

Об оценке упругих напряжений в приповерхностных слоях твердотельных объектов, создаваемых термоупругими деформациями при поглощении нестационарного лазерного излучения

© К.Л. Муратиков

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: klm.holo@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 10 апреля 2013 г.)

В рамках трехмерной модели и квазистатического приближения получены аналитические выражения для расчета радиальной и тангенциальной компонент тензора упругих напряжений, генерируемых нестационарным лазерным излучением в приповерхностных слоях твердотельных объектов. Проанализировано поведение указанных компонент тензора напряжений как в случае сильной, так и слабой фокусировки лазерного излучения на поверхность объекта.

Воздействие лазерного излучения на конденсированные среды часто сопровождается выделением тепловой энергии значительной плотности. При этом, несмотря на относительно невысокий коэффициент преобразования световой энергии в энергию термоупругих деформаций, величина возникающих механических напряжений вполне может достигать значений, сравнимых с пределом прочности материала. Ситуации подобного рода обычно реализуются при фокусировке лазерного излучения на поверхность объекта или при короткой длительности лазерного импульса [1]. В связи с этим при проведении лазерных экспериментов становится актуальной проблема оценки величины термоупругих напряжений, возникающих в твердотельных объектах с различными значениями упругих и теплофизических параметров.

В общем случае решение задач по расчету нестационарных термоупругих деформаций и напряжений в твердотельных объектах связано с серьезными математическими трудностями. В связи с этим в работах [2,3] был развит подход, позволяющий решать задачи подобного рода в квазистатическом приближении. В рамках этого приближения предполагается, что размеры объекта и длина возбуждаемых в нем тепловых волн существенно меньше длин акустических волн. Следует отметить, что подобные условия часто реализуются на практике (например, при фотоакустических экспериментах с твердотельными объектами [4,5]). В рамках такого подхода в работе [6] было проанализировано поведение термоупругих напряжений в центре лазерного пучка при его слабой фокусировке на поверхность объекта. Предполагалось, что диаметр лазерного пучка не превосходит длину генерируемых в объекте тепловых волн. В настоящей работе подобные результаты обобщены на случай оценки термоупругих напряжений не только в центре лазерного пучка, но и на произвольном расстоя-

нии от него как при сильной, так и слабой фокусировке излучения на поверхность объекта.

В работе [6] в квазистатическом приближении были получены общие выражения для компонент тензора термоупругих напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ на поверхности объекта со свободной границей, занимающего полупространство $z > 0$ (граница объекта расположена в плоскости (x, y) , рис. 1). При поверхностном характере поглощения лазерного излучения, гармоническом законе его изменения во времени и гауссовском пространственном распределении плотности мощности в пучке они определяются равенствами

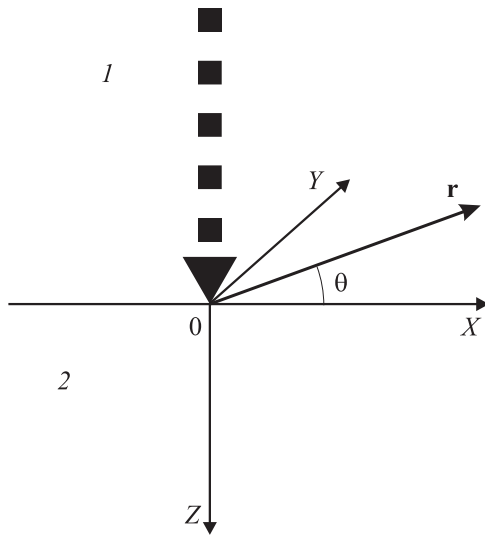
$$\sigma_{rr}(r, 0, \omega) = \frac{\alpha_{th} E W_L}{8\pi K_s} \int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp} e^{-\frac{a^2 k_{\perp}^2}{4}}$$

$$\times \frac{1}{(h + \xi)(k_{\perp} + \xi)} \left(\frac{k_{\perp} - \xi}{1 - \nu} J_0(k_{\perp} r) - \frac{2}{r} J_1(k_{\perp} r) \right), \quad (1)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, 0, \omega) = \frac{\alpha_{th} E W_L}{8\pi K_s} \int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp} e^{-\frac{a^2 k_{\perp}^2}{4}} \frac{1}{(h + \xi)(k_{\perp} + \xi)}$$

$$\times \left[\frac{(2\nu - 1)k_{\perp} - \xi}{1 - \nu} J_0(k_{\perp} r) + \frac{2}{r} J_1(k_{\perp} r) \right], \quad (2)$$

где W_L — мощность лазерного излучения, α_{th} — коэффициент теплового расширения, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, a — радиус лазерного пучка на поверхности изучаемого объекта, r — расстояние от центра лазерного пучка на поверхности объекта до точки наблюдения, K_s — теплопроводность материала образца, $h = H/K_s$, H — коэффициент, характеризующий теплообмен образца с окружающей средой, $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $J_0(k_{\perp} r)$ и $J_1(k_{\perp} r)$ — функция Бесселя нулевого и первого порядков, $\xi = \sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{2i}{\lambda^2}}$,



Геометрия расположения образца и возбуждающего лазерного излучения: 1 — возбуждающее лазерное излучение, 2 — образец.

