Журнал технической физики, 2013, том 83, вып. 10

01

Особенности пространственной локализации временного шума при его индексации в соответствии с двумерным преобразованием Адамара

© Б.Г. Подласкин, Е.Г Гук, А.А. Сухарев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: bgp.holo@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 29 января 2013 г.)

Показано, что двумерная индексация одномерного шума канала связи, осуществляемая при применении двумерного преобразования Адамара, позволяет отобразить распределение этого шума в пространстве восстановленного изображения в виде двумерного распределения его дисперсии. При этом ширина распределения дисперсии шума зависит от степени сохранения корреляционных связей между элементами одномерного шума канала связи. Показано, что степень двумерной пространственной локализации шума в этом случае превышает степень локализации шума при использовании одномерного преобразования Адамара.

Введение

Преобразование Адамара в настоящее время широко используется при цифровой обработке сигналов. В частности, быстрая сходимость спектров в базисе Уолша–Адамара делает его особенно удобным при проведении операций кодирования и сжатия изображений за счет отсечения слабоэнергетических компонентов спектра [1–4]. При этом операция спектрального сжатия сигналов инвариантна к методу упорядочивания базисных функций Уолша в матрице Адамара при тождественности прямого и обратного преобразований.

Однако при рассмотрении задачи пространственной локализации шумов канала связи в пространстве восстановленного изображения следует учитывать, что аддитивный шум канала связи подвергается только обратному интегральному преобразованию, так что форма спектра шума непосредственно зависит от метода упорядочивания базисных функций и (или) от оператора L, задающего порядок передачи спектральных коэффициентов.

В работах [5,6] проведен анализ распределения шума в пространстве выходного изображения при передаче сигнала с использованием одномерного преобразования Адамара при различных формах упорядочивания базиса и построчной (постолбцовой) последовательности передачи спектральных коэффициентов. Показано, что в этом случае способ упорядочивания матрицы Адамара (по Пэли, по Уолшу, по нарастанию или убыванию значения секвенты) непосредственно влияет на форму изображения спектра шума. При этом расчетные распределения дисперсии шума и распределения модельного шума приобретают ярко выраженный строчный или столбцовый характер в зависимости от оператора развертки L.

В работе [7] было исследовано двойное ортогональное преобразование Адамара, при использовании которого распределения дисперсии и модельного шума принимают псевдодвумерный характер, что приводит к повышению степени локализации шума при соответствующей нормировке его мощности. При этом следует учитывать, что для реализации двойного преобразования необходима двукратная передача сигнала.

Поскольку изображение представляет собой двумерный по своей природе объект со своими статистическими и корреляционными свойствами, операция сжатия более эффективна при использовании над ним двумерного преобразования Адамара, что естественным образом предполагает проведение двумерного преобразования и над шумом канала связи.

Целью настоящей работы является исследование пространственной локализации временного шума канала связи при двумерном преобразовании в зависимости от спектральной характеристики шума, способа упорядочивания матрицы Адамара и порядка передачи элементов сигнала.

Представление одномерного случайного процесса в двумерном базисе Адамара

Функции Уолша образуют базис одномерного преобразования Адамара [8]. Как известно, в случае двумерного преобразования Адамара используются два набора функций Уолша, зависящих соответственно от двух разных переменных. Прямое перемножение каждой функции из первого набора на каждую функцию из второго образует двумерный базис преобразования. Процедура обработки сигнала в случае двумерного преобразования аналогична процедуре с одномерным дискретным преобразованием. Двумерное преобразование Адамара, осуществленное над изображением перед передачей сигнала в канал связи, формирует двумерный спектр изображения в базисе преобразования. Элементы этого спектра последовательно передаются по каналу связи в порядке, определяемом оператором развертки L. На приемном устройстве принятая последовательность сигналов подвергается воздействию обратного оператора L^{-1}, в результате чего восстанавливается исходное расположение спектральных коэффициентов в пространстве двумерного изображения, над которыми и производится обратное двумерное преобразование, восстанавливающее исходное изображение. Поскольку в процессе передачи по каналу связи спектральные коэффициенты изображения подвергаются воздействию аддитивного шума канала, восстановленное изображение представляет собой сумму исходного изображения и изображения спектра шума, представленного в базисе двумерного обратного преобразования Адамара.

