

Призменное возбуждение вытекающих мод тонких пленок

© А.Б. Сотский,¹ L.M. Steingart,² J.H. Jackson,² П.Я. Чудаковский,¹ Л.И. Сотская³

¹ Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, 212022 Могилев, Белоруссия

² Metricon Corporation, 08534 Pennington, New Jersey, USA

³ Белорусско-Российский университет, 212005 Могилев, Белоруссия
e-mail: ab_sotsky@mail.ru

(Поступило в Редакцию 21 сентября 2012 г.)

Теоретически и экспериментально исследованы условия призменного возбуждения вытекающих мод тонких диэлектрических пленок. Проанализированы возможности решения обратной оптической задачи о восстановлении параметров пленок, направляющих вытекающие моды различных типов.

Введение

При оптическом контроле параметров диэлектрических пленок достаточно эффективен метод, основанный на анализе угловой зависимости энергетического коэффициента отражения светового пучка $R(\gamma)$ в случае призменного возбуждения собственных мод пленок [1,2]. В этом методе осуществляется обработка измеряемой функции $R(\gamma)$ в окрестности ее минимумов. В результате определяются безразмерные комплексные постоянные распространения мод h . Последующая подстановка значений h , найденных как минимум для двух мод, в известные дисперсионные уравнения позволяет рассчитать толщину и комплексную диэлектрическую проницаемость пленки [3]. Однако такой подход дает корректные результаты при исследовании достаточно толстых пленок, направляющих не менее двух собственных мод. В настоящее время значительный интерес представляют также пленки, которые могут направлять либо всего одну собственную моду, либо вовсе не направляют собственных мод. Для их диагностики естественно попытаться использовать возбуждение несобственных (вытекающих) мод. Призменное возбуждение таких мод рассматривалось в работах [1,2,4,5], но ряд вопросов, касающихся восстановления параметров пленок по соответствующим функциям $R(\gamma)$, исследован в настоящее время не достаточно полно. Сюда относятся вопросы о возможности призменного возбуждения вытекающих мод в зависимости от расположения их постоянных распространения на комплексной плоскости, о соответствии номеров вытекающих мод наблюдаемым минимумам функции $R(\gamma)$, а также о точности определения параметров пленок. Данные вопросы рассматриваются в настоящей работе. В разд. 1 исследованы дисперсионные кривые вытекающих мод пленок на комплексной плоскости. Показано, что вид этих кривых существенно зависит от знака разности $n_f - n_s$, где n_f и n_s — показатели преломления пленки и подложки. Выяснены и подтверждены экспериментально условия призменного возбуждения

мод различных типов. В разд. 2 представлены результаты решения обратной оптической задачи о восстановлении параметров пленок при возбуждении вытекающих мод, полученные в различных приближениях.

1. Призменное возбуждение вытекающих мод

Схема призменного возбуждения оптических мод пленки приведена на рис. 1. Здесь призма связи с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_p и углами θ_1 и θ_2 при основании отделена от пленки 2 толщины d , расположенной на подложке 1, буферным слоем 3 толщины g . Относительные диэлектрические проницаемости сред 1, 2, 3 равны ϵ_s , ϵ_f , ϵ_g , соответственно. Призма окружена средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_a . Величины ϵ_p , ϵ_a и ϵ_g предполагаются вещественными, а ϵ_s и ϵ_f — комплексными. Имеют место неравенства $\epsilon_p > \text{Re}\epsilon_f > \text{Re}\epsilon_s > \epsilon_g \geq \epsilon_a$. Пленка возбуждается линейно поляризованным световым пучком с зависимостью поля от времени $\exp i\omega t$. Ось пучка составляет угол γ с нормалью к входной

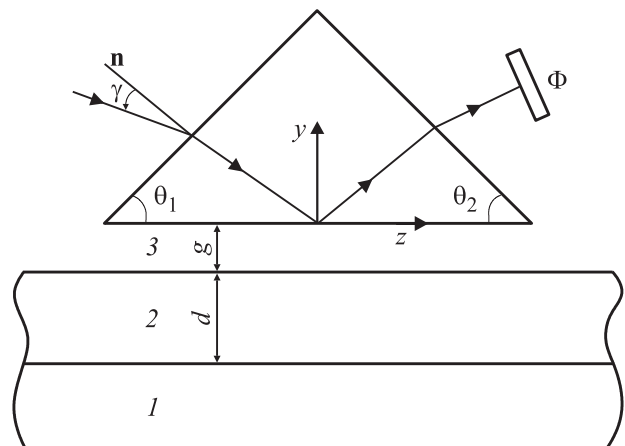


Рис. 1. Схема призменного устройства связи.

границы призмы. Мощность отраженного пучка $P(\gamma)$ регистрируется фотоприемником Φ . При использовании пучка радиуса w , удовлетворяющего условию $k_0 w \gg 1$, где $k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число вакуума, она может быть описана функцией [3]

$$P(\gamma) = C[(1 - T)T_s + TT_p]R(\gamma). \quad (1)$$

Здесь C — некоторый коэффициент, $T = 0$ для волн ТЕ-поляризации, $T = 1$ для волн ТМ-поляризации,

$$T_s = \left[\frac{4k_a^{(1)}k_p^{(2)}}{(k_a^{(1)} + k_p^{(1)})(k_a^{(2)} + k_p^{(2)})} \right]^2,$$

$$T_p = \left[\frac{4\varepsilon_p\varepsilon_a k_a^{(1)}k_p^{(2)}}{(\varepsilon_p k_a^{(1)} + \varepsilon_a k_p^{(1)})(\varepsilon_p k_a^{(2)} + \varepsilon_a k_p^{(2)})} \right]^2,$$

$$k_a^{(i)} = \sqrt{\varepsilon_a - (v_p \sin \theta_i - \beta \cos \theta_i)^2},$$

$$k_p^{(i)} = v_p \cos \theta_i + \beta \sin \theta_i, \quad v_p = \sqrt{\varepsilon_p - \beta^2},$$

где $R(\gamma)$ — энергетический коэффициент отражения плоской волны от основания призмы, $\beta = k_z/k_0$, k_z — продольная составляющая волнового вектора оси пучка в призме, а величины γ и β однозначно связаны соотношением

$$\gamma = \arcsin \left(\frac{\beta \cos \theta_1 - v_p \sin \theta_1}{\sqrt{\varepsilon_a}} \right),$$

вытекающим из закона Снеллиуса. В дальнейшем вместо угла γ мы будем использовать более удобную для выкладок переменную β .

Коэффициент отражения R в (1) может быть представлен в виде [6] $R = |r|^2$, где

$$r = \frac{(1 + i\delta)F_+(\beta) - \exp(-2v_g k_0 g)(1 - i\delta)F_-(\beta)}{(1 - i\delta)F_+(\beta) - \exp(-2v_g k_0 g)(1 + i\delta)F_-(\beta)}, \quad (2)$$

$$\delta = \frac{v_g}{v_p} \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_g} \right)^T, \quad v_g = \sqrt{\beta^2 - \varepsilon_g},$$

$$F_{\pm}(\beta) = \psi'(-g) \pm \psi(-g)v_g, \quad (3)$$

где $\psi(-g)$ и $\psi'(-g)$ — значения функций $\psi(y)$ и $(k_0\varepsilon_g)^{-T}d\psi(y)/dy$ на поверхности пленки (рис. 1). Здесь $\psi(y)$ имеет смысл компоненты поля E_x для ТЕ-волн и H_x для ТМ-волн. Функции $\psi(y)$ и $\psi'(y)$ можно рассчитать по рекуррентным формулам [3], которые в случае однородной пленки дают

$$\psi(y) = \cos[v_f k_0(y + g + d)] + i(\varepsilon_f \varepsilon_s^{-1})^T v_s (v_f)^{-1} \sin[v_f k_0(y + g + d)], \quad (4)$$

$$\psi'(y) = -v_f (\varepsilon_f)^{-T} \sin[v_f k_0(y + g + d)] + i v_s (\varepsilon_s)^{-T} \cos[v_f k_0(y + g + d)], \quad (5)$$

