

## Неустойчивость Розенцвейга в тонком слое магнитной жидкости

© В.М. Коровин

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия  
e-mail: l111@imec.msu.ru

(Поступило в Редакцию 7 марта 2013 г.)

На базе системы уравнений и граничных условий феррогидродинамики построена простая математическая модель начальной стадии нелинейного развития неустойчивости Розенцвейга в тонком слое нелинейно намагничивающейся вязкой феррожидкости, покрывающей горизонтальную ненамагничивающуюся пластину. С использованием линеаризованных уравнений этой модели получено дисперсионное соотношение и проведен его анализ. Найдены критическая намагниченность исходного слоя с плоской свободной поверхностью, пороговое волновое число, длина волны и характерное время развития наиболее быстро растущей моды. Аналитически получено уравнение кривой нейтральной устойчивости, применимое при любом физически допустимом законе намагничивания феррожидкости.

### Введение

Известно, что достаточно тонкий горизонтальный слой покоящейся магнитной жидкости, покрывающий дно кюветы, при включении вертикального магнитного поля может совершить распад на отдельные удаленные друг от друга вытянутые в вертикальном направлении капли с острыми вершинами [1]. Такой переход к стационарному состоянию в виде капель, периодически расположенных на поверхности дна, происходит под действием объемных и поверхностных магнитных сил, создаваемых полем, и реализуется лишь в том случае, когда вызываемая полем намагниченность  $M_0$  исходного слоя с плоской свободной поверхностью превышает некоторое критическое значение  $M_c$ , зависящее от физических параметров используемой жидкости. Если же  $M_0 < M_c$ , то изменение формы свободной поверхности жидкости не происходит. Исследованию этого явления — неустойчивости Розенцвейга тонких слоев — посвящено большое число экспериментальных и теоретических работ — см., например, монографию [1], статьи [2–4] и приведенную в них библиографию.

В случае глубокой магнитной жидкости неустойчивость Розенцвейга проявляется в формировании на свободной поверхности периодических ячеек из высоких острых пиков [1,5,6].

Наряду со слоями магнитных жидкостей на твердых плоских поверхностях исследовалась неустойчивость Розенцвейга в слое магнитной жидкости, плавающей поверх более тяжелой жидкости [1,7].

Проведенные многими авторами исследования показали, что независимо от толщины слоя при описании неустойчивости Розенцвейга важную роль играет хорошо известный в гидромеханике характерный линейный масштаб — капиллярная длина  $l_c$ . В имеющихся теоретических работах, посвященных неустойчивости Розенцвейга в тонких слоях, изучен в основном случай, когда толщина исходного плоского слоя  $c_0$  и  $l_c$  имеют одинаковый порядок.

Работы, относящиеся к слоям произвольной толщины, выполнены в рамках уравнений магнитостатики и линейной теории плоскопараллельных потенциальных течений при наличии магнитных сил. При этом основное внимание уделяется исследованию (в основном численному) дисперсионного уравнения с целью вычисления  $M_c$  и порогового волнового числа  $k_c$ . Приведенное в [1] дисперсионное уравнение для тонких слоев ( $c_0 \sim l_c$ ), записанное в безразмерных переменных, является трансцендентным и зависит от двух безразмерных параметров.

В последнее время проведены эксперименты [3,4] по исследованию неустойчивости Розенцвейга в тонких по сравнению с  $l_c$  слоях. Образующиеся при распаде столь тонких слоев периодические структуры из остроконечных капель представляют интерес при создании устройств для инъекции заряженных частиц с помощью сильных электрических полей [8].

В настоящей работе предложена сравнительно простая математическая модель нелинейного развития неустойчивости Розенцвейга в слое вязкой нелинейно намагничивающейся феррожидкости при  $c_0 \ll l_c$ . Эта модель является обобщением на случай феррогидродинамики хорошо известной в гидродинамике модели течения вязкой жидкости в тонком слое [9].

На базе линеаризованных уравнений предложенной модели выведено дисперсионное соотношение. В отличие от имеющихся работ полученное дисперсионное соотношение имеет полиномиальный вид и при использовании специальным образом введенной безразмерной частоты содержит один безразмерный параметр. Простота дисперсионного соотношения позволяет исследовать его аналитически.

### Определяющие уравнения

Рассматривается плоское нестационарное движение феррожидкости, покрывающей горизонтальную ненамаг-

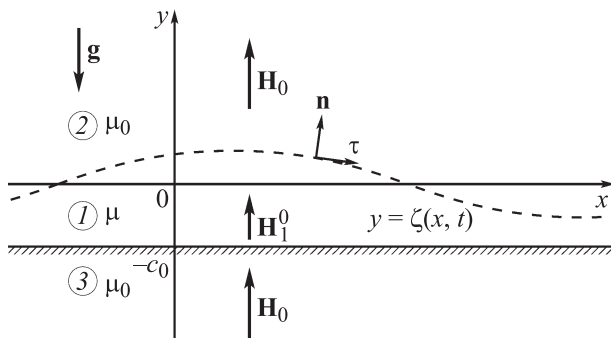


Рис. 1. Геометрия задачи и обозначения.

ничающуюся пластину. Движение вызывается включением в момент времени  $t = 0$  достаточно сильного однородного вертикального магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ , намагничивающего жидкость. Сверху жидкость граничит с газом, имеющим постоянное давление  $p_a$ . При  $t < 0$  жидкость не намагничена и находится в состоянии гидростатического равновесия, образуя слой постоянной толщины  $c_0$ .