$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}$ — длина тепловой волны в образце, κ — его температуропроводность, ω — круговая частота модуляции лазерного излучения.

Выражения (1) и (2) были получены с учетом теплообмена образца с окружающей средой. Вместе с тем большинство фотоакустических экспериментов обычно производится в воздушной среде при частотах больше 10^2 Hz. В этих условиях число Био имеет значения существенно меньше единицы для образцов из большинства материалов [7] и теплообмен с окружающей средой не играет существенной роли. Поэтому дальнейший анализ поведения компонент термоупругих напряжений в образце в рамках настоящей работы произведем без учета конвективного отвода тепла.

В общем случае выражения (1) и (2) имеют достаточно сложную структуру и могут быть использованы для определения компонент тензора напряжений с помощью численных расчетов. Однако в важных случаях сильной или слабой фокусировки лазерного излучения на поверхность образца интегралы, входящие в эти выражения, могут быть вычислены в аналитическом виде.

Рассмотрим сначала вопрос о поведении компонент тензора напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ в случае лазерного излучения достаточно сильно сфокусированного на поверхность образца, когда выполняется условие $a \ll \lambda_T$. Определим поведение указанных компонент сначала на расстояниях $r \geq \sqrt{2}a$ от центра возбуждающего лазерного пучка. В этом случае при вычислении интегралов в выражениях (1) и (2) экспоненту под знаком интегралов можно приближенно считать равной единице. Оставшиеся после этого интегралы могут быть найдены с помощью соотношения 6.5711 для определенных интегралов от алгебраических и цилиндрических функций из справочника [8]. Не останавливаясь на промежуточных вычислениях, приведем сразу окончательные выражения

для напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ на поверхности объекта в этом случае

$$\sigma_{rr}(r, 0, \omega) = \frac{2 - \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha_{th} E W_L}{4\pi K_s} \frac{i}{k_T^2 r^3} \times \left[1 - \left(1 + \sqrt{i} k_T r + \frac{i}{2} \frac{k_T^2 r^2}{2 - \nu} \right) e^{-\sqrt{i} k_T r} \right], \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, 0, \omega) = -\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{\alpha_{th} E W_L}{4\pi K_s} \frac{i}{k_T^2 r^3} \times \left[1 - \left(1 + \sqrt{i} k_T r + \frac{i k_T^2 r^2}{2} \right) e^{-\sqrt{i} k_T r} \right], \quad (4)$$

где $k_T = \frac{\sqrt{2}}{\lambda_T}$.

Выражения (3) и (4) позволяют проанализировать поведение компонент тензора напряжений при любых значениях $k_T r$. Так, в соответствии с (3) и (4) на больших расстояниях от центра сильно сфокусированного возбуждающего лазерного пучка при $k_T r \gg 1$ имеют место равенства

$$\sigma_{rr}(r, 0, \omega) \cong -\frac{2 - \nu}{1 - 2\nu} \sigma_{\theta\theta}(r, 0, \omega) \cong \frac{2 - \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha_{th} E W_L}{4\pi K_s} \frac{i}{k_T^2 r^3}. \quad (5)$$

Таким образом, в случае сильно сфокусированного лазерного излучения и при $r \geq \sqrt{2}a$, $k_T r \gg 1$ в соответствии с соотношением (5) обе компоненты тензора термоупругих напряжений убывают обратно пропорционально кубу расстояния от центра лазерного пучка. При этом радиальные и тангенциальные напряжения изменяются в противофазе. Следует отметить, что подобный закон изменения компонент тензора термоупругих напряжений с расстоянием совпадает с законом, полученным в работе [9] для компонент тензора упругих напряжений, создаваемых в твердом теле точечным дефектом.