где

$$v_f = \sqrt{\varepsilon_f - \beta^2}, \quad v_s = \sqrt{\varepsilon_s - \beta^2}, \quad \text{Re} v_s \geq 0.$$

Хорошо известно, что эффективное возбуждение моды любого планарного волновода, которое сопровождается появлением резонансного провала в зависимостях $R(\beta)$ и $P(\beta)$, возможно при условиях слабой связи призмы с волноводом [7]

$$\beta^2 > \varepsilon_g, \quad (6)$$

$$|\exp(-v_g k_0 g)| \ll 1. \quad (7)$$

В соответствии с (2) и (3), функция $R(\beta)$ может заметно отличаться от единицы, т.е. иметь выраженные минимумы, означающие возбуждение мод, если только

$$F_+(\beta) = O[\exp(-2v_g k_0 g)], \quad (8)$$

т.е. при условии $F_+(\beta) \rightarrow 0$. Но $F_+(\beta) = 0$ представляет собой дисперсионное уравнение относительно безразмерных комплексных постоянных распространения мод планарного волновода [3]. Пусть это уравнение имеет корень $\beta = h$. С другой стороны, переменная β в (1) должна принадлежать вещественным осям римановых листов $\text{Re}[v_g(\beta)] \geq 0$ и $\text{Re}[v_s(\beta)] \geq 0$. Первое из данных неравенств вытекает из (7), а второе является следствием условия излучения Зоммерфельда [8]. Следовательно, условие (8) может быть выполнено (за счет надлежащего выбора угла падения пучка на призму связи) в том случае, когда на плоскости комплексной переменной β существует некоторая область G вида $|\beta - h| \leq O[\exp(-2v_g k_0 g)]$, содержащая в себе отрезки вещественных осей римановых листов $\text{Re}[v_g(\beta)] \geq 0$, $\text{Re}[v_s(\beta)] \geq 0$, в которой функция $F_+(\beta)$ является аналитической.

Еще одна возможность реализации условия (8) возникает при возбуждении мод, находящихся в окрестности критических условий, т.е. при $v_s(h) \rightarrow 0$. В этом случае в G будет располагаться точка ветвления функции $v_s(\beta)$. Тем не менее, соотношение $F_+(\beta) \rightarrow 0$ может быть выполнено, ибо разрывы функции $F_+(\beta)$, возникающие при переходе от вещественной оси риманова листа $\text{Re}[v_s(\beta)] \geq 0$ к точке $\beta = h$, связанные с наличием разрезов для радикала $v_s(\beta)$, при условии $v_s(\beta) \rightarrow 0$ не имеют существенного значения.

Таким образом, ключевую роль при призмном возбуждении мод тонких пленок играет расположение корней уравнения $F_+(\beta) = 0$ на комплексной плоскости. В зависимости от выбора знаков радикалов $v_g(\beta)$ и $v_s(\beta)$ это уравнение может иметь четыре типа корней [6]. В настоящей работе мы ограничимся анализом двух типов данных корней, которые соответствуют выбору ветви $\text{Re}[v_g(\beta)] > 0$, согласованному с условием (7).

Отметим вначале некоторые общие свойства указанных корней. Устремим $\text{Im} \varepsilon_s \rightarrow 0$, $\text{Im} \varepsilon_f \rightarrow 0$ и перейдем от переменной β к переменной v_s по правилу

$$\beta = \sqrt{\varepsilon_s - v_s^2}. \quad (9)$$

В точке некоторого корня $F_+(v_s) = 0$, $F_+^*(v_s) = 0$, где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Но в силу (3)–(5) $F_+^*(v_s) = F_+(-v_s^*)$. Следовательно, наряду с корнем v_s уравнение $F_+(v_s) = 0$ имеет и корень $-v_s^*$. В соответствии с (9) это означает, что если уравнение $F_+(\beta) = 0$ при выборе ветви радикала $\text{Re}[v_s(\beta)] \leq 0$ имеет корень $\beta = h$, то при выборе ветви $\text{Re}[v_s(\beta)] \geq 0$ это уравнение имеет корень $\beta = h^*$. Данные корни, расположенные на римановых листах $\text{Re}[v_s(\beta)] \leq 0$ и $\text{Re}[v_s(\beta)] \geq 0$, назовем корнями первого и второго типов соответственно. Каждый комплексно сопряженный корень первого типа совпадает с одним из корней второго типа. Следует, однако, отметить, что поскольку последнее свойство установлено в пределе при $\text{Im}\epsilon_s \rightarrow 0$, $\text{Im}\epsilon_f \rightarrow 0$, для волноводных структур с конечными значениями $\text{Im}\epsilon_s$ и $\text{Im}\epsilon_f$ оно выполняется лишь приближенно при условии $|\text{Im}h^2| \gg |\text{Im}\epsilon_{s,f}|$ (см. представленные ниже численные примеры).

Проанализируем условия наблюдения минимумов зависимости $R(\beta)$ при возбуждении мод пленок, имеющих повышенный, либо пониженный по отношению к подложке показатель преломления. Рассмотрение проведем на примерах двух реальных структур, исследованных нами экспериментально на автоматизированных измерительных установках „Model 2010/M Prism Coupler“ с пневматическим прижимом призмы связи к исследуемому образцу, производимых серийно Metricon Corporation.¹ Измерения выполнены в разное время и на разных установках, что объясняет различия в приведенных ниже параметрах призм, буферных слоев и длин волн лазерного излучения.

Рассмотрим вначале случай $n_f > n_s$. Для определенности положим $T = 0$, $n_p = 1.96454$, $\theta_1 = 50.363^\circ$, $\theta_2 = 50.719^\circ$, $\epsilon_a = \epsilon_g = n_g^2$, $n_g = 1.0003$, $g = 0.037 \mu\text{m}$, $n_s = 1.50893$, $k_s = -10^{-6}$, $d = 2.41 \mu\text{m}$, $n_f = 1.53161$, $k_f = -6.23 \cdot 10^{-5}$, где $k_{s,f} = \text{Im}\sqrt{\epsilon_{s,f}}$. Приведенные значения параметров соответствуют призмному возбуждению ТЕ-мод полимерной пленки на полимерной подложке через воздушный буферный слой лазерным пучком с длиной волны $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$. Соответствующая экспериментальная зависимость $P(\beta)$ представлена на рис. 2, а. Указанные выше параметры подложки были определены предварительно,¹ а параметры пленки и толщина буферного слоя восстановлены методом наименьших квадратов (МНК), рассмотренным в разд. 2. Имеющиеся на рис. 2, а минимумы функции $P(\beta)$ в области $\beta < n_s$ указывают на возбуждение четырех вытекающих мод, а минимумы в области $\beta > n_s$ — на возбуждение двух собственных мод.