Введем прямоугольную декартову систему координат  $x, y$  с базисом  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$ , ось  $x$  которой лежит в плоскости свободной поверхности первоначально покоящейся жидкости. Пусть уравнения  $y = \zeta(x, t)$ ,  $y = -c_0 = \text{const}$  представляют соответственно свободную поверхность движущейся магнитной жидкости и поверхность пластины (рис. 1). Будем отмечать индексами  $j = 1, 2, 3$  магнитное поле  $\mathbf{H}_j = (H_{jx}, H_{jy})$  и вектор магнитной индукции

$$\mathbf{B}_1 = \mu \mathbf{H}_1 \quad \text{или} \quad \mathbf{B}_1 = \mu_0(\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}),$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2, \quad \mathbf{B}_3 = \mu_0 \mathbf{H}_3 \quad (1)$$

в областях, занятых феррожидкостью ( $j = 1$ ) и немагнитными средами, расположенными выше ( $j = 2$ ) и ниже ( $j = 3$ ) слоя феррожидкости. Здесь  $\mu = \mu_0 \mu_r$  — магнитная проницаемость феррожидкости,  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}$  — магнитная постоянная, а  $\mathbf{M} = (\mu_r - 1)\mathbf{H}_1$  — вектор намагниченности.

Изучается поведение слоя феррожидкости в случае, когда  $\mu_r$  (а следовательно, и магнитная восприимчивость  $\chi = \mu_r - 1$ ) зависит от модуля вектора напряженности магнитного поля  $H_1 = \sqrt{H_{1x}^2 + H_{1y}^2}$ . В приложениях широко используются феррожидкости, у которых в полях умеренной напряженности  $\chi \sim 1$  [2].

Распределение магнитного поля описывается уравнениями магнитостатики

$$\frac{\partial H_{jy}}{\partial x} - \frac{\partial H_{jx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H_{lx}}{\partial x} + \frac{\partial H_{ly}}{\partial y} = 0,$$

$$j = 1, 2, 3, \quad l = 2, 3, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu H_{1x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu H_{1y}) = 0. \quad (3)$$

Ввиду первого уравнения (2) магнитное поле допускает представление  $\mathbf{H}_j = \nabla \Phi_j(x, y, t)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $\nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y}$ .

С учетом первого уравнения (1) уравнение (3) легко приводится к виду

$$\mu \left( \frac{\partial H_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial H_{1y}}{\partial y} \right) + \frac{\mu_t - \mu}{H_1} \left( H_{1x} \frac{\partial H_1}{\partial x} + H_{1y} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) = 0, \quad (4)$$

где  $\mu_t(H_1) = \frac{d\mu}{dH_1}$  — дифференциальная магнитная проницаемость феррожидкости.

Граничные условия на поверхностях раздела магнитной и немагнитных сред выражают непрерывность касательной составляющей вектора магнитного поля и непрерывность нормальной составляющей вектора индукции:

при  $y = \zeta(x, y)$ :

$$(H_{1x} - H_{2x})\tau_x + (H_{1y} - H_{2y})\tau_y = 0,$$

$$(\mu H_{1x} - \mu_0 H_{2x})n_x + (\mu H_{1y} - \mu_0 H_{2y})n_y = 0, \quad (5)$$

при  $y = -c_0$ :

$$H_{1x} = H_{3x}, \quad \mu H_{1y} = \mu_0 H_{3y}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  — единичный вектор нормали к кривой  $y = \zeta(x, t)$ , направленный из области 1 в область 2, а  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$  — единичный касательный вектор:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2}} \left( -\frac{\partial \zeta}{\partial x} \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y \right),$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2}} \left( \mathbf{a}_x + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \mathbf{a}_y \right). \quad (7)$$

Вдали от слоя магнитной жидкости поле однородно и направлено вертикально:

$$\text{при } y \rightarrow \infty: \mathbf{H}_2 \rightarrow H_0 \mathbf{a}_y; \quad \text{при } y \rightarrow -\infty: \mathbf{H}_3 \rightarrow H_0 \mathbf{a}_y. \quad (8)$$

В приближении феррогидродинамики плотность объемной магнитной силы  $\mathbf{f}_m$  записывается следующим образом:

$$\mathbf{f}_m = \mu_0 M \nabla H_1, \quad M = \chi \sqrt{H_{1x}^2 + H_{1y}^2}. \quad (9)$$

Движение жидкости описывается уравнением неразрывности и уравнениями Навье–Стокса, учитывающими магнитную силу

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_{mx}, \quad (11)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g + f_{mx}. \quad (12)$$

Здесь  $u, v$  — компоненты вектора скорости,  $\rho, p, \eta$  — плотность, давление и коэффициент динамической вязкости жидкости, а  $g$  — величина ускорения свободного падения.

Отметим, что уравнения движения (11), (12) содержат безразмерную функцию — магнитную восприимчивость  $\chi = \chi(H_1)$ .

На свободной поверхности жидкости  $y = \zeta(x, t)$  должны выполняться:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} = v, \quad (13)$$

динамические условия, выражающие равенство нормальных напряжений, действующих на противоположные стороны свободной поверхности, и отсутствие касательных напряжений

$$p - p_a = \frac{2\eta}{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \left[ \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 - 1 \right] \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right\} - \frac{\alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_0}{2 \left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right]} \left[ M_y - M_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right]^2, \quad (14)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left[ 1 - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 \right] + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

Последнее слагаемое в правой части динамического условия (14) представляет [1] магнитный скачок давления  $\frac{\mu_0}{2} (\mathbf{Mn})^2$ , а через  $\alpha$  обозначен коэффициент поверхностного натяжения.