Рассмотрим теперь характер изменения напряжений на расстояниях существенно меньше длины тепловой волны, когда $k_T r \ll 1$, но по-прежнему $r \geq \sqrt{2}a$. В этом случае в соответствии с (3) компонента тензора напряжений σ_{rr} изменяется по закону

$$\sigma_{rr}(r, 0, \omega) \cong -\frac{\alpha_{th} E W_L}{8\pi K_s} \frac{1}{r}. \quad (6)$$

Таким образом, в случае сильной фокусировки и выполнении условий $k_T r \ll 1$, $r \geq \sqrt{2}a$ при увеличении температуры в центре лазерного пучка напряжения в радиальном направлении будут носить сжимающий характер, а при ее уменьшении — растягивающий. При этом их величина убывает обратно пропорционально расстоянию от центра пучка. Что касается компоненты $\sigma_{\theta\theta}$, то она в рассматриваемом случае связана с σ_{rr} соотношением

$$\sigma_{\theta\theta}(r, 0, \omega) \cong -\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{\sqrt{i} k_T r}{3} \sigma_{rr}(r, 0, \omega). \quad (7)$$

Из соотношения (7) следует, что тангенциальные напряжения в рассматриваемом случае из-за условия $k_T r \ll 1$ имеют существенно меньшую величину по сравнению с радиальными, а также характеризуются дополнительным фазовым сдвигом. Следует отметить, что выражения (6) и (7) не удовлетворяют равенству $\sigma_{rr}(0, 0, \omega) = \sigma_{\theta\theta}(0, 0, \omega)$, которое обычно выполняется в задачах термоупругости (например, для круглых дисков) с распределением температуры, симметричным относительно центра [10]. Нарушение указанного равенства связано с тем, что полученные результаты (6) и (7) справедливы только при $r \geq \sqrt{2}a$. Случай $r \leq \sqrt{2}a$ нуждается в специальном рассмотрении.

Для рассмотрения поведения компонент тензора σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ на малых расстояниях от центра пучка $r \leq \sqrt{2}a$ при его сильной фокусировке можно воспользоваться тем, что экспонента под знаком интегралов в выражениях (1) и (2) быстро убывает при $k_{\perp} \geq \frac{2}{a}$. В связи с этим основной вклад в интегралы дают значения $k_{\perp} \leq \frac{2}{a}$. Но, при этих значениях k_{\perp} и при $r \ll \sqrt{2}a$ аргумент в бесселевых функциях имеет малую величину. Поэтому их можно заменить разложениями в ряд Тейлора. Ограничиваясь первыми членами этих разложений для лазерного излучения достаточно хорошо сфокусированного на поверхность образца (случай слабо сфокусированного излучения рассмотрен ниже) при $a \ll \lambda_T$ для σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$, получим следующий результат:

$$\sigma_{rr}(r, 0, \omega) \cong -\frac{\alpha_{th}EW_L}{32\sqrt{\pi}K_s} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{1-\nu} \frac{r^2}{2a^2}\right), \quad (8)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, 0, \omega) \cong -\frac{\alpha_{th}EW_L}{32\sqrt{\pi}K_s} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{1-\nu} \frac{3r^2}{2a^2}\right). \quad (8)$$

Из выражений (8) и (9) видно, что в соответствии с [10] выполняется условие $\sigma_{rr}(0, 0, \omega) = \sigma_{\theta\theta}(0, 0, \omega)$. Они также показывают, что при сильной фокусировке практически отсутствует фазовая задержка между напряжениями вблизи центра пучка, интенсивностью лазерного излучения и температурой в его центре. Поэтому в соответствии с (8) и (9) при росте интенсивности излучения на малых расстояниях от центра пучка радиальные и тангенциальные напряжения будут носить сжимающий характер, а при ее уменьшении растягивающий. При этом по мере удаления от центра пучка тангенциальные напряжения убывают несколько быстрее по сравнению с радиальными.

Рассмотрим теперь поведение компонент тензора термоупругих напряжений для лазерного излучения относительно слабо сфокусированного на поверхность объекта, когда выполняется условие $a \geq \lambda_T$. Из-за наличия в выражениях (1) и (2) под знаком интеграла экспоненты основной вклад в них дают значения $k_{\perp} \leq \frac{2}{3}$. Поэтому при вычислении интегралов в (1), (2) и выполнении условия $k_T a \geq 1$ можно воспользоваться приближенными равенствами $\xi \cong \frac{2i}{\lambda_T}$, $k_{\perp} + \xi \cong \frac{2i}{\lambda_T}$. После этого интегралы в выражениях (1) и (2) могут быть найдены с