Выясним возможности возбуждения мод пленки описанной структуры в зависимости от толщины пленки d . На рис. 3 и 5 приведены зависимости комплексных постоянных распространения ТЕ-мод от d (сплошные кривые). Они построены в результате точного решения

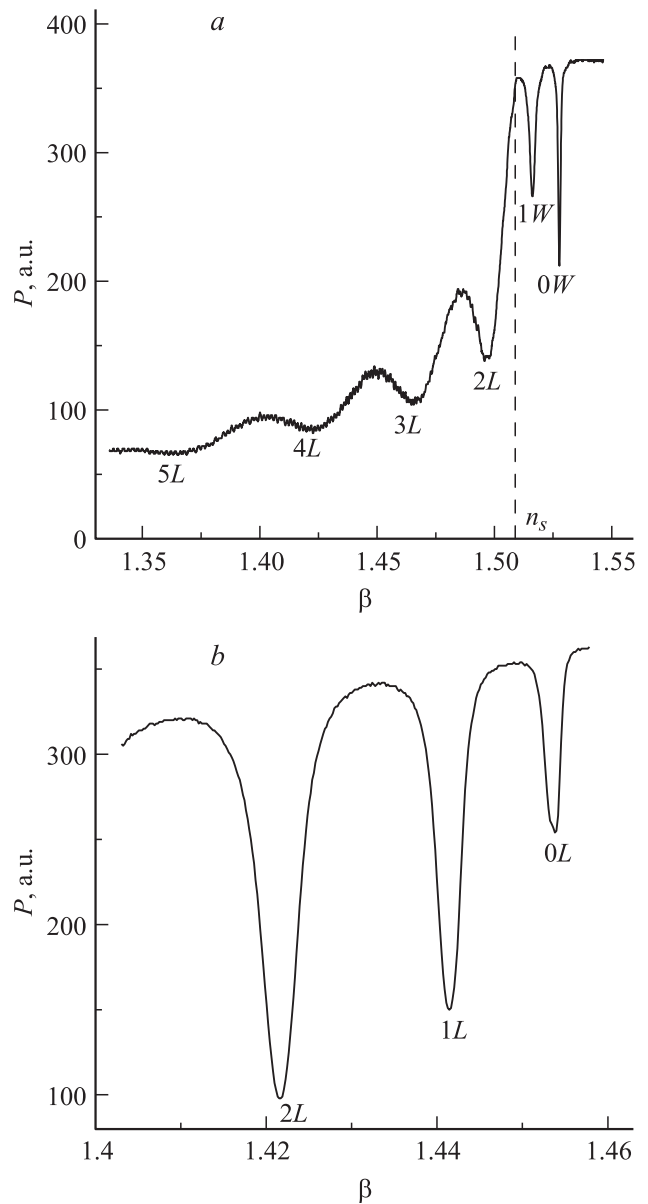


Рис. 2. Экспериментальные зависимости $P(\beta)$ при возбуждении мод полимерной пленки на полимерной подложке (а) и мод пленки двуокиси кремния на кремниевой подложке (б). Символы около минимумов зависимостей указывают возбуждаемые моды.

дисперсионного уравнения $F_+(\beta) = 0$ методом контурного интегрирования [3]. Номера кривых на рис. 3, 5 и ниже на рис. 6 равны номерам соответствующих мод. Нумерация мод описана в разд. 2, где рассмотрено приближенное решение дисперсионных уравнений.

Первый из определенных выше типов корней уравнения $F_+(\beta) = 0$ относится к модам, которые при толщине пленки $d > d_c$ являются обычными собственными модами. Здесь под d_c понимается критическая толщина пленки, которая является корнем уравнения $\text{Re}[h(d)] = n_s$ и различна для различных мод. Зависимости $h(d)$ для мод описанной выше структуры представлены на рис. 3.

¹ <http://www.metricon.com>

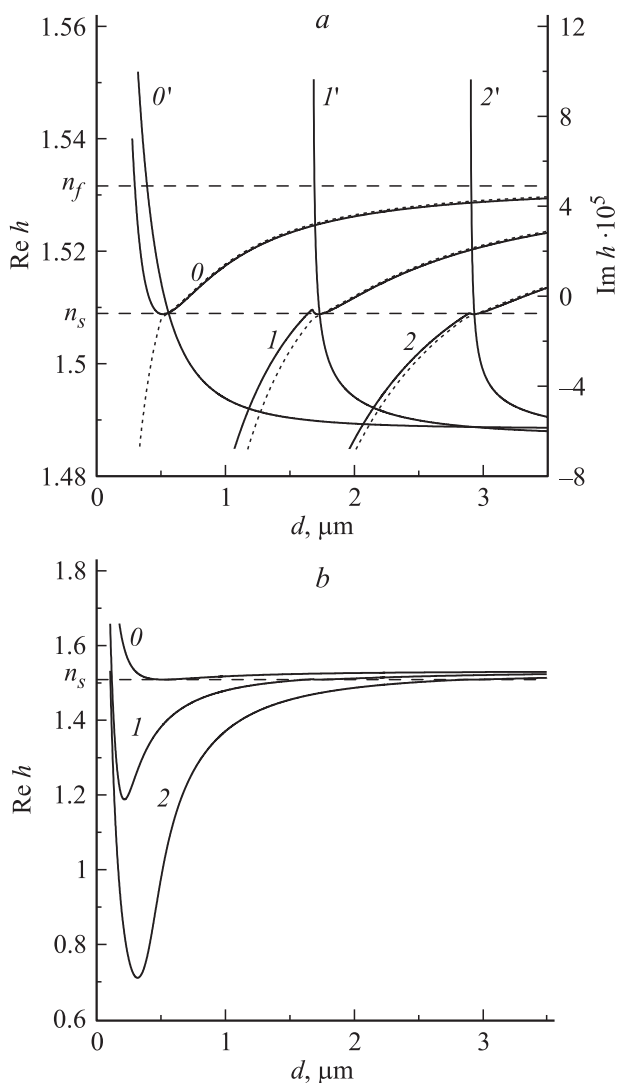


Рис. 3. Зависимости $Re h(d)$ в уменьшенном (а) и увеличенном (б) масштабах и $Im h(d)$ (а) для собственных мод полимерной пленки. Номера m ($m = 0, 1, 2$) относятся к зависимостям $Re h(d)$, а номера m' ($m' = 0', 1', 2'$) — к зависимостям $Im h(d)$ (m — номер моды).

Они соответствуют трем модам, которые при $d > d_c$ являются собственными модами низшего порядка. Из рис. 3,а видно, что при достаточно малых значениях d постоянные распространения рассматриваемых мод имеют положительную мнимую часть. При выбранной зависимости поля от времени $\exp(i\omega t)$ это означает усиление поля моды по мере ее распространения вдоль пленки. Естественно, что такая ситуация физически не реализуема, т.е. соответствующие моды не могут быть возбуждены (см. ниже). Заметим, что зависимости $h(d)$ для собственных мод более высокого порядка описываются кривыми, подобными кривым 1, 1' и 2, 2' на рис. 3, но данные зависимости сдвинуты в область больших значений d .

Зависимость $Im h(Re h)$ для любой из рассматриваемых мод качественно представлена на рис. 4 кривой 1. Комплексная плоскость на рис. 4 принадлежит римановым листам $Re[v_g(\beta)] \geq 0, Re[v_s(\beta)] \geq 0$. Зависимость 1 к этой плоскости не относится (она находится на листе $Re[v_s(\beta)] \leq 0$), поэтому она изображена штриховой линией. Кривая 1 огибает точку ветвления $\beta = \sqrt{\epsilon_s}$ функции $v_s(\beta)$ и располагается на различных берегах разреза риманова листа $Re[v_s(\beta)] \leq 0$. Таким образом, поскольку переменная β в (1) и кривая 1 на рис. 4 находятся на различных римановых листах функции $v_s(\beta)$, область G может принадлежать только двулистной римановой поверхности данной функции, склеенной по берегам разреза. Из рис. 4 видно, что такая область существует лишь при условии $Re h > n_s$ (или $d > d_c$), т.е. когда вещественная ось комплексной переменной β и точки кривой 1 располагаются над и под разрезом соответственно. Следовательно, несмотря на непрерывный характер зависимостей $h(d)$ (рис. 3, 4), при выполнении неравенств $d < d_c$ рассматриваемые моды не могут быть возбуждены с помощью призмы связи, и соответствующие им минимумы в зависимости $R(\beta)$ наблюдаться не будут. Исключение из этого правила, как уже отмечалось, может иметь место лишь при условии $d \rightarrow d_c$ (соответствующая иллюстрация представлена в разд. 2).

Второй тип корней относится к модам пленки, вытекающим в подложку. Точные зависимости $h(d)$ для указанных мод различного порядка представлены сплошными кривыми на рис. 5. Эти кривые принадлежат римановым листам $Re[v_g(\beta)] \geq 0, Re[v_s(\beta)] \geq 0$.