Шум в последовательном канале связи представляет собой одномерный случайный процесс во времени, описываемый временной корреляционной функцией. В процессе передачи сигнала временным отсчетам шума сопоставляются пространственные индексы передаваемых элементов спектра изображения, последовательность которых определяется оператором L, в результате чего набору шумовых отсчетов придается двумерный характер.

При этом распределение шума в пространстве выходного изображения непосредственно зависит от того, как временной интервал корреляции шума отображается в виде расстояний между его элементами в пространстве восстановленного изображения. Таким образом, порядок нумерации элементов временного шума становится непосредственной функцией порядка передачи спектральных коэффициентов изображения по каналу связи, и выбор этого порядка определяет корреляционную близость элементов шума в пространстве выходного изображения.

В настоящей работе рассмотрены основные закономерности распределения дисперсии шума в двумерном пространстве выходного изображения в зависимости от вида оператора L, определяющего пространственную расстановку элементов шума.

Расчет распределения дисперсии аддитивного шума в пространстве выходного изображения

Будем считать, что для передачи по каналу связи предъявлено двумерное дискретное изображение в виде матрицы размерностью $(n \times n)$, которую в дальнейшем будем понимать как сигнал. Пусть перед передачей по каналу связи этот сигнал подвергается предварительному двумерному преобразованию Адамара, задаваемому серией из $n \times n$ матриц размерности $(n \times n)$. Полученные трансформанты представляют собой матрицу S размерности $(n \times n)$, которая подвергается действию оператора развертки L. В канале на сигнал, представляющий собой последовательность элементов матрицы трансформант S, воздействует аддитивный шум $\psi(t)$, отсчеты которого ψ_{km} проиндексированы в процессе передачи в соответствии с формой оператора L. На выходе канала принятый сигнал подвергается обратному преобразованию. В результате обратного преобразования распределение дисперсии шума выражается следующим образом:

$$\sigma^2(\Phi_{i,j}) = \sigma^2\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{k,m}^{i,j} \cdot \psi_{k,m}\right), \tag{1}$$

где $h_{k,m}^{i,j}$ — k, m-й элемент i, j-й матрицы Адамара, $\psi_{k,m}$ — значение шума, приходящегося на k, m-й элемент восстановленной матрицы трансформант, полученной после действия оператора L^{-1}, а $\Phi_{i,j}$ — значение шума, приходящегося на i, j-й элемент матрицы сигнала после обратного преобразования Адамара.

Пользуясь свойствами дисперсии, можно записать:

$$\sigma^2(\Phi_{i,j}) = E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{k,m}^{i,j} \cdot \psi_{k,m} - E\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{k,m}^{i,j} \cdot \psi_{k,m}\right)\right)^2\right], \tag{2}$$

где E - математическое ожидание.

Будем считать, что шум канала представляет собой стационарный случайный процесс с нулевым средним, для которого $E(\psi) = 0$. Тогда

$$\sigma^2(\Phi_{i,j}) = E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{k,m}^{i,j} \cdot \psi_{k,m}\right)^2\right] = E\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{k,m}^{i,j} \cdot \psi_{k,m} \cdot \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{m_1=1}^{n} h_{k_1,m_1}^{i,j} \cdot \psi_{k_1,m_1}\right) \tag{3}$$

или:

$$\sigma^2(\Phi_{i,j}) = E\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{m_1=1}^{n} h_{k,m}^{i,j} \cdot h_{k_1,m_1}^{i,j} \cdot \psi_{k,m} \cdot \psi_{k_1,m_1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{m_1=1}^{n} h_{k,m}^{i,j} \cdot h_{k_1,m_1}^{i,j} \cdot E\left(\psi_{k,m} \cdot \psi_{k_1,m_1}\right). \tag{4}$$

