны деформациях.

В заключение отметим, что в работе проведен расчет спектров WG-мод для резонаторов полудисковой (9) и дисковой (15) форм, возмущенных специальным образом. Формулы получены в первом приближении.

Сдвиг моды для полудиска линейно зависит от величины возмущения, а величина рассмотренного возмущения может быть больше длины волны. Поле, как показывает компьютерный расчет, тоже устойчиво к возмущению и остается распределено вдоль стенок. Поэтому WG-моды высокого порядка устойчивы к указанному возмущению.

Для резонатора дисковой формы спектр зависит от линейных размеров возмущения слабее. Однако поле WG-мод такого резонатора гораздо сильнее зависит от рассмотренной неидеальности. Если возмущение больше, чем половина длины волны, то поле WG-моды оказывается сильно искажено и перераспределяется по объему резонатора. Кроме того, сколь угодно слабое возмущение границы снимает вырождение мод, поэтому бегущие волны, существующие в идеальном диске, переходят в две близкие по спектру стоячие волны, и экспериментально наблюдать бегущие волны трудно.

Работа частично поддержана грантами РФФИ, Министерством образования и науки Российской Федерации (договор 11.G34.31.0001 с СПбГПУ и ведущим ученым Г.Г. Павловым, ГК 14.740.11.0892, ГК 11705.004.11.001), Грантом президента РФ НШ-5442.2012.2.

## Список литературы

- [1] Frateschi N.C., Levi A.F. J. // Appl. Phys. Lett. 1995. Vol. 66. P. 2932–2934.
- [2] Wang R.P., Dumitrescu M. // J. Appl. Phys. 1997. Vol. 81. P. 3391–3397.
- [3] Murugan G.S., Panitchob Y., Tull E.J., Bartlett P.N., Howak D.W., Zervas M.N., Wilkinson J.S. // J. Appl. Phys. 2010. Vol. 107. P. 053 105.
- [4] Monakhov A.M., Sherstnev V.V., Astakhova A.P., Yakovlev Yu.P., Boissier G., Teissier R., Baranov A.N. // Appl. Phys. Lett. Vol. 94. N 5. P. 051 102.
- [5] Аверкиев Н.С., Шерстнев В.В., Монахов А.М., Гребенщикова Е.А., Кислякова А.Ю., Яковлев Ю.П., Кривер А., Wright D.A. // ФНТ. Т. 33. С. 378–387.
- [6] Федоров Н.Н. Основы электродинамики. М.: Высшая школа, 1980. С. 120.
- [7] Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностранной литературы. 1959. 887 с.