Рассматриваемые моды допускают призмное возбуждение, если только вещественные части их постоянных распространения удовлетворяют неравенствам $n_g < Re h < n_s$. Действительно, если $Re h < n_g$, то при условии фазового синхронизма $\beta \approx Re h$ поле моды на

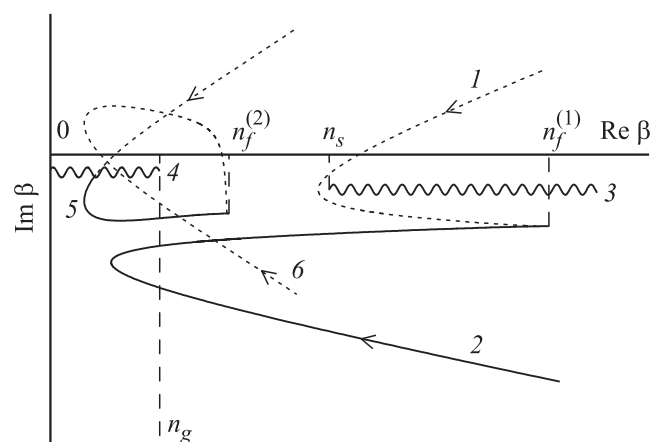


Рис. 4. Качественная диаграмма расположения корней дисперсионного уравнения $F_+(\beta) = 0$ на комплексной плоскости. Кривые 1, 2 — случай $n_f = n_f^{(1)} > n_s$, 5, 6 — $n_f = n_f^{(2)} < n_s$. Волнистые линии — разрезы для радикалов $v_s(\beta)$ (3) и $v_g(\beta)$ (4). Стрелками указаны направления возрастания d .

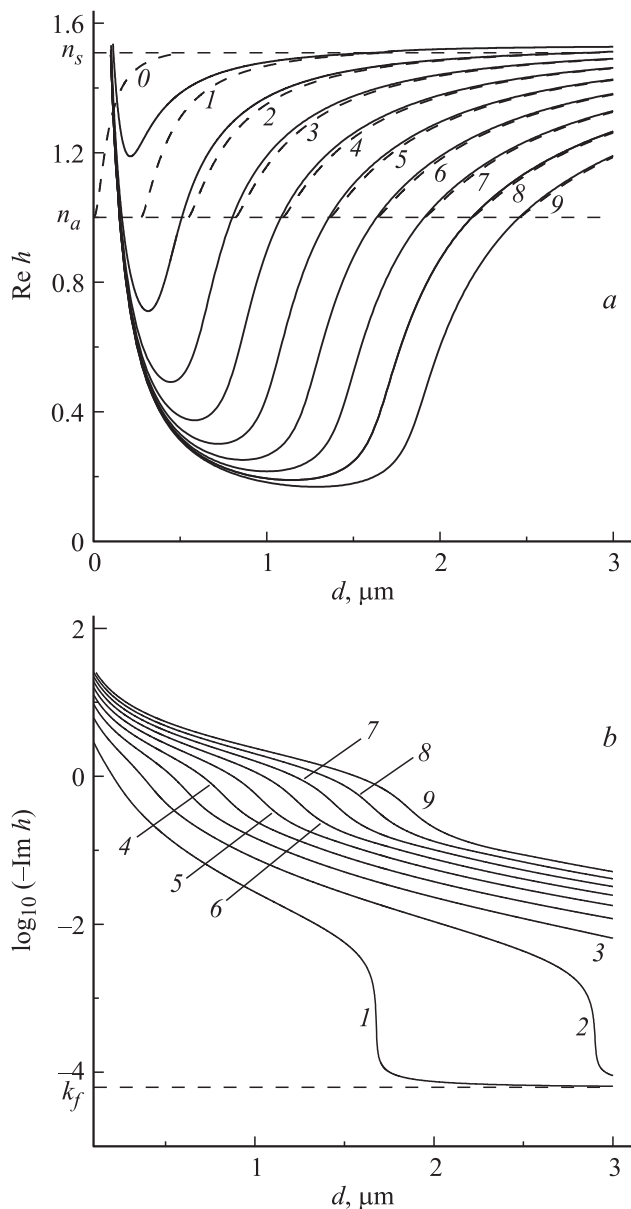


Рис. 5. Зависимости $Reh(d)$ (a) и $Imh(d)$ (b) для вытекающих мод полимерной пленки.

границе раздела пленка-буферный слой не испытывает полного внутреннего отражения, что означает нарушение неравенств (6), (7). Для обоснования условия $Reh < n_s$ заметим, что из рассмотрения зависимостей, приведенных на рис. 5, можно заключить, что при изменении толщины пленки значения комплексных постоянных распространения каждой из рассматриваемых мод будут располагаться на кривой 2, качественно изображенной на рис. 4. Из рис. 4 видно, что при $Reh > n_s$ вещественная ось риманова листа $Re[v_s(\beta)] \geq 0$ и кривая 2 находятся на разных берегах разреза 3 одного и того же риманова листа. Отсюда следует, что условие (8) может быть выполнено, только если $Reh < n_s$.

Представленные соображения позволяют определить для каждой вытекающей моды с номером m критические толщины пленки $d_{cs}^{(mj)}$, которые являются минимальным ($j = 1$) и максимальным ($j = 2$) корнями уравнений $Re[h(d_{cs}^{(mj)})] = n_s$ и $Re[h(d_{cg}^{(mj)})] = n_g$, или d — координатами точек пересечения зависимости $Re[h(d)]$ для данной моды и горизонтальных штриховых линий на рис. 5, a. Согласно рис. 5, a, призменное возбуждение вытекающей моды с номером $m = 1$ может иметь место, если толщина пленки находится в диапазоне

$$d_{cs}^{(11)} < d < d_{cs}^{(12)}, \quad (10)$$

а призменное возбуждение вытекающих мод с номерами $m > 1$, если

$$d_{cg}^{(m2)} < d < d_{cs}^{(m2)} \quad (11)$$

либо

$$d_{cs}^{(m1)} < d < d_{cg}^{(m1)}. \quad (12)$$

Расчеты, однако, показывают, что при выполнении (12) минимумы зависимости $P(\beta)$, соответствующие возбуждению вытекающих мод, наблюдаться не могут. Это объясняется сильным затуханием данных мод (рис. 5, b), приводящим к нарушению условия (8). Таким образом, для каждой из исследуемых вытекающих мод можно ввести две критических толщины пленки, определяющие границы диапазонов (10) либо (11). При выходе толщины пленки из указанных диапазонов призменное возбуждение мод с номерами $m = 1$ (случай (10)) либо $m > 1$ (случай (11)) невозможно.

Заметим, что если выполняется неравенство $d > d_{cs}^{(m2)}$, то вещественная часть постоянной распространения вытекающей моды с номером m будет превосходить показатель преломления подложки (кривые 1 и 2 на рис. 5, a). Однако, как установлено выше, призмой возбудить такую моду нельзя.

Применение представленных соображений к объяснению экспериментальной зависимости на рис. 2, a иллюстрирует табл. 1. В ней приведены расчетные значения комплексных постоянных распространения h и радикалов v_s для мод полимерной пленки с толщиной $d = 2.41 \mu\text{m}$. Символ mW обозначает моду, которая при $d > d_c$ является собственной модой с номером m , а символ mL обозначает вытекающую моду с номером m .

