

12,03

Когерентность двумерных электронно-дырочных систем: спонтанное нарушение непрерывных симметрий (Обзор)

© С.А. Москаленко¹, М.А. Либберман^{2,3}, Е.С. Москаленко⁴, Е.В. Думанов¹, И.В. Подлесный¹

¹ Институт прикладной физики АН Молдовы,
Кишинев, Молдова

² Университет Упсалы,
Упсала, Швеция

³ Московский физико-технический университет,
Долгопрудный, Московская обл., Россия

⁴ Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: dum@phys.asm.md

(Поступил в Редакцию 27 декабря 2012 г.
В окончательной редакции 4 марта 2013 г.)

Спонтанное нарушение непрерывных симметрий двумерной электронно-дырочной системы в сильном перпендикулярном плоскости магнитном поле приводит к образованию новых основных состояний и определяет энергетический спектр коллективных элементарных возбуждений, появляющихся над этими основными состояниями. В обзоре основное внимание уделено электронно-дырочной системе, сформированной из компланарных магнитоэкситонов в условиях бозе-эйнштейновской конденсации в состоянии с волновым вектором $\mathbf{k} = 0$ при учете влияния возбужденных уровней Ландау, когда элементарные возбуждения экситонного типа сосуществуют с колебаниями плазмонного типа. В то же время представляют большой интерес свойства двухкомпонентной системы, состоящей из двумерного электронного газа и двумерного дырочного газа, пространственно разделенных в двойной квантовой яме, в условиях дробного квантового эффекта Холла, поскольку эти свойства могут повлиять на квантовые состояния магнитных экситонов, которые образуются когда расстояние между слоями стремится к нулю. Также рассмотрены двухслойные электронные системы в условиях дробного квантового эффекта Холла с фактором заполнения, равным половине для каждого слоя, и с общим фактором заполнения, равным единице. Когерентность между электронными состояниями в двух слоях эквивалентна формированию экситонов, находящихся в когерентном макроскопическом состоянии. Это делает возможным сравнение энергетического спектра коллективных элементарных возбуждений бозе-эйнштейновских конденсированных экситонов в условиях квантового эффекта Холла и компланарных магнитоэкситонов. Нарушение глобальной калибровочной симметрии либо непрерывной вращательной симметрии приводит к образованию бесщелевого спектра типа Намбу–Голдстоуна, тогда как нарушение локальной калибровочной симметрии сопровождается появлением щели в энергетическом спектре (феномен Хиггса). Эти явления аналогичны образованию безмассовых и массивных частиц в релятивистской физике. Применение теоремы Нильсена и Чадхи, устанавливающей число мод Намбу–Голдстоуна в зависимости от числа нарушенных операторов симметрии, продемонстрировано на примере бозе-эйнштейновской конденсации спинорных атомных газов в оптической ловушке. Этот пример приведен для того, чтобы лучше понять результаты, полученные в случае бозе-эйнштейновской конденсации компланарных магнитоэкситонов. Феномен Хиггса приводит к появлению составных частиц в условиях дробного квантового эффекта Холла. Их описание дано в терминах теории Гинзбурга–Ландау. Обсуждены возможности появления спонтанной когерентности в системе не прямых экситонов в структурах с двойной квантовой ямой. Сделан обзор экспериментальных попыток реализовать эти условия, полученных на этом пути результатов и накопленных знаний. Сформулированы основные свойства энергетического спектра магнитоэкситонных поляритонов в микрорезонаторе. Высказана гипотеза о возможности формирования двумерных магнитоэкситонов и двумерных магнитоэкситонных поляритонов высокой плотности с прикрепленными к ним точечными квантовыми вихрями, т. е. о возможности возникновения новых композитных частиц.

Содержание

1. Введение
2. Теория Боголюбова о квазисредних и теорема Голдстоуна
3. Боголюбовские возбуждения спинорного Бозе-газа, истинные и квази-намбу-голдстоуновские моды
4. Спонтанное нарушение локальной калибровочной симметрии и феномен Хиггса
5. Теория Гинзбурга–Ландау для дробного квантового эффекта Холла
6. Точечные квантовые вихри в условиях дробного квантового эффекта Холла

7. Калибровочные преобразования и статистические калибровочные поля
8. Экситоны в условиях квантового эффекта Холла в двухслойных электронных системах
9. Истинные, квази- и неустойчивые моды Намбу–Голдстоуна в случае бозе-эйнштейновской конденсации компланарных магнитоэкситонов
10. Спонтанная когерентность в 2D-экситонных системах
11. Двумерные магнитоэкситонные поляритоны в микрорезонаторе
12. Заключение

1. Введение

Коллективные элементарные возбуждения в двумерной электронно-дырочной системе в сильном магнитном поле, перпендикулярном слою полупроводника, обсуждаются в рамках теории Боголюбова о квазисредних [1] с учетом явлений, связанных со спонтанно нарушенной непрерывной симметрией. Основные результаты в этой области были получены благодаря фундаментальным работам Голдстоуна [2], Намбу [3], Хиггса [4] и Вайнберга [5]. Эти исследования были проведены под влиянием успеха теории сверхпроводимости, разработанной первоначально Бардином, Купером и Шриффером [6] и усовершенствованной Боголюбовым [1], а также микроскопической теории сверхтекучести, предложенной Боголюбовым [1]. Механизмы реализации этих явлений в случае системы двумерных (2D) магнитоэкситонов с возникающими в ней наряду с экситонными возбуждениями плазменного типа являются главной темой настоящего обзора. Компланарные электроны и дырки в сильном перпендикулярном магнитном поле при низких температурах образуют магнитоэкситоны в том случае, если кулоновское взаимодействие между электронами и дырками, лежащими на нижайших уровнях Ландау (НУЛ), играет главную роль. Однако когда электроны и дырки пространственно разделены и находятся в разных слоях двойной квантовой ямы (ДКЯ), кулоновское электронно-дырочное взаимодействие уменьшается, и образуется двумерный электронный газ (2DEG) в одном слое и двумерный дырочный газ (2DHG) в другом слое. Их свойства в условиях дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ) могут влиять на свойства 2D магнитоэкситонов. Насколько нам известно, эти аспекты физики магнитоэкситонов не обсуждались в литературе.

В настоящей работе проведен краткий обзор работ по бозе-эйнштейновскому конденсату экситонов, возникающему в условиях ДКЭХ в двухслойных электронных системах при факторе заполнения, равном половине для каждого слоя, и при общем (для обоих слоев) факторе заполнения, равном единице. Это позволит нам сравнить явление бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) для компланарных магнитоэкситонов и экситонов нового типа, возникающих в условиях квантового эффекта Холла.

Такое сравнение позволяет проверить правомерность сделанных приближений. Поскольку точечные вихри играют важную роль в понимании ДКЭХ, в обзоре приведена соответствующая информация. Мы полагаем, что свойства БЭК, найденные для нулевой температуры ($T = 0$), могут быть использованы и для понимания реальной ситуации при конечных температурах ниже критической температуры фазового перехода Березинского–Костерлица–Таулесса.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 сделан обзор теории Боголюбова и теоремы Голдстоуна. В разделе 3 продемонстрировано применение теории для спиринового Бозе-газа атомов в оптической ловушке. В разделе 4 обсуждаются последствия нарушения локальной калибровочной симметрии. Теория Гинзбурга–Ландау применительно к случаю ДКЭХ предложена в разделе 5. В разделе 6 дан обзор свойств двумерных точечных квантовых вихрей. Следствия существования этих вихрей обсуждаются в разделе 7. В разделе 8 представлены свойства экситонов, возникающих в двухслойной электронной системе. В разделе 9 рассмотрены коллективные элементарные возбуждения в системе двумерных магнитных экситонов в условиях БЭК в состоянии $\mathbf{k} = 0$. В разделе 10 сделан обзор работ, посвященных поиску и выявлению условий, необходимых для БЭК непрямых экситонов в двойной квантовой яме. В разделе 11 обсуждается энергетический спектр двумерных магнитоэкситонных поляритонов в микрорезонаторе. Итоги подведены в Заключении.

2. Теория Боголюбова о квазисредних и теорема Голдстоуна

Боголюбов [1] продемонстрировал свою концепцию квазисредних при помощи модели идеального трехмерного (3D) Бозе-газа с гамильтонианом

$$H = \sum_k \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu \right) a_k^\dagger a_k. \quad (1)$$

Здесь $a_k^\dagger a_k$ — Бозе-операторы рождения и уничтожения частиц, а μ — химический потенциал. Средние числа частиц выражаются в виде

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}, \quad N_k = \left[\exp \left(\beta \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu \right) \right) - 1 \right]^{-1}, \quad (2)$$

где $\mu \leq 0$ и $\beta = 1/kT$.