На поверхности пластины скорость жидкости обращается в нуль при

$$y = -c_0: \quad u = 0, \quad v = 0. \quad (16)$$

Задача (2), (4)–(6), (8), (10)–(16) имеет точное решение, описывающее гидростатическое состояние магнитной жидкости с плоской свободной поверхностью при наличии кусочно-постоянного вертикального магнитного поля:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \zeta(x, t) = 0, \quad \mathbf{H}_1^0 = H_1^0 \mathbf{a}_y, \quad \mathbf{H}_2^0 = \mathbf{H}_3^0 = \mathbf{H}_0, \quad (17)$$

где  $H_1^0$  — решение нелинейного алгебраического уравнения  $\mu_r(H_1^0)H_1^0 = H_0$ . Поскольку функция  $\mu_r(H_1^0)$  однозначна, то решение этого уравнения единственно.

Потенциал кусочно-постоянного распределения поля (17) линейно зависит от  $y$

$$\Phi_1^0 = H_1^0 y, \quad \Phi_2^0 = H_0 y, \quad \Phi_3^0 = H_0 y + c_0 M_0, \quad (18)$$

где  $M_0 = \chi(H_1^0)H_1^0$  — намагниченность плоского слоя.

При наличии поля в случае плоской свободной поверхности распределение давления  $P_0$

$$P_0 = p_a - \rho g y - \frac{\mu_0}{2} M_0^2 \quad (19)$$

описывается выражением феррогидростатики.

### Асимптотический анализ уравнений магнитостатики в случае тонкого слоя

Рассматривается неустойчивость Розенцвейга в слое магнитной жидкости, характерная толщина которого  $c_0$  мала по сравнению с характерной длиной  $L$ , на которой функция  $\zeta(x, t)$  претерпевает изменение порядка  $c_0$ . Наличие малого параметра  $\varepsilon = c_0/L \ll 1$  позволяет существенно упростить относящиеся к феррожидкости уравнения (2), (4).

В процессе развития неустойчивости изменение формы свободной поверхности феррожидкости вызывает возмущение приложенного магнитного поля (17). Положим  $\mathbf{H}_l(x, y, t) = \mathbf{H}_l^0 + \mathbf{h}_l(x, y, t)$ ,  $\mathbf{H}_l = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}_l$ ,  $l = 2, 3$ . После подстановки этих выражений в систему уравнений (2) имеем

$$\frac{\partial h_{jy}}{\partial x} - \frac{\partial h_{jx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial h_{lx}}{\partial x} - \frac{\partial h_{ly}}{\partial y} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad l = 2, 3. \quad (20)$$

Из первого уравнения (20), относящегося к слою, следует  $h_{1x} \sim \varepsilon h_{1y}$ . Полагая  $h_{1y} \sim H_1^0$ , после отбрасывания величин порядка  $\varepsilon^2$  имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{h_{1x}^2 + (H_1^0 + h_{1y})^2} = \frac{\partial h_{1y}}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{h_{1x}^2 + (H_1^0 + h_{1y})^2} = \frac{\partial h_{1y}}{\partial y}, \quad H_1 = H_1^0 + h_{1y}.$$

С учетом полученных оценок, пренебрегая в уравнении (4) величинами порядка  $\varepsilon^2$ , находим

$$\mu_t(\beta) \frac{\partial h_{1y}}{\partial y} = 0, \quad \text{где } \beta = H_1^0 + h_{1y}.$$

Поскольку при любом физически допустимом законе намагничивания  $\mu_t(\beta) \neq 0$ , то с точностью до малых порядка  $\varepsilon^2$

$$\frac{\partial h_{1y}}{\partial y} = 0, \quad (21)$$

т.е. изменение вертикальной компоненты возмущения поля поперек рассматриваемого слоя пренебрежимо мало.

Введем потенциалы  $\varphi_j(x, y, t)$  возмущений магнитных полей  $\mathbf{h}_j = \nabla \varphi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  и положим

$$\Phi_j = \Phi_j^0(y) + \varphi_j(x, y, t), \quad j = 1, 2, 3, \quad \gamma = H_1^0 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y},$$

где  $\Phi_1^0(y)$  определены выражениями (18). При этом система уравнений (20), (21) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial y^2} = 0, \quad l = 2, 3, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0, \quad (22)$$

а выполнение граничных условий (5), (6) обеспечивается следующими условиями сопряжения функций  $\varphi_j(x, y, t)$ ,  $j = 1, 2, 3$  на поверхностях раздела сред с различными магнитными свойствами:

при  $y = \zeta(x, t)$ :  $\varphi_1 - \varphi_2 = M_0 \zeta$ ,

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \mu_r(\gamma) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + H_1^0 \right) - H_0, \quad (23)$$

при  $y = -c_0$ :  $\varphi_1 = \varphi_3$ ,

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = \mu_r(\gamma) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + H_1^0 \right) - H_0. \quad (24)$$

Из условий на бесконечности (8) следует

$$\text{при } y \rightarrow \infty: \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \rightarrow 0; \quad \text{при } y \rightarrow -\infty: \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \rightarrow 0. \quad (25)$$

Таким образом, в случае тонкого слоя потенциалы возмущений магнитных полей при развитии неустойчивости Розенцвейга описываются решением системы линейных уравнений (22), удовлетворяющим нелинейным граничным условиям (23), (24). Следует отметить, что линейное при линейном законе намагничивания условие непрерывности нормальной составляющей вектора индукции на поверхности пластины (24) в случае нелинейного закона намагничивания  $\mathbf{M} = \chi(H_1)\mathbf{H}_1$  оказывается нелинейным.

