01;03

Аналитическое решение модельного кинетического уравнения с переменной частотой столкновений на примере обтекания цилиндрической поверхности

© *В.Н. Попов*

Поморский государственный университет
E-mail: popov.vasily@pomorsu.ru

Поступило в Редакцию 31 июля 2002 г.

Представлен аналитический метод решения полупространственной краевой задачи для неоднородного кинетического уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме БГК (Бхатнагор, Гросс, Крук) модели, столкновительный параметр которой пропорционален абсолютной величине собственной скорости частиц газа, в задаче о течении неоднородного по температуре и массовой скорости потока разреженного газа вдоль поверхности прямого кругового цилиндра.

Аналитическое решение задачи о вычислении скорости скольжения неоднородного по температуре и массовой скорости разреженного газа вдоль поверхности прямого кругового цилиндра с учетом влияния искривленности межфазной поверхности на значения коэффициентов теплового и изотермического скольжений получено с использованием ЭС и БГК-моделей кинетического уравнения Больцмана с постоянной частотой столкновений в [1,2]. В представленной работе для решения этой задачи используется БГК модель, столкновительный параметр которой пропорционален абсолютной величине собственной скорости частиц газа [3,4].

Рассмотрим твердую цилиндрическую поверхность, обтекаемую потоком неоднородного по температуре разреженного газа при малых отклонениях от равновесного состояния. Течение газового потока будем описывать уравнением Больцмана с линеаризованным оператором столкновений в форме БГК-модели, столкновительный параметр которой пропорционален абсолютной величине собственной скорости частиц газа.

В рассматриваемой задаче возможны две качественно различные ситуации: поперечное обтекание поверхности цилиндра (при условии, что градиент температуры и массовая скорость газа вдали от поверхности цилиндра перпендикулярны его оси) и продольное обтекание (при условии, что градиент температуры и массовая скорость газа вдали от поверхности цилиндра направлены вдоль его оси). В качестве граничного условия на поверхности цилиндра примем модель диффузного отражения.

Линеаризуем функцию распределения, описывающую состояние газа, относительно функции распределения в объеме газа в приближении Чепмена–Энскога. Раскладывая функцию $Y(\rho, \varphi, \mathbf{C})$, учитывающую отклонение функции распределения газовых молекул по скоростям и координатам в слое Кнудсена от функции распределения в объеме газа, в ряд по малому параметру $1/R$

$$Y(\rho, \varphi, \mathbf{C}) = Y^{(1)}(\rho, \varphi, \mathbf{C}) + R^{-1}Y^{(2)}(\rho, \varphi, \mathbf{C}) + \dots, \qquad (1)$$

придем к уравнению

$$C_\rho \frac{\partial Y^{(2)}}{\partial \rho} + CY^{(2)}(\rho, \varphi, \mathbf{C}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} C \int \rho(C')K(\mathbf{C}, \mathbf{C}')Y^{(2)}(\rho, \varphi, \mathbf{C}')d\mathbf{C}'$$
$$- C_\varphi^2 \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial C_\rho} + C_\rho C_\varphi \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial C_\varphi} - C_\varphi \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial \varphi} \qquad (2)$$

с граничными условиями

$$Y^{(2)}(R, \varphi, \mathbf{C}) = -2\mathbf{C}\mathbf{U}^{(2)}, \quad (C_r > 0), \quad Y^{(2)}(\infty, \varphi, \mathbf{C}) = 0$$

для нахождения функции $Y^{(2)}(\rho, \varphi, \mathbf{C})$.

Здесь $Y^{(1)}(\rho, \varphi, \mathbf{C})$ совпадает с решением задачи о скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности [4], ρ — безразмерное расстояние, отсчитываемое от оси цилиндра; R — безразмерный радиус цилиндра; $\beta\mathbf{U}^{(2)}$ и $\beta\mathbf{C}$ — массовая скорость и собственная скорость частиц газа; $\rho(C) = \pi^{-3/2} C \exp(-C^2)$;

$$K(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + \frac{3}{2}\mathbf{C}\mathbf{C}' + \frac{1}{2}(C^2 - 2)\left(C'^2 - 2\right).$$

Уравнение (2) записано в цилиндрической системе координат, ось Oz которой совпадает с осью цилиндра.