В нормальном состоянии плотность 3D-частиц в термодинамическом пределе при $\mu = 0$ будет равна $n = 2.612(mk_B T)^{3/2} / (2\pi\hbar^2)^{3/2}$. В этих условиях бозе-эйнштейновская конденсация имеет место, и плотность конденсированных частиц

$$n_0 = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{N_0}{V}, \quad \mu = -k_B T \ln \left(1 + \frac{1}{N_0} \right). \quad (3)$$

Операторы a_0^\dagger и a_0 асимптотически становятся c -числами, когда их коммутатор

$$\left[\frac{a_0}{\sqrt{V}}, \frac{a_0^\dagger}{\sqrt{V}} \right] = \frac{1}{V} \quad (4)$$

стремится к нулю, а их произведение равно n_0 . Тогда можно написать

$$\frac{a_0^\dagger}{\sqrt{V}} \sim \sqrt{n_0} e^{i\alpha}, \quad \frac{a_0}{\sqrt{V}} \sim \sqrt{n_0} e^{-i\alpha}. \quad (5)$$

С другой стороны, обычные средние операторов $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ и $a_{\mathbf{k}}$, вычисленные на основе гамильтониана (1), в точности равны нулю. Это является следствием коммутативности оператора \hat{H} с оператором полного числа частиц \hat{N}

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, \quad [\hat{H}, \hat{N}] = 0. \quad (6)$$

Как результат, оператор \hat{H} инвариантен относительно унитарного преобразования

$$\hat{U} = e^{i\hat{N}\phi} \quad (7)$$

с произвольным углом ϕ . Такая инвариантность называется градиентной инвариантностью первого рода, или калибровочной инвариантностью. Когда ϕ не зависит от координаты x , мы имеем глобальную калибровочную инвариантность. Если $\phi(x)$ зависит от x , имеем локальную калибровочную инвариантность [2–8], или калибровочную инвариантность второго рода.

Из (7) следует, что $H = U^\dagger H U$, $U^\dagger a_0 U = e^{i\phi} a_0$. Это приводит к следующим средним значениям:

$$\begin{aligned} \langle a_0 \rangle &\cong \text{Tr}(a_0 e^{-\beta H}) = \text{Tr}(a_0 U e^{-\beta H} U^\dagger) \\ &= \text{Tr}(U^\dagger a_0 U e^{-\beta H}) = e^{i\phi} \langle a_0 \rangle, \\ (1 - e^{i\phi}) \langle a_0 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку ϕ — произвольный угол, существуют правила отбора

$$\langle a_0 \rangle = 0, \quad \langle a_0^\dagger \rangle = 0. \quad (8)$$

Обычные средние (8) также могут быть получены из асимптотических выражений (5), если они проинтегрированы по углу α . Это кажущееся противоречие можно разрешить, если в гамильтониан (1) ввести дополнительный член

$$-v(a_0^\dagger e^{i\phi} + a_0 e^{-i\phi})\sqrt{V}, \quad v > 0, \quad (9)$$

где ϕ — фиксированный угол, v — малая величина.

Новый гамильтониан запишется следующим образом:

$$H_{v,\phi} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu \right) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - v(a_0^\dagger e^{i\phi} + a_0 e^{-i\phi})\sqrt{V}. \quad (10)$$

Он не сохраняет число частиц. Теперь средние значения операторов a_0^\dagger и a_0 , входящих в гамильтониан $\hat{H}_{v,\phi}$, отличны от нуля, т.е. $\langle a_0 \rangle_{H_{v,\phi}} \neq 0$ и $\langle a_0^\dagger \rangle_{H_{v,\phi}} \neq 0$. Квази-средние обозначаются в виде $\langle a_0 \rangle$ (обозначение введено Боголюбовым) и определяются как предел от обычного среднего $\langle a_0 \rangle_{H_{v,\phi}}$

$$\langle a_0 \rangle = \lim_{v \rightarrow 0} \langle a_0 \rangle_{H_{v,\phi}}. \quad (11)$$

Важно подчеркнуть, что предельный переход $v \rightarrow 0$ должен быть осуществлен после термодинамических пределов $V \rightarrow \infty$, $N_0 \rightarrow \infty$. В термодинамическом пределе μ также бесконечно малая величина; таким образом, можно выбрать отношение двух бесконечно малых значений μ и v для получения конечного значения

$$-\frac{v}{\mu} = \sqrt{n_0}. \quad (12)$$

Для расчета среднего $\langle a_0 \rangle_{H_{v,\phi}}$ необходимо представить гамильтониан (10) $H_{v,\phi}$ в диагональной форме при помощи канонического преобразования амплитуды

$$a_0 = -\frac{v}{\mu} e^{i\phi} \sqrt{V} + a_0, \quad a_{\mathbf{k}} = \alpha_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} \neq 0. \quad (13)$$

В новых переменных гамильтониан $H_{v,\phi}$ имеет вид

$$H_{v,\phi} = -\mu \alpha_0^\dagger \alpha_0 + \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu \right) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{v^2 V}{\mu}. \quad (14)$$

В диагональном представлении (14) среднее $\langle a_0 \rangle_{H_{v,\phi}}$ точно равно нулю, в то время как значение $\langle a_0 \rangle_{H_{v,\phi}}$ равно первому слагаемому в правой части формулы (13).

В результате квазисреднее $\langle a_0 \rangle$ равно

$$\langle a_0 \rangle = \lim_{v \rightarrow 0} \langle a_0 \rangle_{H_{v,\phi}} = \sqrt{N_0} e^{i\phi}. \quad (15)$$

Оно зависит от фиксированного угла ϕ и не зависит от v . Спонтанное нарушение глобальной калибровочной симметрии имеет место, когда фаза ϕ в гамильтониане (10) фиксирована.

Когда взаимодействие между частицами учитывается, эти различия появляются и для средних значений $\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger \rangle$ и $\langle a_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \rangle$. Они приводят к перенормировке энергетического спектра коллективных элементарных возбуждений. Таким образом, канонические преобразования

$$a_{\mathbf{k}} = \sqrt{N_0} \delta_{\mathbf{k},0} e^{i\phi} + \alpha_{\mathbf{k}}, \quad (16)$$

введенные впервые Боголюбовым [1] в его теории сверхтекучести, имеют квантово-статистическое обоснование в рамках концепции квазисредних. При $T = 0$ квазисреднее $\langle a_0 \rangle$ совпадает со средним по основному квантово-механическому состоянию, которое является когерентным макроскопическим состоянием [9].

Явления, связанные со спонтанным нарушением непрерывной симметрии, играют важную роль в статистической физике. Некоторые элементы этой концепции, такие как когерентные макроскопические состояния с заданной фиксированной фазой и каноническое преобразование смещения оператора поля, описывающее бозе-эйнштейновский конденсат, были введены Боголюбовым в микроскопической теории сверхтекучести и обобщены в его теории квазисредних [1]. Краткий обзор калибровочных симметрий и случаев их спонтанного нарушения, эффекты Голдстоуна и Хиггса мы представим далее, следуя монографии Райдера [7] и лекции Берестецкого [8].

Голдстоун рассмотрел простую модель комплексного скалярного Бозе-поля для демонстрации своей главной идеи. В классическом описании лагранжиан имеет вид

$$L = \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right) - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2. \quad (17)$$

Потенциальная энергия $V(\phi)$ равна

$$V(\phi) = m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2, \quad \lambda > 0, \quad (18)$$

где m^2 рассматривается в качестве одного из параметров, а не как массовый член, λ есть параметр самовоздействия. Обозначения x_μ и x^μ имеют смысл

$$x_\mu = (ct, -\mathbf{x}), \quad x^\mu = (ct, \mathbf{x}). \quad (19)$$

Лагранжиан инвариантен относительно глобального калибровочного преобразования

$$\phi = e^{i\Lambda} \phi', \quad L(\phi) = L(\phi'), \quad \Lambda = \text{const}, \quad (20)$$

т.е. имеет глобальную калибровочную симметрию. Основное состояние получено путем минимизации потенциала следующим образом:

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = m^2 \phi^* + 2\lambda \phi^* |\phi|^2. \quad (21)$$

Представляет интерес случай $m^2 < 0$, когда минимумы расположены вдоль кольца:

$$|\phi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} = a^2, \quad |\phi| = a, \quad a > 0. \quad (22)$$

Существует множество вырожденных основных состояний, связанных друг с другом вращением по кругу. Комплексное скалярное поле может быть выражено в виде двух скалярных вещественных полей, таких как $\rho(x)$ и $\theta(x)$ в полярных координатах или $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ в декартовых координатах. Скалярное поле имеет вид

$$\phi(x) = \rho(x) e^{i\theta(x)} = (\phi_1(x) + i\phi_2(x)) \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (23)$$

Зависимость функции $V(\phi)$ от двух вещественных компонент поля ϕ_1 и ϕ_2 показана на рис. 1. Боголюбовское

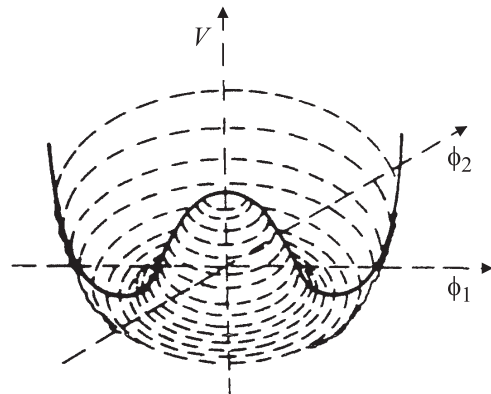


Рис. 1. Потенциал $V(\phi)$ с минимумами при $|\phi| = a$ и локальным максимумом при $\phi = 0$.