### Асимптотический анализ гидродинамической задачи и вывод эволюционного уравнения

Обращаясь к выражениям (9), с учетом проведенных оценок и уравнения (21) находим

$$f_{mx} = \mu_0 \chi(\beta) (H_1^0 + h_{1y}) \frac{\partial h_{1y}}{\partial x} [1 + O(\varepsilon^2)],$$

$$f_{my} = \mu_0 \chi(\beta) h_{1x} \frac{\partial h_{1x}}{\partial y} [1 + O(\varepsilon^2)], \quad \frac{f_{my}}{f_{mx}} = O(\varepsilon). \quad (26)$$

Оценка магнитного скачка давления  $\frac{\mu_0}{2}(\mathbf{Mn})^2$ , проведенная с учетом записи вектора единичной нормали (7), приводит к результату

$$\frac{\mu_0}{2} (\mathbf{Mn})^2 = \frac{\mu_0}{2} \chi^2(\beta) (H_1^0 + h_{1y})^2 [1 + O(\varepsilon^2)]. \quad (27)$$

С целью упрощения выкладок выделим нестационарную часть давления

$$p = P_0(y) + p'(x, y, t), \quad (28)$$

где  $P_0$  определено выражением (19). С учетом (26), (28) уравнения движения (11), (12) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &+ \mu_0 \chi(\beta) (H_1^0 + h_{1y}) \frac{\partial h_{1y}}{\partial x}, \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &+ \mu_0 \chi(\beta) h_{1x} \frac{\partial h_{1x}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (29)$$

Пренебрегая в динамических граничных условиях (14), (15) заведомо малыми величинами, с учетом (27), (28) получаем

$$\begin{aligned} \text{при } y = \zeta(x, t): \quad p' &= \rho g \zeta - 2\eta \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] \\ &- \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\mu_0}{2} [\chi^2(\beta) (H_1^0 + h_{1y})^2 - M_0^2], \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Оценим порядки фигурирующих в (29), (30) величин. С этой целью перейдем к безразмерным переменным (со звездочками):

$$x_* = \frac{\varepsilon x}{c_0}, \quad y_* = \frac{y}{c_0}, \quad t_* = \frac{\varepsilon u_0}{c_0} t, \quad \zeta_*(x_*, t_*) = \frac{\zeta}{c_0}, \quad (31)$$

$$u_*(x_*, y_*, t_*) = \frac{u}{u_0}, \quad v_*(x_*, y_*, t_*) = \frac{v}{\varepsilon u_0},$$

$$p'_*(x_*, y_*, t_*) = \frac{\varepsilon c_0}{\eta u_0} p', \quad h_{1x}^*(x_*, y_*, t_*) = \frac{h_{1x}}{\varepsilon H_1^0},$$

$$h_{1y}^*(x_*, y_*, t_*) = \frac{h_{1y}}{H_1^0},$$

где  $u_0$  — характерная продольная скорость.

Обозначим  $\vartheta = H_1^0(1 + h_{1y}^*)$ . В безразмерных переменных уравнения (29) и граничные условия (30) принимают вид (далее звездочки и штрих опущены)

$$\begin{aligned} \varepsilon R \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ \varepsilon S \chi(\vartheta) (1 + h_{1y}) \frac{\partial h_{1y}}{\partial x}, \\ \varepsilon^3 R \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &+ \varepsilon^3 S \chi(\vartheta) h_{1x} \frac{\partial h_{1x}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (32)$$

при  $y = \zeta(x, t)$ :

$$p = \varepsilon G \zeta + 2\varepsilon^2 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] - \frac{\varepsilon^3}{Ca} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{2} S [\chi^2(\vartheta)(1 + h_{1y})^2 - \chi^2(H_1^0)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] = 0, \quad (33)$$

где  $R = \frac{\rho u_0 c_0}{\eta}$  — число Рейнольдса,  $G = \frac{\rho g c_0^2}{\eta u_0}$  — гравитационное число,  $Ca = \frac{\eta u_0}{\alpha}$  — капиллярное число, а  $S = \frac{\mu_0 c_0}{\eta u_0} (H_1^0)^2$ .

Далее рассматривается случай  $R = O(1)$ ,  $S = O(\varepsilon^{-1})$ ,  $\chi = O(1)$ ,  $G = O(\varepsilon^{-1})$ ,  $Ca = O(\varepsilon^3)$ . Пренебрегая в (32), (33) величинами порядков  $\varepsilon$  и выше, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} - \varepsilon S \chi(\vartheta)(1 + h_{1y}) \frac{\partial h_{1y}}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

при  $y = \zeta(x, t)$ :

$$p = \varepsilon G \zeta - \frac{\varepsilon^3}{Ca} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{2} S [\chi^2(\vartheta)(1 + h_{1y})^2 - \chi^2(H_1^0)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

В размерных переменных эти упрощенные уравнения и граничные условия имеют вид

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu_0 \chi(\beta)(H_1^0 + h_{1y}) \frac{\partial h_{1y}}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (34)$$

при  $y = \zeta(x, t)$ :

$$p = \rho g \zeta - \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\mu_0}{2} [\chi^2(\beta)(H_1^0 + h_{1y})^2 - M_0^2], \quad (35)$$

при  $y = \zeta(x, t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (36)$$

Из второго уравнения (34) следует, что возмущение давления не изменяется поперек слоя. При этом, как видно из (34), (35), влияние горизонтальной компоненты возмущения магнитного поля  $h_{1x}(x, y, t)$  на динамику жидкости пренебрежимо мало.

Отметим, что при масштабах, выбранных для введения безразмерных переменных (31), члены, фигурирующие в каждом из уравнений (10) и (13), имеют одинаковый порядок.

Таким образом, развитие неустойчивости Розенцвейга описывается замкнутой системой упрощенных уравнений и граничных условий, представляющих гидродинамическую задачу (10), (13), (16), (34)–(36) и задачу магнитостатики (22)–(25). Эти уравнения применимы, естественно, лишь на интервале времени, в течение которого макроскопическая область, занятая жидкостью, остается односвязной после включения магнитного поля.