Таблица 1. Значения h и v_s для мод полимерной пленки

Мода	Reh	Imh	$Re v_s$	$Im v_s$
0W	1.527489	$-6.08 \cdot 10^{-5}$	$-3.85 \cdot 10^{-4}$	$-2.37 \cdot 10^{-1}$
1W	1.515731	$-5.32 \cdot 10^{-5}$	$-5.51 \cdot 10^{-5}$	$-1.43 \cdot 10^{-1}$
2W	1.497979	$5.90 \cdot 10^{-3}$	$-1.87 \cdot 10^{-1}$	$4.81 \cdot 10^{-2}$
1L	1.523504	$-6.81 \cdot 10^{-5}$	$4.86 \cdot 10^{-4}$	$2.10 \cdot 10^{-1}$
2L	1.498020	$-6.02 \cdot 10^{-3}$	$1.87 \cdot 10^{-1}$	$4.81 \cdot 10^{-2}$
3L	1.464401	$-1.47 \cdot 10^{-2}$	$3.69 \cdot 10^{-1}$	$5.85 \cdot 10^{-2}$
4L	1.418102	$-2.45 \cdot 10^{-2}$	$5.21 \cdot 10^{-1}$	$6.69 \cdot 10^{-2}$
5L	1.358037	$-3.60 \cdot 10^{-2}$	$6.63 \cdot 10^{-2}$	$7.37 \cdot 10^{-2}$

В табл. 1 представлены все моды, для которых значения Reh находятся в диапазоне $1.3 < Reh < 1.55$, согласованном с диапазоном изменения β на рис. 2, а. Согласно табл. 1, $Imv_s > 0$ для моды 2W (соответствующее значение h находится над разрезом 3 на рис. 4) и $Reh > n_s$ для моды 1L. Как установлено выше, данные неравенства означают, что указанные моды не могут быть возбуждены, тогда как все остальные моды, описанные в табл. 1, призмное возбуждение допускают. Этот результат находится в полном согласии с числом минимумов экспериментального распределения на рис. 2, а. Заметим, что видимое из рис. 2, а уширение минимумов зависимости $P(\beta)$ при уменьшении β в области $\beta < n_s$ объясняется возрастанием затухания соответствующих вытекающих мод (табл. 1) [1,6].

Рассмотрим теперь ситуацию, когда показатель преломления пленки меньше показателя преломления подложки ($n_f < n_s$). Из экспериментов известно, что в этом случае призмное возбуждение допускают только моды, вытекающие в подложку. Исследуем особенности такого возбуждения на примере ТЕ-мод пленки двуокиси кремния, находящейся на кремниевой подложке. Используем параметры $T = 0$, $n_p = 2.16458$, $\theta_1 = 51.535^\circ$, $\theta_2 = 50.40^\circ$, $\epsilon_a = \epsilon_g = n_g^2$, $n_g = 1.0003$, $n_s = 3.847$, $k_s = -0.016$, $n_f = 1.45726$, $k_f = -9.95 \cdot 10^{-4}$, $\lambda = 0.6532 \mu\text{m}$. Экспериментальная зависимость $P(\beta)$ для указанной структуры представлена на рис. 2, б. Она соответствует толщинам $d = 2.97 \mu\text{m}$, $g = 0.085 \mu\text{m}$ (параметры пленки и буферного слоя восстановлены МНК). Выраженные минимумы в распределении $P(\beta)$ указывают на наличие в рассмотренном диапазоне β постоянных распространения трех вытекающих мод.

Принципиальные возможности призмного возбуждения мод пленки из двуокиси кремния на кремниевой подложке иллюстрируют рис. 4 и 6. Все кривые на рис. 4 и сплошные кривые на рис. 6 рассчитаны в результате решения уравнения $F_+(h) = 0$ методом контурного интегрирования.

Корням уравнения $F_+(h) = 0$ первого из указанных выше двух типов отвечает зависимость б на рис. 4. Эта зависимость изображена штриховой линией, поскольку, как и зависимость 1, она располагается на римановом листе $Re[v_s(\beta)] \leq 0$. Однако в отличие от кривой 1, кривая б на рис. 4 находится вдали от разреза 3. Это, очевидно, означает, что моды, соответствующие корням рассматриваемого типа, не могут быть возбуждены призмной связью.

Корням второго типа соответствуют графики, представленные на рис. 6. Кривые на рис. 6, а по виду похожи на кривые на рис. 5, а. Вместе с тем поведение кривых на рис. 5, б и 6, б качественно различается: на рис. 5, б все кривые находятся в области $Imh < 0$, а на рис. 6, б знак Imh для каждой из мод зависит от толщины пленки. В рассматриваемом случае зависимости $h(d)$ располагаются на римановом листе $Re[v_s(\beta)] \geq 0$ и на двулистной римановой поверхности функции $v_g(\beta)$,

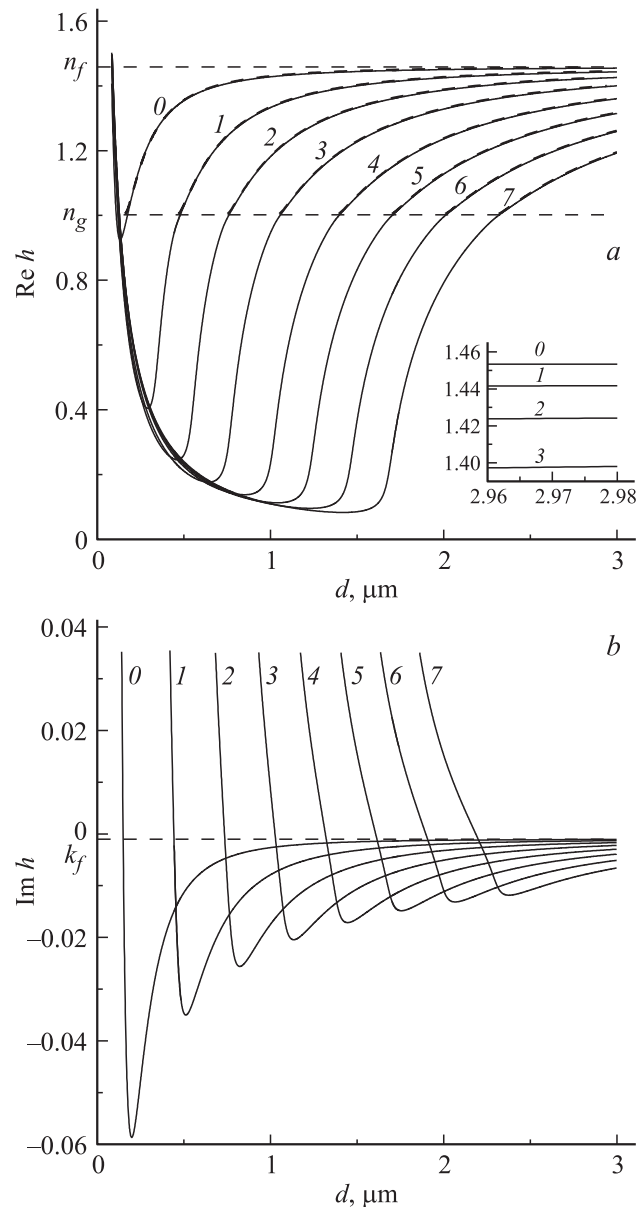


Рис. 6. Зависимости $Reh(d)$ (а) и $Imh(d)$ (б) для вытекающих мод пленки двуокиси кремния на кремниевой подложке.

склеенной по берегам разреза. При достаточно больших значениях d зависимость $h(d)$ находится на римановом листе $Re[v_g(\beta)] \geq 0$. В этом случае $Imh > 0$. Переход зависимости $h(d)$ на лист $Re[v_g(\beta)] \leq 0$ при уменьшении d сопровождается изменением знака Imh . В момент этого перехода $Imh = 0$. Интересно, что при соответствующей этому значению толщине пленки d плоская ТЕ-волна, падающая на пленку из воздуха под углом, определяемым значением $\beta = Reh$, имеет нулевой коэффициент отражения.

Качественная диаграмма расположения постоянного распространения любой из рассматриваемых вытекающих мод на комплексной плоскости представлена на рис. 4 кривой 5. Часть этой кривой, изображен-

ная сплошной линией, находится на римановом листе $\text{Re}[v_g(\beta)] \geq 0$, а ее штриховая часть принадлежит листу $\text{Re}[v_g(\beta)] \leq 0$. Согласно рис. 4, необходимым и достаточным условием выполнения условий (6)–(8), а значит, и призменного возбуждения моды является $d > d_c$, где d_c — корень уравнения $\text{Re}[h(d)] = n_g$.