Предположим, что градиент температуры вдали от поверхности цилиндра перпендикулярен его поверхности, т.е. отлична от нуля величина $(1/T_S)(\partial T/R\partial\varphi)|_S$.

В этом случае

$$Y^{(1)}(x,\varphi,\mathbf{C}) = C_\varphi\left(C - \frac{5}{2C}\right)\exp(-x/\mu)\Theta_+(\mu), \tag{3}$$

$$Y^{(2)}(x,\varphi,\mathbf{C}) = C_\varphi Z(x,\varphi,C_\rho) + \sum_k b_k(C_z,C_\varphi)L_k(x,\varphi,C_\rho), \tag{4}$$

где C_φ в совокупности с $b_k(C_z,C_\varphi)$ образует полную систему ортогональных (в смысле скалярного произведения) многочленов, $\Theta_+(\mu)$ — ступенчатая функция Хэвисайда; $x = \rho - R$.

Перейдем далее к сферической системе координат в пространстве скоростей [4]

$$C_\rho = C\cos\eta;\quad C_\varphi = C\sin\eta\cos\xi;\quad C_z = C\sin\eta\sin\xi.$$

Обозначим $\mu = \cos\eta$. Подставляя разложения (3) и (4) в (2), домножая полученное соотношение на $\exp(-C^2)\cos\xi$ и интегрируя по ξ и C соответственно от 0 до 2π и от 0 до $+\infty$, приходим к однородному интегродифференциальному уравнению

$$\mu\frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x,\varphi,\mu) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(1-\tau^2)Z(x,\varphi,\tau)d\tau \tag{5}$$

с граничными условиями

$$Z(0,\varphi,\mu) = -2U_\varphi^{(2)}\big|_S\ (\mu > 0),\quad Z(\infty,\varphi,\mu) = 0. \tag{6}$$

Общее решение (5) имеет вид [4]

$$Z(x,\varphi,\mu) = A_0 + A_1(x-\mu) + \int_{-1}^{1}\exp(-x/\eta)\Phi(\eta,\mu)n(\eta,\varphi)d\eta, \tag{7}$$

$$\Phi(\eta,\mu) = \frac{3}{4}\eta P\frac{1}{\eta-\mu} + \frac{\lambda(\eta)}{1-\eta^2}\delta(\eta-\mu),\quad \lambda(\eta) = 1 + \frac{3}{4}\eta\int_{-1}^{1}\frac{1-\mu^2}{\mu-\eta}d\mu,$$

$$X(z) = \frac{1}{z}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\xi(\tau)d\tau}{\tau - z}\right), \quad \xi(\tau) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{4\lambda(\tau)}{3\pi\tau(1-\tau^2)},$$

$\lambda(z)$ — дисперсионная функция, Px^{-1} — распределение в смысле главного значения при интегрировании x^{-1}, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. На действительной положительной полуоси интеграл в $X(z)$ понимается в смысле главного значения. Для краткости записи аргумент φ в $n(\eta, \varphi)$ далее опускаем.