Сформулированная гидродинамическая задача допускает дальнейшее упрощение. В самом деле, из второго уравнения (34) следует, что возмущение давления в слое описывается выражением (35). Принимая во внимание (35), легко найти решение первого уравнения (34), удовлетворяющее условию прилипания на поверхности пластины (16) и условию отсутствия касательного напряжения (36) на свободной поверхности магнитной жидкости:

$$u(x, y, t) = \frac{b(x, t)}{2\eta} [y^2 - 2\zeta(c_0 + y) - c_0^2]. \quad (37)$$

$$b(x, t) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu_0 M(\beta) \frac{\partial h_{1y}}{\partial x} \equiv \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} - \mu_0 M(\beta) [\chi_t(\beta) + 1] \frac{\partial h_{1y}}{\partial x}, \quad (38)$$

$\chi_t(\beta) = \frac{dM}{dH_1} \Big|_{H_1=\beta}$  — дифференциальная магнитная восприимчивость.

Используя выражения (37) из уравнения неразрывности (10) находим распределение вертикальной компоненты скорости, удовлетворяющее условию непроницаемости на пластине (16)

$$v(x, y, t) = - \int_{-c_0}^y \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (39)$$

Легко видеть, что с учетом (39) кинематическое условие на свободной поверхности (13) приводится к виду

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-c_0}^{\zeta(x,t)} u dy = 0.$$

Вычислив интеграл, получаем уравнение, описывающее изменение с ростом времени возмущения начальной толщины слоя:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{1}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (c_0 + \zeta)^3 \left\{ \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} - \mu_0 M(\gamma) [\chi_t(\gamma) + 1] \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \Big|_{y=\zeta(x,t)} \right\} \right\} = 0. \quad (40)$$

Таким образом, эволюция формы плоской при  $t < 0$  свободной поверхности тонкого слоя феррожидкости описывается решением нелинейной задачи (22)–(25), (40). После вычисления функций  $\zeta(x, t)$ ,  $\varphi_j(x, y, t)$ ,  $j = 1, 2, 3$  возмущение давления и профили скоростей находятся из выражений (35), (37), (39).

Уравнение (40) отличается от хорошо известного эволюционного уравнения для тонкого слоя вязкой жидкости [9] наличием последнего члена, учитывающего воздействие на феррожидкость магнитных сил.

### Исследование неустойчивости Розенцвейга в линейной постановке

Для вычисления критической намагниченности и других характеристик используем линейризованную модель. Полагая  $|\zeta| \ll c_0$ ,  $|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}| \ll H_1^0$ , линейризуем эволюционное уравнение (40) и граничные условия (23), (24) задачи магнитостатики:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{c_0^3}{3\eta} \left\{ \rho g \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - \mu_0 M_0 [\chi_t(H_1^2) + 1] \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=\zeta(x,t)} \right\} = 0, \quad (41)$$

при  $y = 0$ :  $\varphi_1 - \varphi_2 = M_0 \zeta$ ,  $\mu_r(H_1^0) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$ , (42)

при  $y = c_0$ :  $\varphi_1 - \varphi_3 = 0$ ,  $\mu_r(H_1^0) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}$ . (43)

Представим функции  $\zeta(x, t)$ ,  $\varphi_j(x, y, t)$ ,  $j = 1, 2, 3$  в форме линейных суперпозиций нормальных мод — решений уравнений (41), (22), имеющих, соответственно вид

$$Z(k) \exp[i(kx - \omega t)], \quad F_j(y, k) \exp[i(kx - \omega t)], \quad j = 1, 2, 3. \quad (44)$$

Здесь  $i$  — мнимая единица,  $k$  — волновой вектор (действительный параметр), а функцию  $\omega(k)$  требуется найти из рассматриваемых уравнений и граничных условий.

После подстановки соответствующих выражений (44) в уравнения (22) и в линейризованные граничные условия (42), (43) получаем

$$\frac{d^2 F_1}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2 F_j}{dy^2} - k^2 F_j = 0, \quad j = 2, 3,$$

при  $y = 0$ :  $F_1 - F_2 = M_0 Z$ ,  $\mu_r(H_1^0) \frac{dF_1}{dy} = \frac{dF_2}{dy}$ ,

при  $y = -c_0$ :  $F_1 = F_3$ ,  $\mu_r(H_1^0) \frac{dF_1}{dy} = \frac{dF_3}{dy}$ .

Исчезающее при  $y \rightarrow \pm\infty$  решение этой задачи с точностью до малых порядка  $kc_0$  записывается следующим образом:

$$F_1 = \frac{1}{2\mu_r(H_1^0)} M_0 Z [k(c_0 + y) + \mu_r(H_1^0)],$$

$$F_2 = -\frac{1}{2} M_0 Z \exp(-ky), \quad F_3 = \frac{1}{2} M_0 Z \exp[k(c_0 + y)]. \quad (45)$$

Учитывая первое выражение (45) и подставляя (44) в линейризованное эволюционное уравнение (41), получаем дисперсионное соотношение

$$\omega = -i \frac{c_0^3}{3\eta} k^2 \left[ \rho g + \alpha k^3 - \frac{\mu_0}{2} M_0^2 \sigma k \right], \quad (46)$$