каноническое преобразование, нарушающее глобальную калибровочную инвариантность, записывается следующим образом:

$$\phi(x) = a + \frac{\phi'_1(x) + i\phi'_2(x)}{\sqrt{2}} = (\rho'(x) + a) e^{i\theta'(x)}. \quad (24)$$

Новое выделенное основное состояние имеет среднее $\langle \phi \rangle_0 = a$ с равными нулю средними значениями $\langle \phi'_1 \rangle_0 = \langle \phi'_2 \rangle_0 = \langle \rho' \rangle_0 = \langle \theta' \rangle_0 = 0$. Это означает выбор одного определенного основного состояния с бесконечно малой фазой $\theta' \rightarrow 0$. Как отмечено в [7], физические поля — это возбуждения над основным состоянием. Они могут быть реализованы посредством возмущения системы около состояния $|\phi| = a$. Разложив лагранжиан (17) в ряд по бесконечно малым возмущениям $\theta', \rho', \phi'_1, \phi'_2$ и пренебрегая постоянными членами, получим

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi'_1) (\partial^\mu \phi'_1) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi'_2) (\partial^\mu \phi'_2) - 2\lambda a^2 \phi_1'^2 - \sqrt{2}\lambda \phi'_1 (\phi_1'^2 + \phi_2'^2) - \frac{\lambda}{4} (\phi_1'^2 + \phi_2'^2)^2 \quad (25)$$

или в полярных координатах

$$L = (\partial_\mu \rho') (\partial^\mu \rho') + (\rho' + a)^2 (\partial_\mu \theta') (\partial^\mu \theta') - [\lambda \rho'^4 + 4a\lambda \rho'^3 + 4\lambda a^2 \rho'^2 - \lambda a^4]. \quad (26)$$

Если пренебречь слагаемыми третьей и четвертой степени, остаются только квадратичные члены вида $4\lambda a^2 \rho'^2$ и $2\lambda a^2 \phi_1'^2$, но нет квадратичных членов, пропорциональных θ'^2 и $\phi_2'^2$. Для реальных физических задач, например для теории поля, компоненты поля ϕ'_1 и ρ' представляют собой массивные частицы с энергетической щелью в законах дисперсии, в то время как компоненты поля ϕ'_2 и θ' представляют собой безмассовые частицы с бесщелевым законом дисперсии.

Основные результаты Голдстоуна могут быть сформулированы следующим образом:

$$\begin{aligned} m_{\rho'}^2 &= 4\lambda a^2, & m_{\phi_1'}^2 &= 2\lambda a^2, \\ m_{\theta'}^2 &= 0, & m_{\phi_2'}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Спонтанное нарушение глобальной калибровочной симметрии происходит из-за влияния квантовых флуктуаций. Они преобразуют начальное поле ϕ с двумя массивными вещественными компонентами ϕ_1 и ϕ_2 и вырожденным основным состоянием с минимумами, образующими кольцо, в другое поле: с одной массивной и одной безмассовой компонентами. Основное состояние нового поля имеет строго определенную фазу.

Элементарные возбуждения над новым основным состоянием, изменяющие значение $\langle \rho \rangle = a$, являются массивными. Чтобы сместить ρ' , преодолевая возвращающую силу, созданную потенциалом $V(\rho)$, нужна энергия. Но нет никаких возвращающих сил, соответствующих перемещению по кругу $|\phi| = a$, сформированному начальными вырожденными основными состояниями.

Таким образом, для углового возбуждения θ' с длиной волны λ имеется зависимость $\omega \sim \lambda^{-1} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Закон дисперсии имеет вид $\omega \sim ck$. Это означает, что частицы являются безмассовыми [7]. Частицы, соответствующие θ' , известны как бозоны Голдстоуна. Отсутствие щели носит общий характер и имеет место в любом порядке теории возмущений. Спонтанное нарушение непрерывной симметрии не только в случае глобальной калибровочной симметрии, но и в случае вращательной симметрии влечет за собой существование безмассовых частиц, которые называются частицами Голдстоуна или бесщелевыми модами Намбу–Голдстоуна. Утверждение об отсутствии щели в спектре известно как теорема Голдстоуна. Она устанавливает, что если спонтанно нарушена непрерывная симметрия, то в спектре элементарных возбуждений существуют бесщелевые моды. Угловые возбуждения θ' аналогичны спиновым волнам. Последние представляют собой медленное пространственное изменение направления намагниченности без изменения ее абсолютной величины. Поскольку силы в ферромагнетиках являются короткодействующими, требуется очень мало энергии для возбуждения этого основного состояния. Таким образом, частота спиновых волн имеет закон дисперсии $\omega = ck$. Как отметил Райдер [7], это соображение нарушается, если есть дальнедействующие силы, как, например, в случае кулоновского взаимодействия. В этом случае мы имеем дело с максвелловскими калибровочными полями с локальной (зависящей от x) калибровочной симметрией вместо глобальной калибровочной симметрии, рассмотренной выше.

Сначала продемонстрируем конкретное применение приведенного выше утверждения об отсутствии щели, следуя работам [10–16], где был обсужден спинорный бозе-эйнштейновский конденсат, после чего рассмотрим

максвелловское поле с локальной калибровочной симметрией.

3. Боголюбовские возбуждения спинорного Бозе-газа, истинные и квази-намбу-голдстоуновские моды

Сформулированные выше утверждения, касающиеся квазисредних и отсутствия щели в спектре, можно проиллюстрировать на конкретном примере бозе-эйнштейновской конденсации атомов натрия ^{23}Na в оптической дипольной ловушке, следуя работам Мурата, Сайто и Уэда [10] с одной стороны и Учино, Кобаяши и Уэда [11] с другой стороны. Есть многочисленные публикации на эту тему, среди которых следует отметить [12–17]. Атомы натрия ^{23}Na с учетом сверхтонкого взаимодействия спина электронов и спина ядра имеют результирующий спин $f = 1$ и подчиняются статистике Бозе. Суммарный спин F двух взаимодействующих бозонов с $f = 1$ принимает значения $F = 0, 1, 2$. Константа взаимодействия двух свободных экситонов $g_F = 4\pi\hbar^2 a_F / M$ характеризуется их парциальной амплитудой рассеяния a_F с орбитальным квантовым числом $L = 0$, известной как длина рассеяния S -волны. Она не равна нулю только при $F = 0$, когда два атомных спина образуют синглет, и при $F = 2$, когда они образуют квинтет. Константы g_0 и g_2 входят в комбинации $c_0 = (g_0 + 2g_2)/3$ и $c_1 = (g_2 - g_0)/3$, которые определяют гамильтониан системы. Можно описать атомные Бозе-газы в оптической дипольной ловушке в представлении плоской волны, так как система однородна и обладает трансляционной симметрией. Это означает, что компоненты оператора поля Бозе $\psi_m(\mathbf{r})$ можно представить в следующем виде:

$$\psi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} a_{km} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (28)$$

где V — объем системы, a_{km} — оператор уничтожения атома с волновым вектором \mathbf{k} и магнитным квантовым числом m , которое в случае $f = 1$ принимает три значения: 1, 0, -1. Спинорный бозе-эйнштейновский конденсат был реализован экспериментально [12] для спина атома натрия ^{23}Na в сверхтонком спиновом состоянии $|f = 1, m_f = -1\rangle$. Бозе-эйнштейновский конденсат оказался долгоживущим. Были сформулированы некоторые соображения о существовании метастабильных долгоживущих состояний. Они могут появиться, если существуют энергетические барьеры, которые мешают прямой эволюции системы в направлении ее основного состояния. Если тепловой энергии, необходимой для преодоления этих препятствий, не хватает, то метастабильное состояние может быть долгоживущим, и это явление часто встречается. Бозе-эйнштейновский конденсат в разреженных атомных газах также может

быть сформирован благодаря метастабильности. Кроме того, в газах с притяжением метастабильное (относительно коллапса) состояние БЭК может образовываться только за счет энергии барьеров [12]. Далее обсудим коллективные элементарные возбуждения, возникающие в условиях БЭК спинорного типа. Мы продемонстрируем образование мод Намбу–Голдстоуна, следуя работам [10,11].

Описание возбуждений представлено в работах [10,11] в варианте теории Боголюбова [1] с заданным числом частиц. Нет необходимости вводить химический потенциал как множитель Лагранжа для того, чтобы подстраивать число частиц к заданному значению. БЭК происходит в суперпозиционное состояние, включающее одночастичные состояния с волновым вектором $\mathbf{k} = 0$ и различными магнитными квантовыми числами

$$|\xi\rangle = \sum_m \xi_m a_{0,m}^\dagger |\text{vac}\rangle, \quad \sum_m |\xi_m|^2 = 1. \quad (29)$$

Параметр порядка имеет векторную форму и состоит из трех компонент: $\xi = (\xi_1, \xi_0, \xi_{-1})$. Вакуумное состояние $|\text{vac}\rangle$ означает отсутствие атомов. Волновая функция основного состояния атомов в БЭК задается формулой (8) из работы [11]

$$|\psi_g\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\sum_{m=-f}^f \xi_m a_{0,m}^\dagger \right) |\text{vac}\rangle. \quad (30)$$

В приближении среднего поля операторы $a_{0,m}^\dagger, a_{0,m}$ заменяются c -числами $\xi_m \sqrt{N_0}$, где N_0 — число конденсированных атомов. После такой замены исходный гамильтониан теряет глобальную калибровочную симметрию и более не коммутирует с оператором \hat{N} . Параметры порядка ξ_m выбираются так, чтобы минимизировать среднее значение нового гамильтониана (энергию основного состояния) и удовлетворить условию нормировки $\sum_m |\xi_m|^2 = 1$. Чтобы сохранить параметр порядка каждой фазы неизменным на каждом этапе, необходимо указать комбинацию из калибровочного преобразования и спинорного вращения [11]. Эта программа была проведена в [18–21].