Решение (7) при $A_0 = A_1 = 0$ удовлетворяет граничному условию на бесконечности. Подберем теперь $n(\eta)$ так, чтобы оно удовлетворяло граничному условию на стенке. Полагая в (7) $x = 0$, находим

$$-2U_\varphi^{(2)}\big|_S = \frac{3}{4}\int\limits_0^1 \frac{\eta n(\eta)}{\eta - \mu}\,d\eta + \frac{\lambda(\mu)}{1-\mu^2}\,n(\mu). \tag{8}$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z) = \int\limits_0^1 \frac{\eta n(\eta)}{\eta - z}\,d\eta. \tag{9}$$

Для граничных значений $N(z)$ и $\lambda(z)$ сверху и снизу соответственно на разрезах [0,1] и $[-1, 1]$ справедливы формулы Сохоцкого

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\pi i\mu n(\mu), \quad N^+(\mu) + N^-(\mu) = 2\int\limits_0^1 \frac{\eta n(\eta)}{\eta - \mu}\,d\eta,$$

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = \frac{3\pi i}{2}\,\mu(1-\mu^2), \qquad \lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu).$$

С учетом записанных соотношений сведем (8) к однородной краевой задаче

$$\left[N^+(\mu) + \frac{8}{3}\,U_\varphi^{(2)}\big|_S\right]\lambda^+(\mu) - \left[N^-(\mu) + \frac{8}{3}\,U_\varphi^{(2)}\big|_S\right]\lambda^-(\mu) = 0.$$

Решая задачу факторизации коэффициента полученной краевой задачи, находим

$$\left[N^+(\mu) + \frac{8}{3}\,U_\varphi^{(2)}\big|_S\right]X^+(\mu) - \left[N^-(\mu) + \frac{8}{3}\,U_\varphi^{(2)}\big|_S\right]X^-(\mu) = 0.$$

Решение записанной краевой задачи имеет вид

$$N(z) = -\frac{8}{3} U_\varphi^{(2)}\big|_S. \tag{10}$$

Для того чтобы (10) и (9) определяли одну и ту же функцию, необходимо, чтобы $N(z) = O(1/z)$ при $|z| \to \infty$. Отсюда находим $U_\varphi^{(2)}|_S = 0$.

Таким образом, использование БГК-модели с переменной частотой столкновений в задаче о тепловом скольжении разреженного газа вдоль твердой сферической поверхности в случае поперечного обтекания прямого кругового цилиндра дает нулевую поправку на кривизну.

В случае продольного обтекания цилиндра отлична от нуля величина $(1/T_S)(\partial T/\partial z)|_S$. Соответственно

$$Y^{(1)}(x, \mathbf{C}) = C_z \left(C - \frac{5}{2C}\right) \exp(-x/\mu)\Theta_+(\mu),$$

$$Y^{(2)}(x, \mathbf{C}) = C_z Z_1(x, C_\rho) + \sum_k b_k(C_z, C_\varphi) L_k^{(1)}(x, C_\rho).$$

Уравнение и граничные условия для $Z_1(x, C_\rho)$ при этом с точностью до обозначений совпадают соответственно с (5) и (6). Отсюда находим $U_z^{(2)}|_S = 0$. Таким образом, и в случае продольного обтекания потоком неоднородного по температуре разреженного газа поверхности прямого кругового цилиндра получаем нулевую поправку на кривизну.

Предположим далее, что касательная к поверхности компонента массовой изменяется в направлении нормали к поверхности, а вдали от поверхности цилиндра массовая скорость перпендикулярна его оси. В этом случае отлична от нуля величина $(\partial U_\varphi/\partial \rho)|_S$, причем

$$Y^{(1)}(x, \varphi, \mathbf{C}) = C_\varphi \psi(x, \varphi, \mu), \tag{11}$$

$$\psi(x, \varphi, \mu) = \int_0^1 \exp(-x/\eta)\Phi(\eta, \mu) a(\eta, \varphi)\, d\eta,$$

$$Y^{(2)}(x, \varphi, \mathbf{C}) = C_\varphi Z_2(x, \varphi, C_\rho) + \sum_k b_k(C_z, C_\varphi) L_k^{(2)}(x, \varphi, C_\rho). \tag{12}$$

