01;05.4

Фрактальная вихревая структура в решеточной модели сверхпроводника

© *С.А. Ктиторов*

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, С.-Петербург
С.-Петербургский электротехнический университет
E-mail: ktitorov@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 10 октября 2002 г.

Рассмотрена вихревая структура в решеточной модели сверхпроводника с кинетическим членом Харпера. Задача сведена к проблеме дискретных отображений, типичных для теории фрактальных структур.

1. Введение. В работах [1–3] было обнаружено существенное влияние дискретности группы магнитных трансляций сверхпроводника на природу основного состояния и термодинамические свойства высокотемпературных сверхпроводников в окрестности верхнего критического магнитного поля. Наряду с термодинамическими свойствами и критическим поведением сверхпроводников в магнитном поле, большой интерес представляет описание вихревой структуры в случае, когда характерное расстояние между вихрями сопоставимо по величине с постоянной решетки кристалла. Такая попытка была предпринята в [4], причем использованный там подход требовал наличия малого параметра — отношения постоянной решетки a к магнитной длине

$$l_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{2eH}}$$

или эквивалентно $\beta = \Phi/\Phi_0$, где $\Phi = Ha^2$ — это магнитный поток через плакет кристаллической решетки, а

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{2e}$$

— лондоновский квант потока. Наличие малого параметра привело к количественно слабой зависимости свободной энергии от конфигурации вихревой структуры. Эту проблему можно рассмотреть с помощью другого подхода, который не использует этого малого параметра. При этом можно ограничиться приближением самосогласованного поля и пренебречь запутыванием вихрей, что позволяет свести задачу к двумерной. Функционал свободной энергии имеет вид

$$F = \sum_{n,n';m,m'} J_{nm;n',m'} \exp\left[i\frac{2e}{\hbar c}\int d\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}\right]\phi^{-}_{n'm'}\phi_{nm}$$
$$+\sum_{nm}\left[\tau\phi^{-}_{nm}\phi_{nm}+g(\phi^{-}_{nm}\phi_{nm})^2\right], \tag{1}$$

где J — туннельный интеграл, координаты узлов двумерной решетки могут быть записаны как $x = ma$, $y = na$, $\overline{\phi_{nm}}$ — комплексно-сопряженный параметр порядка, $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал, интегрирование в показателе экспоненты проводится по отрезку прямой, соединяющей узлы с координатами nm и $n'm'$, $\tau = \alpha(T - T_c)/T_c$. Дифференцируя (1) по $\overline{\phi_{nm}}$, мы получаем решеточное уравнение Гинзбурга–Ландау (РГЛ) для сверхпроводника в сильном магнитном поле:

$$\sum_{n'm'} J_{nm,n',m'} \exp\left[i\frac{2e}{\hbar c}\int d\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}\right]\phi_{n'm'}+\tau\phi_{nm}+g|\phi_{nm}|^2\phi_{nm}=0. \tag{2}$$

Выбирая калибровку Ландау $\mathbf{A} = \mathbf{e}_y Hx$ и рассматривая случай простой квадратной решетки с электронным спектром в приближении сильной связи (с J, равным туннельному интегралу между ближайшими соседями), можно переписать (2) в следующем виде:

$$J\{\phi_{m+1,n}+\phi_{m-1,n}\}+J\{\phi_{m,n+1}\exp[-i2\pi\beta m]+\phi_{m,n-1}\exp[i2\pi\beta m]\}$$
$$+\tau\phi_{nm}+g|\phi_{nm}|^2\phi_{nm}=0. \tag{3}$$

Уравнение (3) может быть преобразовано к более простой форме. Прежде всего заметим, что (3) — это нелинейное уравнение, поэтому преобразование Фурье не приносит большой пользы: нелинейный член становится еще и интегральным. Однако специфическая форма нелинейности в уравнении Гинзбурга–Ландау позволяет сделать подстановку, которую обычно применяют при исследовании линейного уравнения Харпера [5]:

$$\phi_{mn} = u_m \exp(i\kappa m). \tag{4}$$

В результате (3) принимает вид

$$u_{m+1} + u_{m-1} + 2\cos(2\pi m\beta - \kappa)u_m + \tau u_m + g|u_m|^2 u_m = 0. \qquad (5)$$

(5) можно назвать нелинейным уравнением Харпера (НУХ) или уравнением Харпера–Гинзбурга–Ландау (ХГЛ). В этой работе будут рассмотрены некоторые следствия этого уравнения.