Фазовый переход спинорного Бозе-газа из нормального состояния в бозе-конденсированное состояние был представлен математически при помощи гамильтониана системы с использованием боголюбовского канонического преобразования смещения: одночастичные операторы рождения и уничтожения с данным волновым вектором \mathbf{k} , например $\mathbf{k} = 0$, заменяются макроскопическими c -числами, описывающими образование конденсата. Различные суперпозиции одночастичных состояний определяют структуру окончательно установленной спинорной фазы [11]. Нильсен и Чадха [17] сформулировали теорему, определяющую число мод Намбу–Голдстоуна (НГ), которые должны присутствовать среди общего числа коллективных элементарных возбуждений над основным состоянием, если оно формируется в результате

спонтанного нарушения N_{BG} непрерывных симметрий. Число мод НГ первого типа с линейным (нечетным) законом дисперсии, в пределе длинных волн обозначенных как N_I , в теореме [17] учитывается один раз, а число мод НГ второго типа N_{II} с квадратичным (четным) законом дисперсии при малых волновых векторах учитывается дважды. Это приводит к выражению $N_I + 2N_{II}$, которое, согласно теореме, равно или больше, чем число генераторов нарушенных симметрий. Теорема [17] выражается следующим образом:

$$N_I + 2N_{II} \geq N_{\text{BG}}. \quad (31)$$

Теорема была проверена в [11] на нескольких примерах фаз конденсата Бозе–Эйнштейна со спином 1 и со спином 2. В случае нематических фаз со спином 2 имеются специальные моды Боголюбова, которые характеризуются линейным законом дисперсии, но не принадлежат к числу мод НГ. Теория Боголюбова была развита Учиной, Кобаяши и Уэда [11] для случая БЭК со спинами 1 и 2 в присутствии зеемановского расщепления и с учетом поправок Ли, Хуанга и Янга [22] к энергии основного состояния, давлению, скорости звука и квантовому истощению конденсата. В случае атомарного Бозе-газа спинорные Бозе-конденсаты зависят существенно от взаимодействия в системе. Например, это касается учета линейного и квадратичного эффектов Зеемана. Поэтому многие фазы, которые могут быть реализованы экспериментально, были изучены на предмет их устойчивости при учете упомянутых взаимодействий. Было проверено соотношение между числом мод НГ и числом генераторов нарушенных симметрий.

Теорема Голдстоуна гарантирует, что моды НГ не приобретают массу в любом порядке квантовых поправок. Однако иногда появляются мягкие моды, которые не имеют массы в нулевом порядке, но становятся массивными за счет квантовых поправок. Они были введены Вайнбергом [5], который показал, что эти моды возникают, если симметрия эффективного потенциала нулевого порядка выше, чем калибровочная симметрия. Эта идея была применена для объяснения возникновения частиц с малой массой в релятивистской физике. В настоящее время, следуя [13], эти моды называют квази-намбу-голдстоуновскими, несмотря на то что их первоначально введенное Вайнбергом название было псевдо-моды, а не квази-моды. Джорджи и Паис [23] показали, что квази-НГ-моды возникают также в случае, когда симметрия основного состояния остается выше, чем симметрия гамильтониана, описывающего БЭК.

Авторы работы [13] подчеркнули, что спинорная БЭК является идеальной системой для изучения физики квази-НГ-мод, потому что эта система обладает большой экспериментальной манипулируемостью и хорошо проверенным микроскопическим гамильтонианом.

Число квази-НГ-мод n было определено Джорджи и Паисом [23] как разность размерности двух про-

странств M и \tilde{M}

$$n = \dim(\tilde{M}) - \dim(M), \quad (32)$$

где \tilde{M} — поверхность, на которой эффективный потенциал принимает минимальные значения в нулевом порядке, а M — подпространство внутри \tilde{M} . Размерность M совпадает с числом мод НГ. В случае, рассмотренном Голдстоуном, размерность кольца есть единица, поэтому и мода НГ только одна. Это означает отсутствие квази-НГ-мод ($n = 0$).

Наряду со спиновым типом 3D-атомарного бозе-эйнштейновского конденсата в оптических ловушках будем обсуждать и случай бозе-эйнштейновского конденсата 2D-магнитозкситонов в полупроводниках [24–27]. Коллективные элементарные возбуждения в этих условиях исследованы в [28–31]. Как показано выше, спонтанное нарушение симметрии приводит к модам НГ, которые играют решающую роль в определении поведения систем при слабом возбуждении основного состояния [5,32–38]. Наряду с глобальной калибровочной симметрией, рассмотренной выше, существует и локальная симметрия, нарушение которой рассматривается в следующем разделе.

4. Спонтанное нарушение локальной калибровочной симметрии и феномен Хиггса

Взаимодействие электронов с электромагнитным полем может быть описано путем введения в лагранжиан оператора кинетического импульса вместо канонического, что эквивалентно введению ковариантных производных \underline{D} вместо дифференциальных производных $\underline{\partial}$. Они определены в работе [8]

$$\underline{x} = (ct, \mathbf{x}), \quad \underline{\partial} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right),$$

$$\underline{D} = \underline{\partial} - \frac{ie}{\hbar c} \underline{A}, \quad \underline{A} = (\varphi, \mathbf{A}). \quad (33)$$

Здесь φ и \mathbf{A} — скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля (ЭМП). Далее будем использовать обозначения работы [7]

$$x^\mu = (ct, \mathbf{r}), \quad x_\mu = (ct, -\mathbf{r}),$$

$$A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A}), \quad A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}),$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right),$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta,$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right). \quad (34)$$

Лагранжиан свободного ЭМП имеет вид [7]

$$\mathcal{L}_{\text{EMF}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (35)$$

и выражается через антисимметричные тензоры $F_{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}$. Они определяются как четырехмерные роторы от потенциалов A_μ и A^μ

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (36)$$

Полный лагранжиан электронов и ЭМП имеет вид [7]

$$\mathcal{L} = \left[\left(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \phi \right] \left[\left(\partial^\mu - \frac{ie}{\hbar c} A^\mu \right) \phi^* \right] - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (37)$$

Как и прежде, m^2 является параметром, так что в случае $m^2 < 0$ и в отсутствие ЭМП вакуумное значение определяется по формуле (22).

Инвариантность лагранжиана (37) относительно преобразования [8]

$$\phi'(\underline{x}) = \phi(\underline{x}) e^{i\theta(\underline{x})} \quad (38)$$

в присутствии ЭМП может быть достигнута только при соответствующем преобразовании потенциала [8]

$$\underline{A}'(x) = A(x) + \frac{\hbar c}{e} \underline{\partial} \theta(x). \quad (39)$$

Действительно, в этом случае лагранжиан (37) остается неизменным [7], поскольку

$$\left[\left(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \phi \right] \left[\left(\partial^\mu - \frac{ie}{\hbar c} A^\mu \right) \phi^* \right] = \left[\left(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A'_\mu \right) \phi' \right] \left[\left(\partial^\mu - \frac{ie}{\hbar c} A'^\mu \right) \phi'^* \right],$$

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}, \quad F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}. \quad (40)$$

Введем калибровочное преобразование функции поля (24) и, раскладывая лагранжиан в ряд по малым физическим полям ϕ'_1 и ϕ'_2 , ограничимся слагаемыми до четвертой степени включительно. Квадратичная часть выглядит как [7]

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e^2 a^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi'_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi'_2)^2 - 2\lambda a^2 \phi_1'^2 + \sqrt{2} e a A^\mu \partial_\mu \phi'_2. \quad (41)$$

Второе слагаемое пропорционально $A_\mu A^\mu$. Это означает, что фотон становится массивным. Скалярное поле ϕ'_1 также массивно. Поле ϕ'_2 принимает участие в смешанном члене $A^\mu \partial_\mu \phi'_2$ и может быть устранено путем

дополнительного калибровочного преобразования (39). Следуя [7], лагранжиан (41) можно представить в виде

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e^2 a^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1')^2 - 2\lambda a^2 \phi_1'^2. \quad (42)$$

Он содержит только два поля: одно из них — векторное поле с двумя поперечными и продольной составляющими и спином единица, а другое — скалярное поле ϕ_1' со спином нуль. Оба поля массивны. Поле ϕ_1' со спином нуль. Оба поля массивны. Поле ϕ_2' , которое в случае спонтанного нарушения глобальной симметрии формировало бозон Голдстоуна и становилось безмассовым, теперь исчезает. Фотон стал массивным. Это явление называется феноменом Хиггса [7].

Одну из возможных иллюстраций описанного выше эффекта мы рассмотрим, следуя работе Гальперина, Ли и Рида [39]. Они рассмотрели двумерную систему бесспиновых электронов в условиях квантового эффекта Холла. В этом случае гамильтониан $\hat{H} = \hat{K} + \hat{V}$ состоит из оператора кинетической энергии \hat{K}

$$\hat{K} = \frac{1}{2m_e} \int d^2\mathbf{r} \hat{\psi}_e^\dagger(\mathbf{r}) [-i\hbar\nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r})]^2 \hat{\psi}_e(\mathbf{r}) \quad (43)$$

для двумерных электронов с массой m_e и зарядом $-e$, находящихся в однородном внешнем перпендикулярном магнитном поле B с векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Потенциальная энергия \hat{V} зависит от кулоновского взаимодействия между электронами. В случае [39] операторы рождения и уничтожения $\hat{\psi}_e^\dagger(\mathbf{r})$, $\hat{\psi}_e(\mathbf{r})$ подчиняются статистике Ферми. Однако в работе [40] операторы поля подчиняются статистике Бозе. В более общем случае имеем

$$[\hat{\psi}_e(\mathbf{r})\hat{\psi}_e^\dagger(\mathbf{r}') \pm \hat{\psi}_e^\dagger(\mathbf{r}')\hat{\psi}_e(\mathbf{r})] = \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (44)$$