Подставляя (11) и (12) в (2) и переходя в полученном уравнении в сферическую систему координат в пространстве скоростей, приходим к уравнению

$$\mu \frac{\partial Z_2}{\partial x} + Z_2(x, \varphi, \mu) = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} (1-\tau^2) Z_2(x, \varphi, \tau) d\tau - \frac{3}{2}(1-\mu^2)\frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \mu\psi(x, \varphi, \mu) \qquad (13)$$

с граничными условиями

$$Z_2(0, \varphi, \mu) = -2U_\varphi^{(2)}\big|_S \ (\mu > 0), \quad Z_2(\infty, \varphi, \mu) = 0. \qquad (14)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $\mu\psi(x, \varphi, \mu)$ не вносит вклада в скорость скольжения на поверхности, так как отвечающее ему частное решение уравнения (13) имеет вид $x\psi(x, \varphi, \mu)$ и на поверхности (при $x = 0$) обращает в нуль.

Сравнивая (13) и (14) с аналогичными результатами, полученными в [5] при решении задачи об обтекании твердой сферической поверхности потоком неоднородного по массовой скорости разреженного газа, находим, что скорость поперечного обтекания прямого кругового цилиндра в 1.5 раза больше скорости изотермического обтекания твердой сферической поверхности, т.е. $U_\varphi^{(2)}|_S = 0.42857145 \frac{\partial U_\varphi}{\partial \rho}|_S$. Здесь $0.2857143 \frac{\partial U_\theta}{\partial \rho}|_S$ — скорость скольжения, вычисленная в [5].

В случае продольного обтекания цилиндрической поверхности отличной от нуля будет величина $(\partial U_z/\partial \rho)|_S$. Соответственно

$$Y^{(1)}(x, \mathbf{C}) = C_z \psi(x, \mu),$$

$$Y^{(2)}(x, \mathbf{C}) = C_z Z_3(x, C_\rho) + \sum_k b_k(C_z, C_\varphi) L_k^{(3)}(x, C_\rho),$$

$$\mu \frac{\partial Z_3}{\partial x} + Z_3(x, \varphi, \mu) = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} (1-\tau^2) Z_3(x, \varphi, \tau) d\tau - (1-\mu^2)\frac{\partial \psi}{\partial \mu},$$

$$Z_3(0, \varphi, \mu) = -2U_z^{(2)} \quad (\mu > 0), \qquad Z_3(\infty, \varphi, \mu) = 0,$$

$$U_z^{(2)}\big|_S = 0.2857143 \frac{\partial U_z}{\partial \rho}\Big|_S.$$

Переходя в полученных результатах к размерным величинам с учетом (1), находим скорость поперечного $U_\varphi|_S$ и продольного $U_z|_S$ скольжения разреженного газа вдоль поверхности прямого кругового цилиндра:

$$U_\varphi\Big|_S = 0.9375\,\nu\,\frac{1}{T_S}\frac{\partial T}{R\partial\varphi}\Big|_S + 1.0922\lambda(1 - 1.3795218\,\mathrm{Kn})\,\frac{\partial U_\varphi}{\partial\rho}\Big|_S,$$

$$U_z\Big|_S = 0.9375\,\nu\,\frac{1}{T_S}\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_S + 1.0922\lambda(1 - 0.9196812\,\mathrm{Kn})\,\frac{\partial U_z}{\partial\rho}\Big|_S.$$

Здесь ν — кинематическая вязкость газа; λ — средняя длина свободного пробега частиц газа; $\mathrm{Kn} = \lambda/R$ — число Кнудсена.

Список литературы

[1] *Попов В.Н.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. В. 10. С. 15–21.

[2] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // ПЖТФ. 2002. Т. 28. В. 5. С. 70–74.

[3] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Изв. РАН. Сер. МЖГ. 1996. № 3. С. 140–153.

[4] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Точные решения граничных задач для модельных уравнений Больцмана с переменной частотой столкновений // ОТП РАН. Деп. в ВИНИТИ от 25.04.96. № 1360. В. 96. 238 с.

[5] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // ИФЖ. 2002. Т. 75. № 3. С. 104–106.