Под воздействием оператора L^{-1} шумовые отсчеты, представляющие собой одномерный вектор, восстанавливаются в виде двумерной матрицы трансформант S^1. Этот переход осуществляется в соответствии с нумерацией шумовых отсчетов, которая определена оператором L. При этом переходе корреляционные расстояния между элементами шума изменяются, что требует введения функции $\lambda(k, m, k_1, m_1)$, учитывающей корреляционные расстояния между элементами шума $\psi(t)$ в

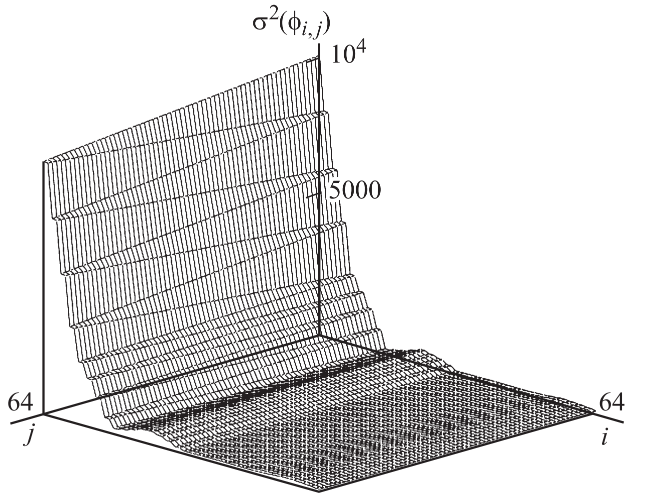

Рис. 1. Расчетное распределение дисперсии шума в пространстве выходного изображения в случае использования оператора построчной развертки при передаче сигнала с использованием двумерного преобразования Адамара.

соответствии с их индексацией и порядком передачи трансформант. Тогда выражение (4) принимает вид

$$\sigma^2(\Phi_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{m_1=1}^{n} h_{k,m}^{i,j}\cdot h_{k_1,m_1}^{i,j}\cdot K_\psi\big(\lambda(k,m,k_1,m_1)\big), \tag{5}$$

где K_ψ является выборкой временной корреляционной функции шума в моменты времени, отстоящие друг от друга на интервалы, соответствующие интервалу передачи одного элемента спектра сигнала (одной трансформанты). Если оператор L^{-1} разрушает корреляционные связи между элементами шума, помещая их в пространстве выходного изображения на расстоянии, большем расстояния корреляции, то шум распределяется по изображению равномерно. Если же в какой-то области выходного изображения корреляционные связи между элементами шума сохраняются, то в этой области происходит локализация шума.

Наиболее часто используемым в подобных задачах оператором L является оператор построчной развертки. На рис. 1 приведено рассчитанное распределение дисперсии шума в пространстве выходного изображения при передаче с использованием двумерного преобразования Адамара, базис которого упорядочен по возрастанию секвенты, и использовании оператора построчной развертки в качестве оператора L.

Из рис. 1 видно, что форма локализации шума при использовании двумерного преобразования Адамара идентична по своей форме случаю, при котором локализация шума производится с помощью одномерного преобразования [5]. Это объясняется тем, что при построчной развертке элементов пространства изображения корреляционные связи сохраняются только по одной из координат, т. е. между элементами строк. Корреляционные расстояния между соседними элементами столбцов в данном случае превышают интервал корреляции, определяемый дисперсией шума канала, в результате чего степень корреляции между элементами шума вдоль столбцов ничтожно мала по сравнению со степенью корреляции вдоль элементов строк.