2. Анализ нелинейного уравнения Харпера. Уравнение (5) весьма интересно. Оно описывает два различных механизма формирования квазипериодических решений, каждый из которых может привести к образованию весьма нерегулярной структуры, обладающей свойствами самоподобия и фрактальности. Действуя в духе теории вихревой решетки Абрикосова, можно сначала линеаризовать уравнение (5), считая амплитуду параметра порядка малой вблизи линии H_{c2}. Это приводит к уравнению

$$u_{m+1} + u_{m-1} + 2\cos(2\pi m\beta - \kappa)u_m + \tau u_m = 0, \qquad (6)$$

которое отличается от линейного уравнения Харпера [5] точно так же, как уравнение Гинзбурга–Ландау для сверхпроводника в магнитном поле отличается от уравнения Шредингера для заряженной частицы в магнитном поле. Поэтому линия H_{c2} определяется условием $\tau = \epsilon_l$, где ϵ_l — это нижний край харперовского мультизонного спектра. При β, равном рациональному числу, вблизи нижней подзоны имеет место эффект размерного кроссовера, рассмотренный в [1]. В этом пределе вихревая структура полностью пиннингована решеткой. Дальнейшее снижение температуры или магнитного поля, т. е. увеличение модуля τ, ведет к появлению фрактальных структур. Известно, что при иррациональном β спектр оператора Харпера образует канторово множество и, следовательно, эффект размерного кроссовера отсутствует. Здесь мы ограничимся качественным рассмотрением случая, когда амплитуда параметра порядка мала, а параметр β может быть хорошо аппроксимирован конечными ценными дробями. Масштабно-инвариантные свойства этого уравнения были исследованы методом ренормгруппы в работах [6,7]. Точный подход в рамках анзаца Бете и квантовых групп можно найти в [8]. Мультифрактальные свойства собственных функций и значений оператора Харпера численно и на основе анзаца Бете обсуждаются в работе Вигмана с соавторами [9]. Интересные результаты получены также в работе [10]. К сожалению, точный метод анзаца Бете пока не удается обобщить на нелинейный случай, хотя нельзя исключить такую возможность. Отсылая читателя за деталями в цитированные выше работы, можно только сказать, что решение линеаризованного уравнения Харпера имеет вид хаотического распределения локализованных функций типа Ваннье, которые естественно рассматривать как зародыши сверхпроводящего состояния. Амплитуда параметра порядка может быть найдена по теории возмущений. Заслуживают внимания и другие подходы. В частности, уравнение (5) может быть записано как нелинейное двумерное отображение на поле комплексных чисел:

$$\begin{pmatrix} u_{m+1} \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau - g|u_m|^2 - 2\cos(2\pi m\beta - \kappa) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_m \\ u_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

3. Заключение. Главный вывод работы состоит в том, что фрактальная вихревая структура определяется двумерными (эта двумерность не имеет отношения к размерности пространства) отображениями комплексных чисел, занумерованных действительными числами. Это значит, что аналогично абрикосовской решетке, двумерная решетка вихрей в решеточной модели определяется распределением зародышей вдоль действительной оси. В отличие от континуального приближения, это распределение не является периодическим в общем случае. В качестве первого приближения по параметру β распределение параметра порядка может быть записано в виде

$$\phi(x, y) = C\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2l_H^2}\right) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi(n+u_n)^2 + \frac{\sqrt{2\pi}\, i(x+iy)}{l_H}(n+u_n)\right], \tag{8}$$

где u_n определены каким-либо подходящим дискретным отображением, учитывающим фрактальные эффекты. Заметим, что при $u_m = 0$ эта сумма переходит в эллиптическую тэта-функцию, так что эта формула может рассматриваться как естественное обобщение на специальные поля чисел аналогично тому, как вводятся базисные функции и функции на полях p-адических чисел. Наряду с полученными выше, это может быть, например, стандартное отображение Чирикова, которое эквивалентно модели Френкеля–Конторовой:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n - \dfrac{2\pi V_0}{\lambda b} \sin(2\pi y_n/b) \\ y_{n+1} = y_n + a + I_{n+1} \end{cases} \tag{9}$$

или в случае учета взаимодействия вихрей — обобщенным стандартным отображением

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n - \dfrac{2\pi V_0}{\lambda b} \sin(2\pi y_n/b) \\ y_{n+1} = y_n + a - \dfrac{1}{\beta} \ln(1 - \beta I_{n+1}). \end{cases} \tag{10}$$

Автор благодарен Ю.И. Кузьмину, Е.К. Кудинову и Б.Н. Шалаеву за полезное обсуждение работы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 02–02–17667.

Список литературы

[1] *Ktitorov S.A., Shalaev B.N., Jastrabik L.* // Phys. Rev. B. 1994. V. 49. P. 15 248–15 252.
[2] *Ktitorov S.A., Petrov Yu.V., Shalaev B.N., Sherstinov V.S.* // Int. J. Mod. Phys. B. 1992. V. 6. P. 1209–1218.
[3] *Ктиторов С.А., Шалаев Б.Н.* // ФТТ. 1995. Т. 37. С. 77.
[4] *Бабаев Е.С., Ктиторов С.А.* // ФТТ. 1997. Т. 39. С. 1158.
[5] *Hofstadter D.R.* // Phys. Rev. B. 1976. V. 14. P. 2239.
[6] *Суслов И.М.* // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 1079.
[7] *Wilkinson M.* // J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 4337.
[8] *Wiegmann P.B., Zabrodin A.V.* // Nuclear Physics B. 1994. V. 422 [FS]. P. 495.
[9] *Abanov A.G., Tolstra J.C., Wiegmann P.B.* // cond-mat/9711274.
[10] *Shao-shiung Liu, Shi-shyr Roan* // cond-mat/9912473.