Знак \pm отвечает Ферми- либо Бозе-статистике. В работе [39] новая „квазичастица“ вводится операторами $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$, $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ при помощи выражений

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \hat{\psi}_e^\dagger(\mathbf{r}) e^{-im\hat{\omega}(\mathbf{r})}, \quad \hat{\psi}(\mathbf{r}) = e^{-im\hat{\omega}(\mathbf{r})} \hat{\psi}_e(\mathbf{r}) \quad (45)$$

с целыми числами m и оператором фазы

$$\hat{\omega}(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}' \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\rho}(\mathbf{r}'). \quad (46)$$

Оператор зависит от угла $\theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ между векторами $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и осью x , лежащей в плоскости слоя,

$$\theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \arctan \frac{y - y'}{x - x'}, \quad (47)$$

а также от оператора плотности $\hat{\rho}(\mathbf{r}')$

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}') = \hat{\psi}_e^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}_e(\mathbf{r}') = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}'). \quad (48)$$

Эти операторы имеют следующие свойства:

$$\hat{\omega}(\mathbf{r}) = \hat{\omega}^\dagger(\mathbf{r}), \quad [\hat{\omega}(\mathbf{r}), \hat{\omega}(\mathbf{r}')] = 0,$$

$$[\hat{\psi}_e(\mathbf{r}), \hat{\rho}(\mathbf{r}')] = \hat{\psi}_e(\mathbf{r}) \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

$$[\hat{\psi}_e(\mathbf{r}), \hat{\omega}(\mathbf{r}')] = \hat{\psi}_e(\mathbf{r}) \theta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}),$$

$$\hat{\psi}_e(\mathbf{r}) \hat{\omega}^n(\mathbf{r}') = (\hat{\omega}(\mathbf{r}') + \theta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}))^n \hat{\psi}_e(\mathbf{r}),$$

$$\hat{\psi}_e(\mathbf{r}) e^{im\hat{\omega}(\mathbf{r}')} = e^{im\theta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} e^{im\hat{\omega}(\mathbf{r}')} \hat{\psi}_e(\mathbf{r}),$$

$$\hat{\psi}_e^\dagger(\mathbf{r}) e^{-im\hat{\omega}(\mathbf{r}')} = e^{im\theta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} e^{-im\hat{\omega}(\mathbf{r}')} \hat{\psi}_e^\dagger(\mathbf{r}). \quad (49)$$

Далее показано, что m имеет смысл числа точечных вихрей, прикрепленных к затравочной начальной частице, с образованием композитной частицы (КЧ). Статистика КЧ зависит от статистики затравочных частиц и числа прикрепленных вихрей m . Нормируем операторы $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$, $\hat{\psi}(\mathbf{r})$, требуя чтобы их коммутаторы равнялись $\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$:

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')]_{\pm} &= e^{-im\theta(0) + im\theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\ &\times [\hat{\psi}_e(\mathbf{r}) \hat{\psi}_e^\dagger(\mathbf{r}') \pm e^{im\pi} \hat{\psi}_e^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}_e(\mathbf{r})] e^{-im(\hat{\omega}(\mathbf{r}') - \hat{\omega}(\mathbf{r}))} \\ &= \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь мы учли соотношение $\theta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \pi$ для $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$. Можно заметить, что КЧ, представленные операторами $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$, $\hat{\psi}(\mathbf{r})$, являются композитными фермионами (КФ), когда исходные частицы являются фермионами и число вихрей m четно либо когда затравочные частицы являются бозонами и число вихрей m нечетно. Аналогично КЧ являются композитными бозонами, если затравочные частицы являются фермионами и число вихрей нечетно или если затравочные частицы являются бозонами и число вихрей m четно.

Оператор кинетической энергии \hat{K} на языке операторов $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$ и $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\hat{K} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \int d^2\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) e^{im\hat{\omega}(\mathbf{r})} \left[-i\nabla + \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 e^{-im\hat{\omega}(\mathbf{r})} \hat{\psi}(\mathbf{r}). \quad (51)$$

Он может быть преобразован с учетом того, что

$$\begin{aligned} \left(-i\nabla + \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) e^{-im\hat{\omega}(\mathbf{r})} \hat{\psi}(\mathbf{r}) &= e^{-im\hat{\omega}(\mathbf{r})} \\ &\times \left(-i\nabla + \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) - m\nabla\hat{\omega}(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (52)$$

что приводит к формуле

$$\hat{K} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \int d^2\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-i\nabla + \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) - m\nabla\hat{\omega}(\mathbf{r}) \right]^2 \hat{\psi}(\mathbf{r}). \quad (53)$$

Она содержит дополнительный вектор-потенциал $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{r})$, называющийся статистическим калибровочным потенциалом Черна–Саймонса [41],

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) &= -\frac{m\hbar c}{e} \nabla \hat{\omega}(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{m\hbar c}{e} \int d^2\mathbf{r}' \nabla_r \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\rho}(\mathbf{r}').\end{aligned}\quad (54)$$

Его расчет нуждается в особых мерах предосторожности. Авторы работы [41] указали на невозможность вынесения градиента ∇_r из-под знака интеграла $\int d^2\mathbf{r}' \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\rho}(\mathbf{r}')$, поскольку в общем случае это некорректно. Причиной этого является то, что функция $\theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ многозначная, и интегрирование $\theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ на двумерной плоскости \mathbf{r}' требует указания разрыва в пространстве \mathbf{r}' , который начинается в точке \mathbf{r} . Диапазон интегрирования по \mathbf{r}' зависит от \mathbf{r} , и перемещение производной по \mathbf{r} за пределы интегрирования по \mathbf{r}' дает дополнительный вклад. Чтобы избежать этих сложностей, производная $\nabla_r \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ с самого начала вводится в подынтегральное выражение в виде

$$\nabla_r \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\text{curl} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \quad (55)$$

Как было показано в работе [41], ротор (curl) скалярной величины S в двумерном пространстве есть вектор, а ротор вектора \mathbf{a} — скаляр,

$$\begin{aligned}(\text{curl} S)^i &= \varepsilon^{ij} \partial_j S, \quad \text{curl} \mathbf{a} = \varepsilon^{ij} \partial_i a_j, \quad i, j = 1, 2, \\ \varepsilon^{12} &= -\varepsilon^{21} = 1, \quad \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0.\end{aligned}\quad (56)$$

Статистический вектор-потенциал $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{r})$ может быть переписан

$$\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) = \frac{m\hbar c}{e} \int d^2\mathbf{r}' \text{curl} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \hat{\rho}(\mathbf{r}'), \quad (57)$$

что приводит к статистическому калибровочному магнитному полю $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{r}) &= \text{curl} \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) = \frac{m\hbar c}{e} \int d^2\mathbf{r}' \varepsilon^{ij} \varepsilon^{jk} \partial_i \partial_k \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \hat{\rho}(\mathbf{r}') \\ &= -\frac{m\hbar c}{e} \int d^2\mathbf{r}' \Delta_r \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \hat{\rho}(\mathbf{r}').\end{aligned}\quad (58)$$

Принимая во внимание равенство

$$\Delta \ln \mathbf{r} = 2\pi \delta^2(\mathbf{r}), \quad (59)$$

получим

$$\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{r}) = -\frac{2\pi m\hbar c}{e} \hat{\rho}(\mathbf{r}). \quad (60)$$

Подставляя вместо оператора плотности $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ его среднее значение $n_e = \nu/2\pi l^2$ с дробным значением фактора заполнения ν , равным $\nu = 1/m$ при $m \geq 1$

($l^2 = \hbar c/eB$ — магнитная длина), найдем среднее значение \bar{b} , равное $-B$, откуда следует

$$B + \bar{b} = 0. \quad (61)$$

Это означает, что результирующее магнитное поле в точности равно нулю. В этом приближении коллектив КЧ существует в нулевом магнитном поле. Если КЧ являются фермионами, их основное состояние будет иметь вид заполненного моря Ферми с волновым вектором Ферми, равным обратной магнитной длине. В том случае, когда КЧ являются бозонами, они будут испытывать БЭК.

Далее обсудим коллективные элементарные возбуждения над основным состоянием в случае композитных бозонов на основе теории Гинзбурга–Ландау. В работе [42] было показано, что для получения оператора эффективного действия, описывающего физические процессы на масштабах, больших магнитной длины l , необходимо проинтегрировать оператор действия по квантовым флуктуациям поля, имеющим место на коротких расстояниях меньше l . Предполагается, что оператор эффективного действия имеет тот же вид, что и оператор микроскопического действия, но с перенормированными константой жесткости, затравочной массой и эффективной силой взаимодействия.

5. Теория Гинзбурга–Ландау для дробного квантового эффекта Холла

В этом разделе будем следовать монографии [43], посвященной ДКЭХ, кандидатской диссертации Энгера [44] и ряду других работ. Теория Ландау о фазовом переходе второго рода [45] основана на введении параметра порядка в предположении, что свободная энергия $f(r)$ есть аналитическая функция параметра порядка ϕ , по крайней мере вблизи критической точки. В случае сверхпроводников и сверхтекучих жидкостей роль параметра порядка играет волновая функция конденсата. Теория Ландау применительно к сверхпроводникам была разработана Гинзбургом и Ландау [46], а для жидкого гелия — Гинзбургом и Питаевским [47]. В последнем случае микроскопические обоснования были предложены Питаевским [48] и Гроссом [49], их можно найти в монографии Нозьера и Пайнса [50]. Микроскопическая теория сверхтекучести была впервые предложена Боголюбовым на основе модели слабозаимодействующего Бозе-газа [51]. Плотность свободной энергии Гельмгольца $f(r)$ при разложении по малому параметру порядка ϕ имеет вид

$$f(r) = f_0 + \alpha |\phi|^2 + \frac{\beta}{2} |\phi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi|^2. \quad (62)$$

В случае сверхпроводников необходимо включить эффект, вызванный присутствием электромагнитного поля.