В связи с этим предметом дальнейших исследований должен стать поиск оператора L, который при выбранном способе упорядочивания базиса преобразования максимально сохраняет корреляционную близость шу-

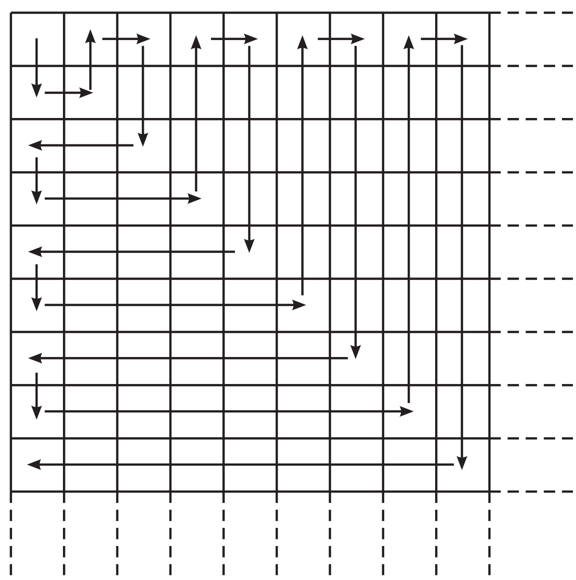

Рис. 2. Вид оператора развертки L_1, задающего порядок передачи элементов изображения „от угла“, позволяющий сохранить значительную часть корреляционных связей между элементами одномерного шума по каждой из координат.

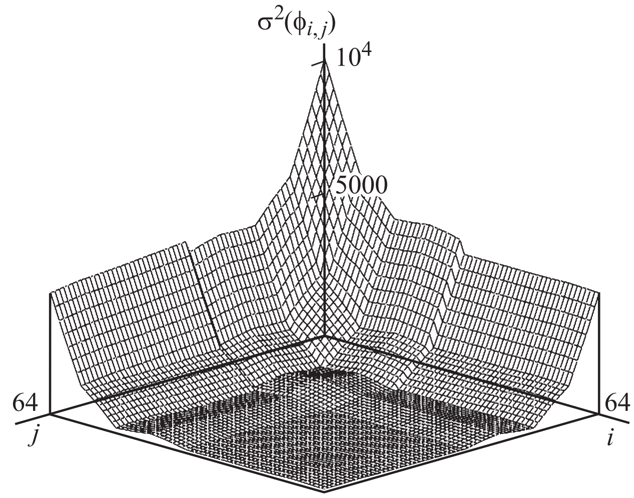

Рис. 3. Расчетное распределение дисперсии шума в пространстве выходного изображения в случае использования оператора L_1 при передаче сигнала с использованием двумерного преобразования Адамара.

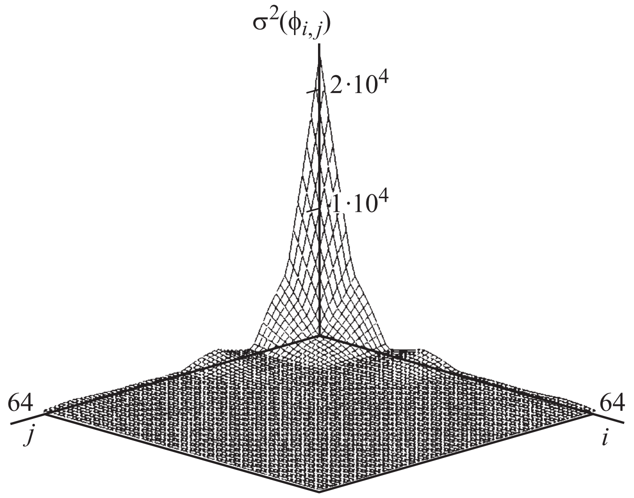

Рис. 4. Расчетное распределение дисперсии шума, являющегося двумерным случайным процессом, при передаче сигнала с использованием двумерного преобразования Адамара и построчной развертке.