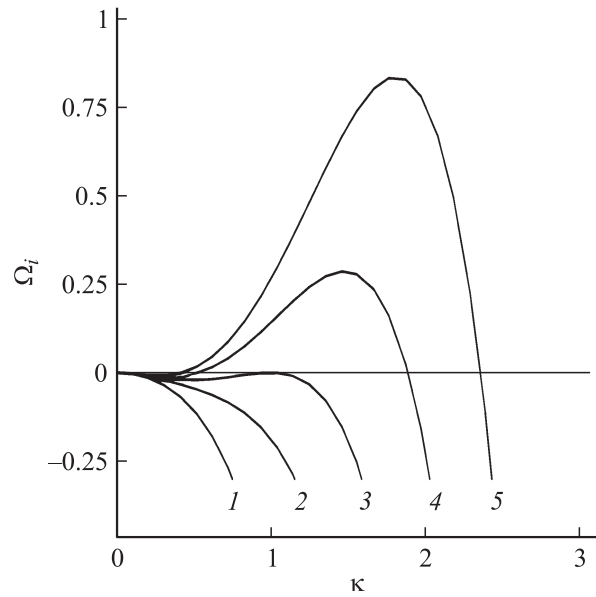


Рис. 2. Дисперсионные зависимости при различной намагниченности,  $q$ : 1 — 0, 2 — 0.85, 3 — 1, 4 — 1.1, 5 — 1.85.

где

$$\sigma(H_1^0) = \frac{\chi_t(H_1^0) + 1}{\chi_c + 1} > 0, \quad \chi_c = \frac{M_0}{H_1^0}.$$

Следует отметить, что выражение (46) применимо при любом физически допустимом законе намагничивания феррожидкости.

При нелинейном намагничивании из графиков кривых намагничивания, реализующихся в экспериментах [1], следует  $\chi_t(H_1^0) < \chi_c$  при  $H_1^0 > 0$ , так что  $\sigma(H_1^0) < 1$ . Если же намагничивание линейно, то, очевидно,  $\sigma = 1$ .

Обозначим  $\omega_i = \text{Im } \omega$  и введем безразмерные величины

$$\kappa = \kappa l_c, \quad \Omega_i = \frac{1}{\text{Bo}} \frac{\eta}{\rho g c_0} \omega_i, \quad q = \frac{1}{2} M_0^4 \sqrt{\frac{\sigma^2 \mu_0^2}{\rho g \alpha}}, \quad (47)$$

где  $l_c = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}$  — капиллярная длина, а  $\text{Bo} = \left(\frac{c_0}{l_c}\right)^2 = \frac{\rho g c_0^2}{\alpha}$  — число Бонда.

В безразмерных переменных (47) дисперсионное соотношение (46) принимает вид

$$\Omega_i = -\frac{1}{3} \kappa^2 (1 - 2q^2 \kappa + \kappa^2). \quad (48)$$

Из рис. 2, иллюстрирующего влияние параметра  $q$  — безразмерной намагниченности феррожидкости — на дисперсионную зависимость  $\Omega_i(\kappa, q)$ , видно, что с ростом  $q$  происходит перемена знака  $\Omega_i(\kappa, q)$ . Вследствие этого плоская свободная поверхность теряет устойчивость.

Критическая намагниченность  $q_c$  исходного плоского слоя и безразмерное волновое число  $\kappa_c$ , определяющее

порог устойчивости, определяются из системы уравнений

$$\Omega_i(\kappa_c, q_c) = 0, \quad \frac{d\Omega_i(\kappa_c, q_c)}{d\kappa} = 0.$$

Отсюда находим  $\kappa_c = 1$ ,  $q_c = 1$ , или в размерном виде

$$k_c = \frac{1}{l_c}, \quad M_c = 2 \sqrt[4]{\frac{\rho g \alpha}{\sigma^2 \mu_0^2}}, \quad (49)$$

так что можем записать  $q = M_0/M_c$ .

В рассматриваемом случае тонкого слоя вязкой нелинейно намагничивающейся феррожидкости пороговое волновое число (49) совпадает с результатом [5], полученным для невязкой линейно намагничивающейся феррожидкости, занимающей нижнее полупространство. При этом критическая намагничённость (49) оказывается больше величины для линейно намагничивающейся жидкости [5].

Выражение (49) для  $M_c$  применимо при любом физически допустимом законе намагничивания. В частности, в случае линейно намагничивающейся феррожидкости — при  $\sigma = 1$  — критическая намагничённость  $M_{lc}$  выражается формулой

$$M_{lc} = 2 \sqrt[4]{\frac{\rho g \alpha}{\mu_0^2}}.$$

Легко видеть, что при одинаковых плотностях жидкостей и равных коэффициентах поверхностного натяжения  $M_{lc}/M_c = \sqrt{\sigma} < 1$ .

Таким образом, тонкий слой нелинейно намагничивающейся феррожидкости более устойчив по сравнению с линейно намагничивающимся тонким слоем.

Аналогичный качественный вывод следует из приведенных в [5] формул для критических намагничённостей линейно и нелинейно намагничивающихся покоящихся феррожидкостей, занимающих нижнее полупространство.

С использованием дисперсионного соотношения (48) легко выписать условие для вычисления волнового числа  $\kappa_m$ , реализующего при фиксированном  $q > 1$  максимум функции  $\Omega_i(\kappa, 1)$

$$\left. \frac{d\Omega_i}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_m} = 0. \quad (50)$$

В рамках линейной теории мода с волновым числом  $\kappa_m$  при фиксированном  $q > 1$  растет наиболее быстро. Известно, что характерное расстояние между соседними каплями, образующимися после распада слоя, определяется размерной длиной волны этой моды  $\lambda_m = \frac{2\pi l_c}{\kappa_m}$ .