помощью соотношений 6.6181, 6.6314, 6.6317 для определенных интегралов от цилиндрических, показательных и степенных функций из справочника [8]. В результате компоненты тензора напряжений в рассматриваемом случае могут быть получены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, 0, \omega) = & \frac{1}{1-\nu} \frac{\alpha_{th}EW_L}{4\sqrt{\pi}K_s} \frac{i e^{-\frac{r^2}{2a^2}}}{k_T^2 a^3} \\ & \times \left[\sqrt{\frac{i}{\pi}} a k_T e^{-\frac{r^2}{2a^2}} - \left(\nu - \frac{r^2}{a^2}\right) I_0\left(\frac{r^2}{2a^2}\right) \right. \\ & \left. - \left(1 - \nu + \frac{r^2}{a^2}\right) I_1\left(\frac{r^2}{2a^2}\right) \right], \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, 0, \omega) = & \frac{1}{1-\nu} \frac{\alpha_{th}EW_L}{4\sqrt{\pi}K_s} \frac{i e^{-\frac{r^2}{2a^2}}}{k_T^2 a^3} \\ & \times \left\{ \sqrt{\frac{i}{\pi}} a k_T e^{-\frac{r^2}{2a^2}} - \left[\nu - (2\nu - 1) \frac{r^2}{a^2}\right] I_0\left(\frac{r^2}{2a^2}\right) \right. \\ & \left. - \left[(2\nu - 1) \frac{r^2}{a^2} - 1 + \nu\right] I_1\left(\frac{r^2}{2a^2}\right) \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

где $I_0\left(\frac{r^2}{2a^2}\right)$ и $I_1\left(\frac{r^2}{2a^2}\right)$ — функция Бесселя нулевого и первого порядков от мнимого аргумента.

Выражения (10) и (11) справедливы при любых значениях r и a . Они могут быть существенно упрощены как при $r \geq \sqrt{2}a$, так и при $r \leq \sqrt{2}a$. Так, в соответствии с (10) и (11) на больших расстояниях от зоны воздействия лазерного излучения при $r \geq \sqrt{2}a$ рассматриваемые компоненты термоупругих напряжений связаны соотношениями

$$\sigma_{rr}(r, 0, \omega) \cong -\frac{3-4\nu}{3-2\nu} \sigma_{\theta\theta}(r, 0, \omega) \cong \frac{3-4\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_{th}EW_L}{16\pi K_s} \frac{i}{k_T^2 r^3}. \quad (12)$$

Таким образом, как и в случае сильно сфокусированного лазерного излучения при $r \geq \sqrt{2}a$, обе компоненты тензора термоупругих напряжений снова убывают обратно пропорционально кубу расстояния от центра лазерного пучка. При этом радиальные и тангенциальные напряжения в соответствии с соотношением (12) изменяются в противофазе.

На малых расстояниях от центра лазерного пучка при $r \leq \sqrt{2}a$ выражения (10) и (11) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, 0, \omega) \cong & \sigma_{\theta\theta}(r, 0, \omega) \\ \cong & \frac{1}{1-\nu} \frac{\alpha_{th}EW_L}{4\pi K_s} \frac{1}{\sqrt{i} k_T a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right). \quad (13) \end{aligned}$$

В соответствии с равенствами (13) для слабо сфокусированных лазерных пучков при $a \geq \lambda_T$ равенство $\sigma_{rr}(0, 0, \omega) = \sigma_{\theta\theta}(0, 0, \omega)$ имеет место не только при

$r = 0$, но и для всех значений r , удовлетворяющих условию $r \leq \sqrt{2}a$.

Полученные в настоящей работе результаты позволяют оценивать термоупругие напряжения, генерируемые нестационарным лазерным излучением, в различных материалах, а тем самым и определить предельно допустимую мощность используемого излучения. Они позволяют делать подобные оценки в таких практически важных областях как, например, фотоакустическая микроскопия [1], в которой для генерации акустических колебаний в объекте обычно используется сильно сфокусированное лазерное излучение. Напротив, при проведении спектроскопических фотоакустических измерений оно обычно слабо фокусируется или не фокусируется вообще [11]. Следует отметить, что при подборе соответствующих параметров полученные результаты могут быть использованы и для оценки термоупругих напряжений, возникающих в тканях биологической природы при воздействии на них нестационарным лазерным излучением.

В заключение автор выражает благодарность РФФИ за поддержку настоящей работы в рамках проекта 11-02-00664а.

Список литературы

- [1] Лямшев Л.М. Радиационная акустика. М.: Наука, 1996. 304 с.
- [2] Муратиков К.Л. // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. Вып. 11. С. 90–97.
- [3] Муратиков К.Л. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 2. С. 58–63.
- [4] Li B.C. // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 68. N 2. P. 482–487.
- [5] Hao H., Li B., Chen X. // Eur. Phys. J. Special Topics. 2008. Vol. 153. P. 419–421.
- [6] Муратиков К.Л. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 6. С. 156–158.
- [7] Torn R.D., O'Hara E.P. // J. Appl. Phys. 1982. Vol. 53. N 8. P. 5392–5400.
- [8] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физ.-мат. лит-ра, 1963. 1100 с.
- [9] Povstenko Yu.Z. // J. of Mathemat. Sci. 2001. Vol. 104. N 5. P. 1501–1505.
- [10] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
- [11] Жаров В.П., Летохов В.С. Лазерная оптико-акустическая спектроскопия. М.: Наука, 1984. 320 с.