Это можно сделать путем замены канонического импульса $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ на кинетический импульс

$$\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(r), \quad (63)$$

где \mathbf{A} — вектор-потенциал, q — заряд куперовской пары: $q = -2e$.

Плотность свободной энергии Гиббса, включая и плотность энергии магнитного поля, выглядит следующим образом:

$$g(r) = f_0 + \alpha|\phi|^2 + \frac{\beta}{2}|\phi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \left(-i\hbar\nabla + \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \phi \right|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (64)$$

где $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ и μ_0 — магнитная проницаемость среды. Минимизация общей энергии Гиббса $G = \int g(r)dr$ относительно ϕ и \mathbf{A} дает

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla + \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \phi + \alpha\phi + \beta|\phi|^2\phi = 0,$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{ie\hbar}{m} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) - \frac{4e^2}{mc^2} |\phi|^2 \mathbf{A}. \quad (65)$$

Это уравнения Гинзбурга–Ландау.

Уравнение Гинзбурга–Питаевского–Гросса для волновой функции бозе-эйнштейновского конденсата $\phi(r, t)$ будет иметь вид

$$i\hbar \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi(r, t) + \lambda |\phi(r, t)|^2 \phi(r, t). \quad (66)$$

Разделением пространственных и временных частей $\phi(r, t) = e^{-i\mu t} \phi(r)$ и выбором химического потенциала $\mu = \lambda \rho_0$ можно преобразовать (66) в уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi(r) + \lambda (|\phi(r)|^2 - \rho_0) \phi(r) = 0, \quad (67)$$

известное как уравнение Гросса–Питаевского. Оно имеет такой же вид, как нелинейное уравнение Шредингера.

ДКЭХ замечателен тем, что он наряду со сверхпроводимостью и сверхтекучестью входит в число немногих квантовых эффектов, наблюдающихся на макроскопическом уровне. Все эти явления имеют основное состояние с ненулевой плотностью частиц, и во всех трех случаях есть квазичастичные возбуждения в виде вихрей. Но существуют некоторые аспекты ДКЭХ, которые отсутствуют в теории Гинзбурга–Ландау (ГЛ) сверхпроводников и сверхтекучих жидкостей. Первый из них — наличие щели в спектре коллективных элементарных возбуждений, что приводит к несжимаемости системы в случае ДКЭХ. Второе важное различие связано со свойствами вихрей. В отличие от вихрей в сверхтекучем He-II с экстенсивной энергией образования, величина которой пропорциональна $\ln(R/a)$ (R — радиус сосуда, a — размер ядра вихря), теперь вихри играют роль

одночастичных элементарных возбуждений с конечной энергией образования.

Кроме того, при ДКЭХ вихри имеют дробные заряды [52]. В многочисленных работах для некоторых вариантов теории ГЛ для ДКЭХ был предложен лагранжиан системы, содержащий дополнительный член, известный как член Черна–Саймонса. Он описывает векторный калибровочный потенциал, созданный вихрями, которые в свою очередь порождены квантами потока, созданными внешним магнитным полем B . Вместо свободной энергии Гиббса изучается функция действия системы.

Гирвин [52] и Гирвин и Макдональд [53] впервые предложили феноменологический вариант теории ГЛ для описания оператора действия \hat{S} в виде

$$\hat{S} = \int d^2r \left\{ \left| \left(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c} A_1(r) \psi(r) \right) \right|^2 + i(\psi^*(r)\psi(r) - n_0)\phi(r) - \frac{i\theta}{8\pi^2} (\phi \nabla \times A_1 + A_1 \times \nabla \phi) \right\}, \quad (68)$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{a} \quad (69)$$

является эффективным векторным потенциалом, состоящим из физического внешнего векторного потенциала \mathbf{A} , генерирующего магнитное поле B , и из калибровочного вектор-потенциала \mathbf{a} , созданного вихрями. Эффективное поле \mathbf{A}_1 отлично от нуля, если имеется несовпадение между плотностью частиц $\rho(r) = |\psi(r)|^2$ и квантованной плотностью Лафлина n_0 [42], которая определяет дробный фактор заполнения $\nu = 1/m$, где m — целое число. Плотность n_0 называется плотностью потока и определяется магнитным полем B через магнитную длину l в виде $n_0 = 1/m2\pi l^2$. Уравнение движения для вектора \mathbf{A}_1 в статическом случае есть

$$\theta \nabla \times \mathbf{A}_1 = (\psi^* \psi - n_0), \quad \theta = 2\pi/m. \quad (70)$$

Предложенная феноменологическая теория ГЛ позволяет понять, что энергия создания одного вихря конечна и что вихрь имеет дробный заряд. Разница между ДКЭХ и обычной сверхтекучестью объясняется сильной флуктуацией фазы, индуцированной расстройкой. Чанг, Хансен и Кивельсон [42] вывели модель теории поля, отталкиваясь от микроскопического гамильтониана. Они построили теорию ГЛ аналогично Гирвину, но в отличие от Гирвина в их подходе член Черна–Саймонса содержит только калибровочное поле $\hat{\mathbf{a}}(r)$ [42]. Как и в предыдущей работе [53], было получено, что возмущения локальной плотности, смещающие систему в сторону от точного дробного заполнения, приводят к созданию одночастичных возбуждений. Эти возбуждения имеют вид вихрей со статически неоднородной структурой и конечной энергией. Наряду с этим в работе [42] проанализированы коллективные элементарные возбуждения.

Для этого лагранжиан был разложен в ряд до квадратичных членов по $\delta\phi$ и δa в окрестности постоянных решений, соответствующих вакуумным средним значениям. Флуктуации значений $\delta\phi$ и δa были представлены в виде плоской волны с вектором \mathbf{q} . Дисперсия была найдена в виде [42]

$$\omega^2(q) = (\epsilon\kappa B)^2 + \frac{1}{4}\kappa q^2(\kappa q^2 + 8\lambda n_0). \quad (71)$$

Она имеет щель в точке $q = 0$ и пропорциональна внешнему магнитному полю B . Для отрицательных λ при достаточно малых значениях параметра $|\lambda|/\kappa$ дисперсионная кривая имеет ротонный тип поведения, как и в работе Гирвина, Макдональда и Платцмана [54]. Теория ГЛ [42] описывает несжимаемость, дробный заряд и дробную статистику квазичастиц. Однако, будучи крупнозернистой версией ДКЭХ, она дает неверные результаты на масштабах магнитной длины. Она описывает калибровочные поля в приближении среднего поля и правильно воспроизводит длинноволновые эффекты, исключая такие детали, как описание ядра вихря. Идея того, что длинноволновые эффекты, вызванные физическим магнитным полем, компенсируются калибровочным полем, также была высказана Лафлином [55] и авторами работы [56].

6. Точечные квантовые вихри в условиях дробного квантового эффекта Холла

Поскольку вихри играют важную роль в понимании ДКЭХ, мы приведем здесь больше информации по этому вопросу. Начнем с классической гидродинамики и перейдем к квантовым вихрям, следуя работам [44,57,58]. Идеальная жидкость без вязкости описывается в классической гидродинамике уравнением непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (72)$$

и уравнением Эйлера

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \times \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad (73)$$

где ρ , p и \mathbf{v} — соответственно плотность, давление и скорость поля вихрей в каждой точке жидкости. Вихревое движение характеризуется в 3D-гидродинамике величиной завихренности $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$. Если жидкость является не только идеальной, но и изоэнтропической, то величина $\boldsymbol{\omega}$ подчиняется дополнительно уравнению непрерывности. Поток является безвихревым (с потенциальным течением), если во всех точках жидкости $\boldsymbol{\omega} = 0$. В этом случае можно ввести потенциал скорости ϕ

$$\mathbf{v} = \nabla\phi, \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = 0. \quad (74)$$

В физической жидкости завихренность локализована на небольших площадях. Вне ядра вихря большая часть

жидкости является безвихревой. В 3D-жидкостях вихрь представляет собой трубку с параметром κ , имеющим смысл интенсивности вихря. Он определяется формулой

$$\kappa = \int \boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\sigma} = \oint \mathbf{v} d\mathbf{l}. \quad (75)$$

Теорема Гельмгольца (также известная как циркуляционная теорема Кельвина) гласит, что в отсутствие внешних вращательных сил жидкость, которая изначально была безвихревой, останется безвихревой и в дальнейшем. В случае 2D-жидкости возникают точечные вихри с нулевой площадью. Поле скоростей, генерирующее такой вихрь, может быть представлено выражениями

$$\mathbf{v} = \frac{\kappa}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta = \frac{\kappa}{2\pi} \left(-\mathbf{i} \frac{y}{r^2} + \mathbf{j} \frac{x}{r^2} \right),$$

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{j} \cos\theta - \mathbf{i} \sin\theta, \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos\theta + \mathbf{j} \sin\theta,$$

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta. \quad (76)$$

Здесь κ — сила вихря, а единичные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{e}_r$ и \mathbf{e}_θ соответствуют декартовым прямоугольным и полярным 2D-координатам. Следуя работе [41], мы должны принять во внимание определение ротора в 2D-пространстве, а именно то, что ротор вектора есть скаляр и ротор скаляра есть вектор:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{curl} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \epsilon^{ij} \partial_i v_j, \quad (77)$$

где ϵ^{ij} — антисимметричный тензор со свойствами, указанными в формуле (56).