Из уравнения (50) находим

$$\kappa_m(q) = \frac{1}{4} (3q^2 + \sqrt{9q^2 - 8}).$$

Как и следовало ожидать,

$$\kappa_m(1) = \kappa_c, \quad \left. \frac{d^2\Omega_i}{d\kappa^2} \right|_{\kappa=\kappa_m, q>1} < 0.$$

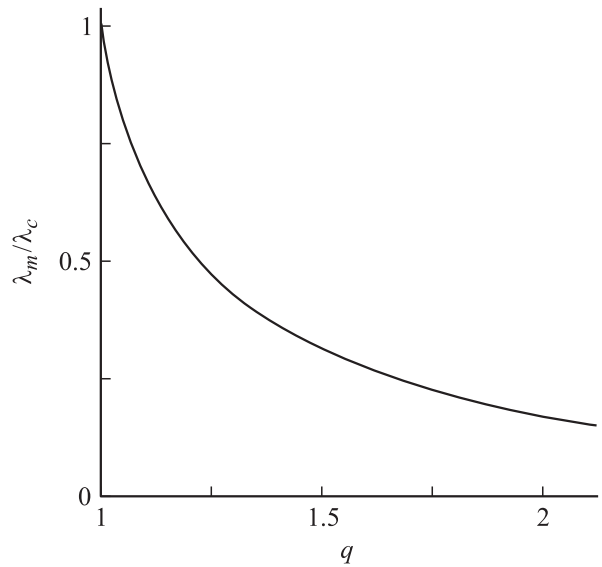


Рис. 3. Зависимость длины волны наиболее быстро растущей моды от намагничённости.

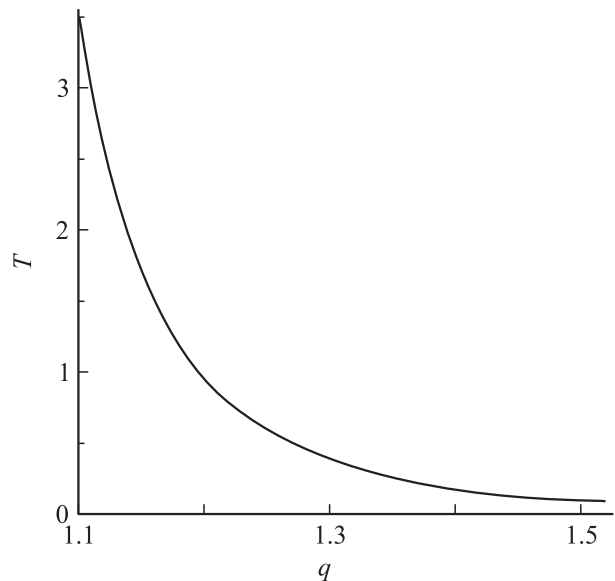


Рис. 4. Зависимость характерного времени развития наиболее быстро растущей моды от намагничённости.

Представленный на рис. 3 график функции

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_c} = \frac{4}{3q^2 + \sqrt{9q^2 - 8}}, \quad \lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$$

показывает, что с увеличением намагничённости исходного плоского слоя феррожидкости (путем включения приложенного магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  большей напряженности) расстояние между соседними каплями уменьшается.

Обращаясь к дисперсионному соотношению (48), легко выписать характерное безразмерное время развития  $T(q) = \Omega_i^{-1}(\kappa_m, q)$  моды, наиболее быстро растущей при

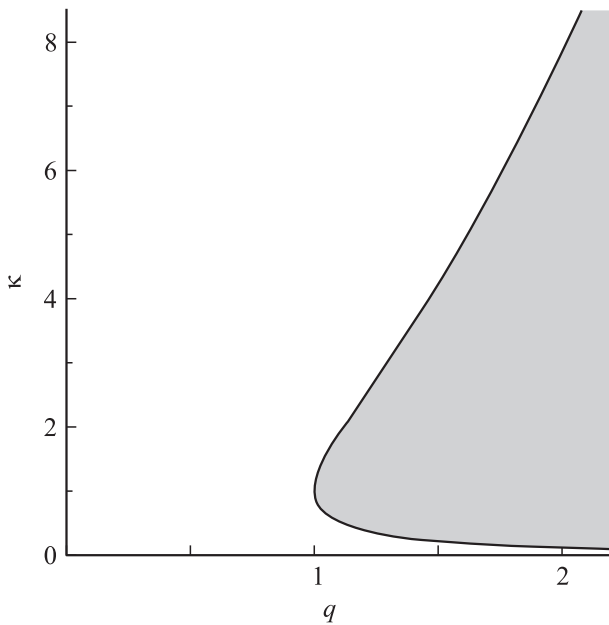


Рис. 5. Нейтральная кривая.

фиксированном  $q > 1$

$$T(q) = \frac{96}{27q^8 - 36q^4 + q^2(9q^4 - 8)^{3/2} + 8}.$$

При  $q = 1 + \delta$ ,  $0 < \delta \ll 1$  отсюда находим  $T(\delta) = 3/4\delta$ .

Представленный на рис. 4 график функции  $T = T(q)$  показывает, что уровень намагниченности исходного плоского слоя феррожидкости существенно влияет на характерное время развития наиболее быстро растущей моды.

Из дисперсионного соотношения (48) следует, что при любом физически допустимом законе намагничивания феррожидкости уравнение кривой нейтральной устойчивости, вдоль которой в плоскости  $(q, \kappa)$  при  $q > 1$  выполняется условие  $\Omega_i = 0$ , записывается с использованием двузначной функции

$$\kappa = q^2 \pm \sqrt{q^4 - 1}.$$

График этой функции показан на рис. 5. С ростом намагниченности  $M_0$  исходного слоя с плоской свободной поверхностью диапазон неустойчивых мод (затемненная на рис. 5 область) существенно расширяется.