Как видно из вставки на рис. 6, а, для пленки двуокиси кремния толщиной $d = 2.97 \mu\text{m}$ в диапазоне $1.41 < \beta < 1.46$ находятся вещественные части постоянных распространения трех вытекающих мод, допускающих призменное возбуждение. Этот результат согласуется с экспериментом (рис. 2, б).

2. Восстановление параметров пленок

В настоящее время для решения проблемы восстановления оптических параметров волноводных пленок по регистрируемым распределениям $P(B)$ широко используется приближенный подход, основанный на решении системы дисперсионных уравнений, записанных для различных мод пленки [5]. В нем полагают $\text{Im}h = 0$, а значения $\beta = \beta_{\min}$, соответствующие минимумам функции $P(\beta)$, отождествляют с вещественными частями постоянных распространения мод. Чтобы связать значения $\text{Re}h$ с параметрами пленки и определить номера мод, уравнение $F_+(h) = 0$ вида (3)–(5) записывают в форме

$$v_f k_0 d = \arctg A + \arctg B + n\pi, \quad (13)$$

где

$$A = \left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_s}\right)^T \frac{iv_s}{v_f}, \quad B = \left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_g}\right)^T \frac{v_g}{v_f}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Строгое решение уравнения (13) на комплексной плоскости затруднено наличием точек ветвления и разрезов для обратных тригонометрических функций. Поэтому при рассмотрении мод диэлектрических пленок на диэлектрических подложках в уравнении (13) целесообразно отделить вещественную часть, пренебрегая в нулевом приближении мнимыми частями постоянной распространения моды и диэлектрических проницаемостей сред. В ходе таких преобразований необходимо иметь в виду, что арктангенс комплексного аргумента равен

$$\begin{aligned} \arctg(x + iy) &= \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2x}{1 - x^2 - y^2}\right) \\ &+ \frac{\pi}{2} \text{sign}(x)H(x^2 + y^2 - 1) \\ &+ k\pi + \frac{i}{4} \ln\left[\frac{(1+y)^2 + x^2}{(1-y)^2 + x^2}\right], \quad (14) \end{aligned}$$

где $\text{sign}(x) = 1$ при $x > 0$, $\text{sign}(x) = -1$ при $x < 0$; $H(z) = 0$ при $z < 0$, $H(z) = 1$ при $z > 0$; $k = 0, \pm 1, \dots$

В результате из (13) может быть получено приближенное дисперсионное уравнение

$$d = \left\{ \arctg \left[\left(\frac{n_f^2}{n_g^2}\right)^T \frac{v_g}{v_f} \right] + \varphi + m\pi \right\} (v_f k_0)^{-1}, \quad (15)$$

где $m = 0, 1, \dots$ — номер моды, $v_f = \sqrt{n_f^2 - (\text{Re}h)^2}$, $v_g = \sqrt{(\text{Re}h)^2 - n_g^2}$. Слагаемое φ в (15) зависит от типа рассматриваемой моды и поляризации излучения. В случае собственных мод ($\text{Re}h > n_s$, $\text{Re}h > n_g$) $\varphi = \arctg[(n_f^2/n_s^2)^T (v_s'/v_f)]$, где $v_s' = \sqrt{(\text{Re}h)^2 - n_s^2}$. В случае вытекающих мод ($\text{Re}h < n_s$, $\text{Re}h > n_g$) слагаемое φ определяется знаком разности $n_s - n_f$. Из (14) следует, что при $n_s - n_f < 0$ $\varphi = 0$ для ТЕ-мод, $\varphi = 0.5\pi H(h_p - \text{Re}h)$ для ТМ-мод, где $h_p = n_f n_s / \sqrt{n_f^2 + n_s^2}$. При $n_s - n_f > 0$ $\varphi = 0.5\pi$ для ТЕ-мод, $\varphi = 0.5\pi H(\text{Re}h - h_p)$ для ТМ-мод.

Таким образом, если измерены значения $\text{Re}h$, равные h' и h'' , для любых двух мод, то в соответствии с (15)

$$\begin{aligned} \frac{v_f'}{v_f''} &= \left\{ \arctg \left[\left(\frac{n_f^2}{n_g^2}\right)^T \frac{v_g'}{v_f''} \right] + \varphi' + m'\pi \right\} \\ &\times \left\{ \arctg \left[\left(\frac{n_f^2}{n_g^2}\right)^T \frac{v_g''}{v_f''} \right] + \varphi'' + m''\pi \right\}^{-1}, \quad (16) \end{aligned}$$

где величины с одним штрихом относятся к моде с $\text{Re}h = h'$, а величины с двумя штрихами — к моде с $\text{Re}h = h''$. При известных показателях преломления n_g и n_s (16) представляет собой трансцендентное уравнение относительно показателя преломления пленки n_f . После численного решения этого уравнения толщина пленки может быть найдена из выражения (15), записанного для любой из использованных мод.

Об эффективности приближения (15) позволяют судить рис. 3, а, 5, а и 6, а. Здесь штриховые кривые с номерами, равными значениям m в (15), рассчитаны в результате решения уравнения (15) при $T = 0$. Такие же номера m адресованы к тем сплошным кривым на указанных рисунках, которые наиболее близки к соответствующим штриховым кривым.

Заметим, что при условии $n_s - n_f < 0$ правая часть уравнения (15) является непрерывной функцией $\text{Re}h$ в диапазоне $n_g < \text{Re}h < n_f$. Это означает, что при фиксированном значении m решение уравнения (15) определяет зависимость $\text{Re}h(d)$, которая непрерывна в указанном диапазоне. Таким образом, в рамках приближения (15) можно говорить о единой моде пленки с номером m ,

которая при

$$d > d_{cs}^{(m2)} = \left\{ \arctg \left[\left(\frac{n_f^2}{n_g^2} \right)^T \sqrt{\frac{n_s^2 - n_g^2}{n_f^2 - n_s^2}} \right] + m\pi \right\} \times (k_0 \sqrt{n_f^2 - n_s^2})^{-1}$$

является собственной модой, а при $d_{cg}^{(m2)} < d < d_{cs}^{(m2)}$ — вытекающей модой. На этом основании на рис. 3,а приведены непрерывные штриховые кривые, которые в диапазонах $Reh > n_s$ и $Reh < n_s$ описывают собственные и вытекающие моды соответственно. В диапазоне $Reh > n_s$, где возможно призмное возбуждение собственных мод, эти кривые практически совпадают с точными зависимостями $Reh(d)$, представленными сплошными линиями, а в диапазоне $Reh < n_s$, где, как установлено выше, сплошные кривые описывают невозбуждаемые моды, сплошные и штриховые кривые заметно различаются.

При условии $n_s - n_f < 0$ в диапазоне $Reh < n_s$ допускают возбуждение вытекающие моды, которым соответствуют корни уравнения $F_+(\beta) = 0$, относящиеся ко второму из рассмотренных выше типов корней. Поэтому при $Reh < n_s$ решения уравнения (15) естественно сравнивать с вещественными частями именно указанных корней. Такое сопоставление представлено на рис. 5,а, где видно, что соответствие штриховых кривых точным результатам ухудшается по мере уменьшения толщины пленки, а при $d < 0.5 \mu\text{m}$ приближение (15) теряет применимость. В частности, вытекающая мода с номером $m = 0$, предсказываемая уравнением (15), в действительности не существует (сплошные кривые с номером 0 на рис. 5 отсутствуют). Отмеченное расхождение точного и приближенного решений дисперсионного уравнения объясняется резким усилением затухания вытекающих мод с уменьшением толщины пленки (рис. 5,б) и тем, что при выводе уравнения (15) данное затухание игнорировалось.