Эти правила приводят к завихренности точечного вихря с полем скоростей (76)

$$\boldsymbol{\omega}(r) = \text{curl} \mathbf{v} = \frac{\kappa}{2\pi} \Delta \ln r = \kappa \delta^{(2)}(\mathbf{r}). \quad (78)$$

Поле скоростей, создаваемое точечным вихрем, имеет особенность. Поле является безвихревым (потенциальным) почти во всем пространстве, за исключением начала координат в точке $r = 0$. По этой причине площадь вихря равна нулю. Тем не менее суммарная завихренность конечна из-за особенностей (78). Циркуляция вихря также конечна, как следует из уравнения

$$\int \boldsymbol{\omega} d^2\mathbf{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \oint \frac{\kappa}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta d\mathbf{l} = \kappa, \quad d\mathbf{l} = r d\theta \mathbf{e}_\theta. \quad (79)$$

Жидкость, содержащая точечный вихрь, будет иметь потенциальное течение почти всюду. Точечный вихрь в несжимаемой жидкости обладает энергией

$$\int \frac{mv^2}{2} d^2\mathbf{r} = \frac{m\kappa^2}{2\pi} \ln \frac{R}{a}, \quad (80)$$

где R — радиус всей системы, a — радиус ядра вихря. Классическая система N точечных вихрей в несжимаемой жидкости имеет кинетическую энергию, связанную с каждым вихрем, и энергию взаимодействия

между ними. Это взаимодействие происходит не от электрического заряда вихрей, поскольку они являются нейтральными. Для двух вихрей с центрами \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 полезно определить центр пары \mathbf{R}_{gc} и относительную координату между центрами вихрей \mathbf{R}_{rel} в виде

$$\mathbf{R}_{gc} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{R}_{rel} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2. \quad (81)$$

Уравнения движения для пары вихрей с одинаковыми силами $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ запишутся в виде

$$\dot{X}_{gc} = \dot{Y}_{gc} = 0, \quad \dot{X}_{rel} = -\frac{\kappa Y_{rel}}{\pi R_{rel}^2}, \quad \dot{Y}_{rel} = \frac{\kappa X_{rel}}{\pi R_{rel}^2}. \quad (82)$$

Эти уравнения описывают круговые движения с угловой скоростью Ω вокруг неподвижной точки, которая называется стационарным центром вращения. Величина Ω зависит от постоянного расстояния между вихрями $|\mathbf{R}_{rel}|$ следующим образом:

$$\Omega = \frac{\kappa}{\pi |\mathbf{R}_{rel}|^2}. \quad (83)$$

Для пары вихрей с противоположными завихренностями $\kappa = \kappa_1 = -\kappa_2$, т.е. для пары вихрь–антивихрь, уравнения движения имеют вид

$$\dot{X}_{gc} = \frac{\kappa}{\pi} \frac{Y_{rel}}{|\mathbf{R}_{rel}|^2}, \quad \dot{Y}_{gc} = \frac{\kappa}{\pi} \frac{X_{rel}}{|\mathbf{R}_{rel}|^2}, \quad \dot{X}_{rel} = \dot{Y}_{rel} = 0. \quad (84)$$

Вихри не будут двигаться относительно друг друга, но будут следовать вместе вдоль прямой линии, перпендикулярной вектору \mathbf{R}_{rel} , их соединяющему [44].

Эта картина точно такая же, как для структуры 2D-магнитоэкситона, движущегося с волновым вектором \mathbf{k} , перпендикулярным вектору \mathbf{d} , соединяющему электрон и дырку в паре. Расстояние $d = kl^2$ определяется значением \mathbf{k} .

Можно вспомнить, что на существование квантовых вихрей впервые указал Онзагер [59], который предположил, что циркуляция в сверхтекучем He-II квантуется с квантом циркуляции, равным h/m . Существование квантовых вихрей в He-II было предположено Фейнманом [60] и экспериментально наблюдалось Вайнемом [61]. Квантование вихрей в He-II может быть объяснено в рамках теории ГЛ. Поле скоростей сверхтекучей жидкости определяется волновой функцией

$$\phi = \sqrt{\rho} e^{iS} \quad (85)$$

и может быть записано в виде

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla S. \quad (86)$$

Циркуляция по замкнутому контуру C равна

$$\kappa = \oint \mathbf{v} d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} \oint \nabla S d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} \delta S, \quad (87)$$

δS есть изменение фазы волновой функции при движении по контуру C . Но волновая функция должна быть

однозначной. По этой причине величина δS должна быть кратна 2π . Это означает, что

$$\kappa = \frac{\hbar}{m} 2\pi s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (88)$$

Завихренность квантового вихря имеет дискретные значения с квантами h/m . Это определение завихренности отличается от классического определения в гидродинамике $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$. Единственная волновая функция, инвариантная по отношению к вращению, записанная в полярных координатах $S = s\theta$ и обладающая свойством (88), будет иметь вид

$$\phi(\mathbf{r}) = f(r) e^{is\theta}. \quad (89)$$

Она производит то же самое поле скоростей, что и классический точечный вихрь,

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar s}{mr} \mathbf{e}_\theta = \frac{\kappa}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta. \quad (90)$$

Кинетическая энергия

$$E = \int \frac{1}{2} m v^2 d^2r = \frac{\hbar^2 \pi}{m} s^2 \ln(R/\xi) \quad (91)$$

теперь выражается через длину когерентности ξ вместо радиуса ядра a . Обрезание при ξ используется, чтобы избежать логарифмической расходимости при приближении к ядру вихря.

Подставляя функцию вихря (89) в уравнение Гинзбурга–Питаевского–Гросса (66), Миклебаст [44,58] нашел следующее уравнение для функции $f(r)$:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(2 - \frac{s^2}{r^2}\right) f - 2f^3 = 0. \quad (92)$$

Оно зависит только от s^2 . В отличие от случая He-II БЭК в сверхпроводниках формируется куперовскими парами с зарядом $q = -2e$ вместо нейтральных атомов. Сверхпроводники второго рода допускают проникновение магнитного поля в их толщину, формируя квантовые вихри, а в сверхпроводниках первого рода магнитное поле не может проникнуть вглубь [62]. Квантованные вихри (вихри Абрикосова) имеют смешанное происхождение и состоят из электронной компоненты и электромагнитного поля. Они впервые были описаны Абрикосовым [63] на основе теории ГЛ с ненулевым электромагнитным полем \mathbf{A} . Было показано, что магнитный поток через вихревые трубки квантуется с квантом потока ϕ_0

$$\int \mathbf{B} d\boldsymbol{\sigma} = \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = n\phi_0, \quad \phi_0 = \frac{2\pi \hbar c}{|q|}. \quad (93)$$

Полная энергия на единицу длины вихревой трубки конечна и равна

$$E = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \ln \frac{\lambda}{\xi}, \quad \lambda > \xi, \quad (94)$$

где λ — лондоновская глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник второго рода (введена в [64]).

Величина ξ есть длина корреляции между электронами в куперовских парах.

В случае ДКЭХ Гирвин [52] предположил, что вклад электромагнитного поля в результирующую плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, определяемую в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left\{ \psi^*(r)(-i\hbar\nabla)\psi(r) + \psi(r)(i\hbar\nabla)\psi^*(r) \right\} + \frac{e}{c} \mathbf{A}\psi^*(r)\psi(r), \quad (95)$$

реорганизует состояние точечного вихря таким образом, что его итоговая циркуляция по удаленному контуру $r \rightarrow \infty$ будет равна нулю

$$\oint \mathbf{j}(\mathbf{r})d\mathbf{l} = 0. \quad (96)$$

Это возможно, только если магнитный поток через поверхность вихря квантуется в виде

$$\int \text{rot} \mathbf{A} d^2\mathbf{r} = \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = -m\phi_0, \quad \phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{|e|}. \quad (97)$$

Этот интеграл, умноженный на $n_0|e|/c$, точно компенсирует циркуляцию, связанную с электронной частью плотности тока

$$\oint \frac{1}{2} \left\{ \psi^*(r)(-i\hbar\nabla)\psi(r) + \psi(r)(i\hbar\nabla)\psi^*(r) \right\} d\mathbf{l} = 2\pi\hbar mn_0, \quad (98)$$

поскольку волновая функция $\psi(r)$ имеет вид

$$\psi(r) = \sqrt{n_0} f(r) e^{im\theta}, \quad f(r) \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \infty. \quad (99)$$

Число квантов магнитного потока $-m$ должно быть противоположным магнитному квантовому числу волновой функции электрона. Энергия, необходимая для создания такого вихря, конечна и не является экстенсивной, как в случае чисто электронного состава вихря. Как отметили Гирвин и Макдоналд [53], изолированный вихрь смешанного состава обладает конечной энергией образования. Такие вихри могут быть возбуждены термически по одному. Вихри чисто электронного состава не могут термически возбуждаться поодиночке, так как нужна экстенсивная величина энергии. Но они могут возбуждаться парами вихрь–антивихрь с близко расположенными осями. В этом случае результирующая скорость вращения жидкости на больших расстояниях от осей вихрей равна нулю, и энергия, необходимая для образования пары, конечна. Такие пары могут образоваться спонтанно (термически), если есть сверхтекучая компонента, в среде которой они образуются. Но если такие пары спонтанно образовались, то 2D-жидкость становится неоднородной или однородной локально; это делает возможным процесс БЭК на конечной площади и способствует появлению сверхтекучей компоненты жидкости. Пары вихрь–антивихрь нуждаются в существовании сверхтекучей

жидкости и в то же время способствуют ее появлению. Это процесс самоорганизации, возникающий спонтанно в 2D-системе под влиянием квантовых флуктуаций. Возникшие пары вихрь–антивихрь могут находиться в связанном и несвязанном состоянии, и это приводит к фазовому переходу Березинского–Костерлица–Таулесса при конечных температурах.