В линейной постановке основной вклад в интегральном представлении возмущения  $\zeta(x, t)$  толщины плоского слоя создают моды с волновыми векторами, лежащими в малой окрестности точки  $k_m$ . Ввиду этого при асимптотическом анализе определяющих уравнений в качестве малого параметра допустимо принять величину  $\varepsilon = c_0/\lambda_m$ . Таким образом, условием применимости первого уравнения (22) и упрощенной системы гидродинамических уравнений (34) и граничных условий (35), (36), используемых при выводе эволюционного уравнения (40), является условие  $c_0/l_c \equiv \sqrt{\text{Bo}} \ll 2\pi/\kappa_m$ .

## Заключение

Рассмотрен слой нелинейно намагничивающейся вязкой феррожидкости, покрывающий горизонтальную ненамагничивающуюся пластину. Верхней границей слоя является поверхность раздела с газом, давление в котором постоянно. Первоначально жидкость покоится, образуя слой постоянной толщины  $c_0$ , малой ( $\varepsilon = c_0/l_c \ll 1$ ) по сравнению с капиллярной длиной  $l_c$ . В некоторый момент времени включается достаточно сильное однородное вертикальное магнитное поле, вызывающее появление магнитных сил, под действием которых возникает движение феррожидкости.

В рамках системы уравнений феррогидродинамики формулировка краевой задачи о рассматриваемом движении жидкости, записанная в безразмерных переменных, помимо магнитной восприимчивости  $\chi$  (безразмерной физической характеристики) содержит четыре безразмерных параметра: число Рейнольдса  $R$ , гравитационное число  $G$ , капиллярное число  $Ca$  и параметр  $S$ , введенный таким образом, что  $\varepsilon S \chi$  представляет отношение характерной плотности объемных магнитных сил к вязким силам.

Применительно к случаю  $R = O(1)$ ,  $G = O(\varepsilon^{-1})$ ,  $Ca = O(\varepsilon^3)$ ,  $S = O(\varepsilon^{-1})$ ,  $\chi = O(1)$  проведен асимптотический анализ системы уравнений и граничных условий феррогидродинамики. С использованием полученных упрощенных уравнений и граничных условий, учитывающих лишь члены лидирующего порядка, построена математическая модель нелинейного развития неустойчивости Розенцвейга на некотором начальном интервале времени, предшествующем моменту распада слоя на отдельные удаленные друг от друга капли.

Модель состоит из нелинейной краевой задачи магнитостатики о расчете магнитного поля в тонком слое феррожидкости с изменяющейся формой свободной поверхности, заключенном между ненамагничивающимися средами и подверженном воздействию заданного на бесконечности вертикального однородного поля, и нелинейного уравнения в частных производных, описывающего эволюцию во времени возмущения начальной толщины слоя. Это уравнение является обобщением на случай феррогидродинамики хорошо известного в гидродинамике уравнения, описывающего течение по горизонтальной плоскости тонкого слоя вязкой жидкости, имеющей свободную поверхность [9].

На базе предложенной модели после ее линеаризации получено дисперсионное соотношение полиномиального вида. При выбранном специальным образом обезразмеривании частоты безразмерная форма записи дисперсионного соотношения содержит только один параметр — безразмерную намагниченность  $q$  исходного слоя с плоской свободной поверхностью. Полученное дисперсионное соотношение применимо при любом физическом допустимом законе намагничивания феррожидкости.

Аналитически проведен анализ дисперсионного соотношения. Вычислены величина критической намагничен-



ности  $M_c$  плоского слоя и пороговое волновое число  $k_c$ . Показано, что  $M_c$  зависит, а  $k_c$  не зависит от закона намагничивания феррожидкости, причем полученная для тонкого слоя величина  $k_c$  совпадает с результатом для глубокой жидкости [5].

Применительно к двум тонким слоям магнитных жидкостей с одинаковыми плотностями и равными коэффициентами поверхностного натяжения установлено, что при нелинейном намагничивании величина  $M_c$  оказывается большей по сравнению со случаем линейного намагничивания, т. е. нелинейно намагничивающийся слой более устойчив.

Найдены зависящие от закона намагничивания и величины намагниченности исходного слоя характерное время развития и длина волны  $\lambda_m$  наиболее быстро растущей при фиксированном  $q > 1$  моды, определяющей по порядку величины характерное расстояние между соседними каплями, образующимися после распада слоя. Проведенный анализ показал, что при включении приложенного поля большей напряженности  $\lambda_m$  уменьшается.

Получено уравнение кривой нейтральной устойчивости и построена область неустойчивости в плоскости параметров: намагниченность  $q$  плоского слоя — безразмерное волновое число  $\kappa = kl_c$ . Найденное уравнение и построенная область неустойчивости применимы при любом законе намагничивания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00051).

## Список литературы

- [1] Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
- [2] Abou B., Néron de Surgy G., Wesfreid J.-E. // J. Phys. II France. 1997. Vol. 7. P. 1159–1171.
- [3] Chen Ch.-Yao, Cheng Z.-Y. // Phys. Fluids. 2008. Vol. 20. N 5. P. 054 105/1–0 540 105/8.
- [4] Диканский Ю.И., Закирян А.Р., Мкртчян Л.С. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 9. С. 38–43.
- [5] Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
- [6] Блум Э.Я., Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитные жидкости. Рига: Зинатне, 1989. 386 с.
- [7] Vacri J.-C., Perzynski R., Salin D. // C.R. Acad. Sci. Paris. 1988. Vol. 307. Ser. II. P. 699–704.
- [8] Zahn M. // J. Nanopart. Res. 2001. Vol. 3. P. 73–78.
- [9] Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. // Rev. Mod. Phys. 1997. Vol. 69. N 3. P. 931–980.