Штриховые кривые на рис. 6,а (случай $n_s - n_f > 0$) находятся в диапазонах $n_g < Reh < n_f$, $d > d_c$, где в соответствии с (15) $d_c = (m + 0.5\pi)(k_0 \sqrt{n_f^2 - n_g^2})^{-1}$. По сравнению с рис. 5,а, штриховые кривые на рис. 6,а гораздо лучше согласуются с результатами строгого расчета. Это объясняется достаточно слабым затуханием рассматриваемых вытекающих мод (рис. 6,б).

Решение обратной задачи о восстановлении параметров пленок различной толщины в описанных в предыдущем разделе структурах иллюстрируют табл. 2 и 3. Представленные в них результаты получены в результате обработки экспериментальных кривых, приведенных на рис. 2, и кривых, представленных на рис. 7 и 8. Рис. 7 и 8 построены в результате вычислительного эксперимента по расчету функций $P(\beta)$ вида (1), соответствующих призмному возбуждению волнами ТЕ-поляризации пленок различной толщины в обеих структурах, описанных в разд. 1 (значения всех параметров

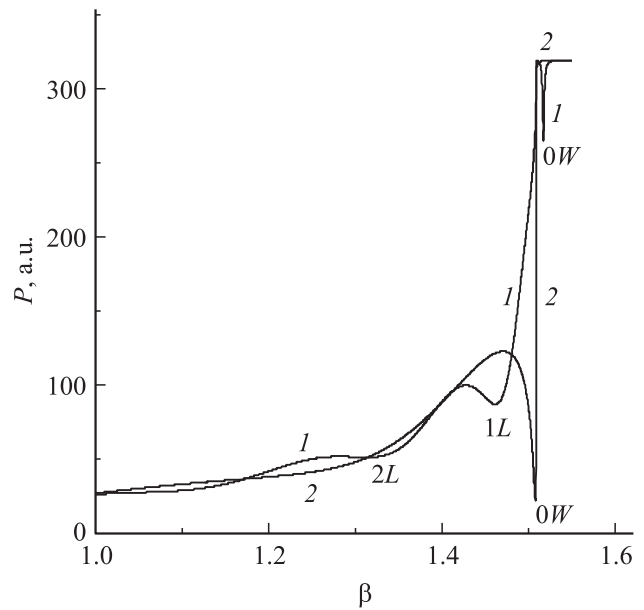


Рис. 7. Распределения $P(\beta)$ при возбуждении мод полимерной пленки толщины $d = 1 \mu\text{m}$ (1) и $d = 0.5 \mu\text{m}$ (2). Символы около минимумов распределений указывают возбуждаемые моды.

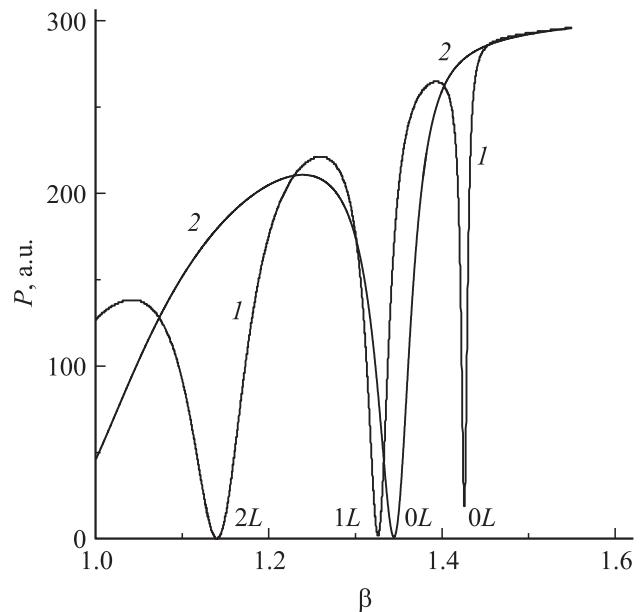


Рис. 8. Распределения $P(\beta)$ при возбуждении мод пленки двуоксида кремния толщины $d = 1 \mu\text{m}$ (1) и $d = 0.5 \mu\text{m}$ (2). Символы около минимумов распределений указывают возбуждаемые моды.

данных структур, исключая толщины пленок, конкретизированы выше, а толщины пленок указаны в подписях к рис. 7 и 8). При этом с целью имитации погрешностей результатов измерений аппаратная постоянная C в (1) полагалась равной 400, после чего в функции $P(\beta)$ отбрасывалась дробная часть. Такое преобразование яв-

Таблица 2. Восстановление параметров полимерной пленки

Эксперимент	Моды	n_f	k_f	$d, \mu\text{m}$	
Рис. 2, <i>a</i>	0W ($\beta_{\min} = 1.52773$), 1W ($\beta_{\min} = 1.51627$)	1.53173	—	2.38	
	0W ($\beta_{\min} = 1.52773$), 2L ($\beta_{\min} = 1.49684$)	1.53184	—	2.34	
	0W ($\beta_{\min} = 1.52773$), 3L ($\beta_{\min} = 1.46469$)	1.53172	—	2.38	
	0W ($\beta_{\min} = 1.52773$), 4L ($\beta_{\min} = 1.42111$)	1.53167	—	2.40	
	0W ($\beta_{\min} = 1.52773$), 5L ($\beta_{\min} = 1.36091$)	1.53172	—	2.38	
	—	1.53161	$-6.23 \cdot 10^{-5}$	2.41	
	Рис. 7, кривая 1	0W, ($\beta_{\min} = 1.51679$), 1L ($\beta_{\min} = 1.46108$)	1.53192	—	0.941
		0W, ($\beta_{\min} = 1.51679$), 2L ($\beta_{\min} = 1.31100$)	1.53297	—	0.900
		1L ($\beta_{\min} = 1.46108$), 2L ($\beta_{\min} = 1.31100$)	1.54061	—	0.883
		—	1.53162	$-6.20 \cdot 10^{-5}$	0.9997
—		1.53158	$-5.94 \cdot 10^{-5}$	0.50004	

Таблица 3. Восстановление параметров пленки двуокиси кремния

Эксперимент	Моды	n_f	k_f	$d, \mu\text{m}$	
Рис. 2, <i>b</i>	0L ($\beta_{\min} = 1.45366$), 1L ($\beta_{\min} = 1.44138$)	1.45773	—	2.90	
	0L ($\beta_{\min} = 1.45366$), 2L ($\beta_{\min} = 1.42165$)	1.45762	—	2.95	
	1L ($\beta_{\min} = 1.44138$), 2L ($\beta_{\min} = 1.42165$)	1.45669	—	2.97	
	—	1.45726	$-9.95 \cdot 10^{-4}$	2.97	
	Рис. 8, кривая 1	0L ($\beta_{\min} = 1.42558$), 1L ($\beta_{\min} = 1.32591$)	1.45767	—	0.974
		0L ($\beta_{\min} = 1.42558$), 2L ($\beta_{\min} = 1.13995$)	1.45859	—	0.959
1L ($\beta_{\min} = 1.32591$), 2L ($\beta_{\min} = 1.13995$)		1.46354	—	0.950	
—		1.45726	$-1.001 \cdot 10^{-3}$	0.99997	
—		1.45726	$-9.948 \cdot 10^{-4}$	0.49998	

ляется моделью ошибок округления, вызванных аналого-цифровым преобразованием, адекватной измерительной установке Model 2010/M Prism Coupler.

В ячейках 2–6 столбцов 3, 5 табл. 2 и ячейках 2–4 столбцов 3, 5 табл. 3 представлены значения n_f и d , восстановленные в результате решения уравнения (16) при выборе $Reh = \beta_{\min}$, где β_{\min} — координаты минимумов графиков функций $P(\beta)$, приведенных на рис. 2. Используемые пары мод и соответствующие им β_{\min} указаны во втором столбце табл. 2 и 3. Заметим, что в табл. 2 минимальный номер вытекающей моды для полимерной пленки толщины $d = 2.41 \mu\text{m}$ равен 2, а для пленки толщины $d = 1 \mu\text{m}$ минимальный номер

вытекающей моды равен 1. Данный выбор объясняется тем, что моды с меньшими значениями m в этих примерах являются собственными. В случае применения уравнения (16) к собственным модам либо в случае применения данного уравнения к вытекающим модам пленок с $n_s - n_f > 0$ мода с максимальным значением Reh имеет номер $m = 0$.