мовых отсчетов в пространстве изображения. В качестве варианта нами был опробован оператор развертки L_1, задающий порядок передачи элементов изображения „от угла“ и позволяющий сохранить значительную часть корреляционных связей между элементами одномерного шума по каждой из координат (рис. 2). На рис. 3 приведено рассчитанное распределение дисперсии шума в пространстве выходного изображения в случае использования оператора L_1. При этом предполагается, что передаваемый сигнал подвергается двумерному преобразованию Адамара, базис которого упорядочен по возрастанию секвенты.

Для оценки того, насколько высокой является полученная таким образом степень локализации шума, был произведен расчет формы распределения дисперсии шума, накладывающегося на изображение при одновременной передаче всех элементов его спектра по множеству параллельных каналов. В такой модели канала связи шум является двумерным случайным процессом (т. е. случайной величиной, зависящей от двумерных координат предаваемого элемента в пространстве изображения). Корреляционная функция K_ξ такого шума ξ в этом случае также является двумерной, а дисперсия шума задается выражением

$$\sigma^2(\xi'_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{m_1=1}^{n} h^{i,j}_{k,m}\cdot h^{i,j}_{k_1,m_1} \times K_\xi\big(|k-k_1|, |m-m_1|\big). \quad (6)$$

Полученное в этом случае распределение дисперсии шума в пространстве выходного изображения приведено на рис. 4. Видно, что степень локализации такого двумерного шума существенно выше, чем для одномерного шума последовательного канала.

Поиск операторов, максимально сохраняющих корреляционную близость между элементами шума при заданном методе упорядочивания базиса преобразования, и нахождение среди них оператора L, дающего для одномерного шума лучшую степень локализации по сравнению с передачей „от угла“, является задачей дальнейших исследований. Приведенный в работе оператор L_1, задающий порядок передачи элементов изображения „от угла“, является простым для реализации и одновременно достаточно эффективным по степени пространственной локализации шума при секвентивном упорядочивании базиса Адамара. С точки зрения получения максимально возможной пространственной локализации шума важным фактором является получение максимально широкой двумерной корреляционной функции шума при рассмотрении одномерного шума канала как двумерного случайного процесса в пространстве выходного изображения.

Как было отмечено выше, все приведенные формы распределения шума в пространстве выходного изображения соответствуют лишь одному способу упорядочивания базиса преобразования Адамара.

Заключение

Таким образом, в работе показано, что применение двумерного преобразования Адамара, приводящее к двумерной индексации одномерного шума канала связи, позволяет отобразить шум в пространстве изображения в виде двумерного распределения дисперсии, ширина которого зависит от степени сохранения корреляционных связей между элементами одномерного шума канала связи. При этом степень двумерной пространственной локализации шума превышает степень локализации шума при использовании одномерного преобразования Адамара.

Достижение более высокой степени локализации шума в пространстве выходного изображения предусматривает дальнейшее исследование оператора L и его оптимизацию с целью максимального сохранения корреляционных связей между элементами одномерного шума при представлении его в двумерном пространстве изображения.

Список литературы

[1] *Ahmed N., Rao K.R.* // Electron. Lett. 1993. Vol. 6. N 2. P. 117–121.

[2] *Miyaji S., Hamada T., Matsumoto S.* // Script. Technic. Syst. Comp. Jpn. 2000, Vol. 31. N 5. P. 97–109.

[3] *Van De Ville D., Philips W., Van de Walle R., Lemahieu I.* // IEEE Trans. On circuits and systems for video technology. 2004. Vol. 14. N 6. P. 892–897.

[4] *Satoshi M., Takahiro H., Shuichi M.* // Script. Technic. Syst. Comp. Jpn. 2000. Vol. 31. N 5. P. 97–109.
[5] *Подласкин Б.Г.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 5. С. 139–142.
[6] *Подласкин Б.Г., Гук Е.Г., Сухарев А.А.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 4. С. 20–23.
[7] *Подласкин Б.Г., Гук Е.Г., Сухарев А.А.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 8. С. 9–13.
[8] *Прэтт У.* // Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982. Кн. 1. 312 с.