Из табл. 2 и 3 видно, что результаты решения обратных задач, полученные с использованием уравнения (16), характеризуются погрешностью, возрастающей при уменьшении толщины пленки. В случае полимерной пленки (табл. 2) это объясняется, главным образом, резким снижением точности приближения (15)

при уменьшении d (рис. 5, *a*). В случае пленки двуокиси кремния указанный фактор не столь существен (рис. 6, *a*). Здесь погрешность решения обратной задачи вызвана, главным образом, влиянием величины зазора между призмой связи и пленкой на минимумы функции $P(\beta)$ (это влияние при записи $\text{Re}h = \beta_{\min}$ не учитывается) [1,2,6]. Например, использование вместо β_{\min} приведенных в ячейке 6 второго столбца табл. 3 значений $\text{Re}h = 1.42673$ (мода 0L) и $\text{Re}h = 1.33207$ (мода 1L), рассчитанных из строгого уравнения $F_+(h) = 0$, приводит к более точному решению обратной задачи: $n_f = 1.45725$, $d = 1.0013 \mu\text{m}$.

В принципе возмущающее влияние призмы связи на измеряемые значения h можно исключить, обработав функцию $P(\beta)$ методом, описанным в [1,2,6]. Но при таком подходе возникает проблема двужначности восстанавливаемых комплексных постоянных распространения мод [1,2,6]. Ее преодоление заметно усложняет технику измерений [2]. Поэтому в настоящей работе для повышения точности решения обратной оптической задачи мы использовали МНК. Этот метод состоит в минимизации целевой функции

$$\Phi(x_i) = \sum_{j=1}^n [P_e(\beta_j) - P(x_i, \beta_j)]^2. \quad (17)$$

Здесь через $P_e(\beta_j)$ обозначена экспериментальная функция $P(\beta)$, измеренная в n точках, $P(x_i, \beta_j)$ — модель (1), где $x_1 = C$, $x_2 = g$, $x_3 = d$, $x_4 = n_f$, $x_5 = k_f$. Для отыскания оптимальных значений x_i мы разработали специальный алгоритм, позволяющий исключить локальные минимумы функции $\Phi(x_i)$. Результаты его реализации представлены в ячейках 7, 11, 12 столбцов 3–5 табл. 2 и в ячейках 5, 9, 10 столбцов 3–5 табл. 3. Используемые при этом моды не указаны (поскольку обрабатывается весь контур функции $P_e(\beta)$, конкретизация мод не требуется). Заметим, что МНК в отличие от рассмотренного выше приближения позволяет восстановить значение k_f (табл. 2, 3). Заметим еще, что значения g и k_f , полученные в результате обработки по названному алгоритму экспериментальных распределений $P(\beta)$, приведенных на рис. 2, были указаны в предыдущем разд. 1 при описании волноводных структур.

Об эффективности МНК свидетельствуют результаты восстановления параметров пленок с толщинами $1 \mu\text{m}$ и $0.5 \mu\text{m}$ (табл. 2 и 3). Поскольку при расчете соответствующих функций $P(\beta)$ (рис. 7, 8) были использованы указанные выше значения параметров, о погрешности решения обратной задачи можно судить из сопоставления восстановленных и исходных значений параметров.

Согласно табл. 2, минимизация функции (17) привела к практически точному восстановлению параметров полимерных пленок.

Заметим, что в полимерной пленке толщины $d = 0.5 \mu\text{m}$ принципиально возможно возбуждение всего одной вытекающей моды с постоянной распространения

$h = 1.383563 - i0.157357$ (рис. 5, *a*). Однако ввиду резкого затухания данной моды, соответствующий ей нуль функции $F_+(\beta)$ находится на значительном удалении от вещественной оси. Это приводит к нарушению условия (8) в окрестности $\beta = \text{Re}h$ и, как следствие, к отсутствию в данной окрестности минимума функции $P(\beta)$. Минимум $P(\beta)$, наблюдаемый на рис. 7 при $\beta = 1.5079$, объясняется влиянием нуля функции $F_+(\beta)$, расположенного в точке $\beta = h = 1.508966 + i2.93 \cdot 10^{-6}$, где h — постоянная распространения моды 0W, находящейся в окрестности критических условий (для данной моды $d_c = 0.515 \mu\text{m}$). В описанной ситуации уравнение (16) утрачивает смысл, а МНК сохраняет эффективность.

Рассмотрение табл. 3 свидетельствует об эффективности МНК и при восстановлении параметров пленок двуокиси кремния. Отметим, что в данном случае минимум кривой 2 на рис. 8 объясняется возбуждением вытекающей моды с $m = 0$.

Заключение

Условия призмного возбуждения вытекающих мод пленок с $n_f > n_s$ и $n_f < n_s$ качественно различаются.

В случае $n_f > n_s$ имеются два различных семейства дисперсионных кривых на комплексной плоскости, первое из которых отвечает собственным, а второе — вытекающим модам пленки. Между номерами $m = 1, 2, \dots$ дисперсионных кривых обоих семейств имеется однозначное соответствие, так как можно приближенно считать, что при критической толщине пленки собственная мода переходит в вытекающую моду с тем же номером. Исключение из этого правила составляет основная мода пленки (номер $m = 0$), ибо при рассмотрении вытекающих мод дисперсионная кривая с указанным номером не существует. Для каждой вытекающей моды можно указать две критических толщины пленки, определяющих диапазон изменения d , в котором возможно призмное возбуждение данной моды. Если пленка с $n_f > n_s$ направляет хотя бы одну собственную моду, то для оценки n_f и d пленки по минимумам распределения $P(\beta)$, измеряемого с помощью призмы связи, можно использовать приближенное дисперсионное уравнение для собственных и вытекающих мод, записанное через обратные тригонометрические функции. Однако если толщина пленки оказывается меньше критической толщины для ее основной собственной моды, то данная оценка утрачивает смысл, поскольку ввиду значительного затухания вытекающих мод соответствующие им минимумы функции $P(\beta)$ становятся ненаблюдаемыми.

В случае $n_f < n_s$ пленка может направлять только вытекающие моды. Для каждой из таких мод можно указать единственную критическую толщину пленки d_c . Мода допускает призмное возбуждение при условии $d > d_c$. Если пленка направляет не менее двух вытекающих мод, то возможна приближенная оценка n_f и d по минимумам распределения $P(\beta)$.

Для прецизионного восстановления показателей преломления, показателей поглощения и толщин тонких пленок, при призменном возбуждении которых наблюдается хотя бы один минимум функции $P(\beta)$, эффективен МНК.

В работе речь шла, главным образом, о волнах ТЕ-поляризации. Результаты для ТМ-волн в основном аналогичны.

Список литературы

- [1] Хомченко А.В., Сотский А.Б., Романенко А.А., Глазунов Е.В., Шульга А.В. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 6. С. 98–106.
- [2] Khotchenko A.V. Waveguide spectroscopy of thin films. NY.: Academic Press, 2005. 220 p.
- [3] Сотский А.Б. Теория оптических волноводных элементов. Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2011. 450 с.
- [4] Adams A.C., Schinke D.P., Capio C.D. // J. Electrochem. Soc. 1979. Vol. 126. N. 9. P. 1539–1543.
- [5] Ding T.N., Germire E. // Appl. Opt. 1983. Vol. 22. N. 20. P. 3177–3181.
- [6] Романенко А.А., Сотский А.Б. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 4. С. 88–95.
- [7] Ulrich R. // J. Opt. Soc. Am. 1970. Vol. 20. N. 10. P. 1337–1350.
- [8] Мумтра Р., Ли С. Аналитические методы в теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327 с.