7. Калибровочные преобразования и статистические калибровочные поля

Гирвин и Макдональд [53] показали, что лафлиновская волновая функция основного состояния, описывающая ДКЭХ в 2D-однокомпонентном электронном газе, имеет скрытую симметрию [65]. Эта волновая функция выглядит следующим образом:

$$\psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \exp \left[-\frac{1}{4} \sum_k |z_k|^2 \right]. \quad (100)$$

Фактор заполнения НУЛ является дробным числом $\nu = 1/m$ с целым $m > 1$; $z_k = x_k + iy_k$ есть комплексные координаты частиц в симметричной калибровке. По отношению к перестановке любых двух частиц волновая функция (100) антисимметрична при нечетных значениях m и симметрична при четных значениях; она описывает фермионы и бозоны соответственно. Волновая функция (100) может быть записана с использованием сингулярного калибровочного преобразования как

$$\psi_{\text{new}}(z_1, \dots, z_N) = \exp \left[-im \sum_{i < j} \arg(z_i - z_j) \right] \times \psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} |z_i - z_j|^m \exp \left[-\frac{1}{4} \sum_k |z_k|^2 \right]. \quad (101)$$

Это волновая функция бозонного типа при любом целочисленном значении $m > 1$. Недиagonalные элементы матрицы плотности $\rho(z, z')$, рассчитанные на основе волновой функции (100), являются короткодействующими с характерным масштабом, равным магнитной длине, а те же матричные элементы, рассчитанные на основе волновой функции (101), $\tilde{\rho}(z, z')$, являются величинами, медленно убывающими по степенному закону $|z - z'|^{-m/2}$. Сингулярная матрица плотности $\tilde{\rho}(z, z')$ имеет недиагональный дальний порядок. Физическая причина этого различия связана, как было объяснено Стормером [66], с наличием вихрей, индуцированных вокруг каждой частицы под действием квантов магнитного потока.

Наличие вихрей можно продемонстрировать при помощи более простого примера, предложенного Энгером [44], при использовании волновой функции $\psi(z)$ двух частиц, зависящей только от их относительной

координаты z . Предполагается, что $\psi(z)$ подчиняется какой-либо статистике, и после перестановки двух частиц, что осуществляется заменой z на $e^{i\pi}z$, она становится равной

$$\begin{aligned}\psi(e^{i\pi}z) &= e^{i\theta}\psi(z), \\ \theta &= \pi(2n+1) \text{ для фермионов,} \\ \theta &= 2\pi n \text{ для бозонов,} \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}\quad (102)$$

Введем калибровочное преобразование $e^{i\eta(z)}$, которое преобразует волновую функцию $\psi(z)$ в другую волновую функцию $\phi(z)$ бозонного типа

$$e^{i\eta(z)}\psi(z) = \phi(z) = \phi(e^{i\pi}z). \quad (103)$$

Чтобы удовлетворить этому требованию и равенствам

$$e^{i\eta(e^{i\pi}z)}\psi(e^{i\pi}z) = e^{i\eta(z)}\psi(z) = e^{i\eta(e^{i\pi}z)}e^{i\theta}\psi(z), \quad (104)$$

функция $\eta(z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned}\eta(z) - \eta(e^{i\pi}z) &= \theta, \\ \eta(z) &= -\frac{\theta}{\pi} \operatorname{arg} z = -\frac{\theta}{\pi} \arctan \frac{y}{x}.\end{aligned}\quad (105)$$

Преобразование волновой функции (103) должно сопровождаться преобразованием потенциала электромагнитного поля A_μ [44]

$$\begin{aligned}\frac{e}{\hbar c} A_\mu \rightarrow \frac{e}{\hbar c} A_\mu + \partial_\mu \eta(z) &= \frac{e}{\hbar c} (A_\mu + a_\mu), \\ \mu &= 0, 1, 2.\end{aligned}\quad (106)$$

Таким образом, наряду с электромагнитным потенциалом A_μ появляется дополнительный калибровочный потенциал a_μ

$$\begin{aligned}\frac{e}{\hbar c} a_\mu(\mathbf{r}) &= \partial_\mu \eta(\mathbf{r}), \\ a_\mu(\mathbf{r}) &= \frac{\hbar c}{e} \partial_\mu \eta(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar c \theta}{\pi e} \partial_\mu \arctan \frac{y}{x}.\end{aligned}\quad (107)$$

Статистический калибровочный вектор-потенциал имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{\hbar c \theta}{\pi e} \operatorname{curl} \ln r = \frac{\hbar c \theta}{\pi e} \nabla \times \ln r, \\ a_i &= \frac{\hbar c \theta}{\pi e} \varepsilon^{ij} \partial_j \ln r, \quad i, j = 1, 2.\end{aligned}\quad (108)$$

Этот векторный потенциал создается вихрями вблизи каждой частицы. Это приводит к напряженности магнитного поля [41]

$$\begin{aligned}b(\mathbf{r}) &= \operatorname{curl} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) \\ &= \varepsilon^{ij} \partial_i a_j = -\frac{\hbar c \theta}{\pi e} \Delta \ln r = -\frac{2\hbar c \theta}{e} \delta^{(2)}(\mathbf{r}), \\ \frac{\Delta \ln r}{2\pi} &= \delta^{(2)}(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (109)$$

Магнитный поток, создаваемый этим магнитным полем, есть

$$\int b(\mathbf{r}) d^2 \mathbf{r} = -\frac{2\pi \hbar c \theta}{e} = -\frac{\theta}{\pi} \phi_0, \quad \phi_0 = \frac{\hbar c}{e}. \quad (110)$$

Он равен $-(2n+1)\phi_0$, когда начальные частицы — фермионы, и составляет $-2n\phi_0$ для бозонов. Этот результат показывает, что затравочные фермионы, присоединяя к себе нечетное число квантов потока, превращаются в композитные бозоны и описываются новой волновой функцией $\phi(z)$, которая подчиняется статистике Бозе. Эффективная масса m и заряд e остаются такими же, по крайней мере в данном приближении, но состав и статистика окончательных квазичастиц изменились. Формулу (109) можно обобщить на любое число частиц, которые совместно создают результирующее магнитное поле

$$b(\mathbf{r}) = -\frac{2\hbar c \theta}{e} \sum_{i=1}^N \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = -\frac{2\theta \hbar c}{e} \rho(\mathbf{r}), \quad (111)$$

где $\rho(\mathbf{r})$ — плотность частиц.

Как было указано выше, Жанг, Хансон и Кивельсон [42] обобщили теорию ГЛ, введя в лагранжиан дополнительный член Черна–Саймонса [67], связанный с влиянием статистических калибровочных полей. Лагранжиан Гинзбурга–Ландау–Черна–Саймонса в том виде, в котором его написал Энгер [44], выглядит как

$$\begin{aligned}L &= i\hbar \phi^* \left(\partial_t + \frac{ie}{\hbar c} (A_0 + a_0) \right) \phi \\ &+ \frac{\hbar^2}{2m} \phi^* \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} (\mathbf{A} + \mathbf{a}) \right)^2 \phi \\ &- \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi - \rho_0)^2 + \frac{\mu}{2} e^{\mu\nu\sigma} a_\mu \partial_\nu a_\sigma.\end{aligned}\quad (112)$$

Здесь были использованы следующие обозначения: $\mu, \nu, \sigma = 0, 1, 2$, $\partial_0 = \partial_t$, $\partial_i = \{\partial_1 = \partial_x, \partial_2 = \partial_y\}$. Тензор $\varepsilon^{\mu\nu\sigma}$ имеет ненулевые компоненты только для различных значений μ, ν, σ . Они меняют знаки при любых перестановках двух индексов следующим образом:

$$\varepsilon^{012} = 1, \quad \varepsilon^{021} = -1, \quad \varepsilon^{102} = -1, \quad \varepsilon^{120} = -1, \dots \quad (113)$$

Внешний 2D-электромагнитный векторный потенциал \mathbf{A} и скалярный потенциал A_0 объединяются в виде $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$. Статистический калибровочный потенциал a_μ состоит из трех компонент. Две из них $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ генерируют статистическое „магнитное“ поле, а третья компонента a_0 генерирует статистическое „электрическое“ поле. Параметры m и e лагранжиана (112) имеют смысл эффективной массы и заряда композитных бозонов. Они могут отличаться от массы и заряда затравочных частиц. Параметры λ и ρ_0 характерны для теории ГЛ, а μ есть параметр Черна–Саймонса [67]. Вариация (112) по отношению к ϕ^*

приводит к нелинейному уравнению Шредингера

$$\left[i\hbar\partial_t - \frac{e}{c}(A_0 + a_0) \right] \phi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla + \frac{ie}{\hbar c}(\mathbf{A} + \mathbf{a}) \right]^2 \phi - \lambda(\phi^* \phi - \rho_0)\phi. \quad (114)$$

Вариация (112) по отношению к a_0 приводит к соотношениям

$$\mu \varepsilon^{ij} \partial_i a_j = e\phi^* \phi = e\rho, \quad (115)$$

которые могут быть переписаны в виде

$$\mu \text{curl} \mathbf{a} = \mu \nabla \times \mathbf{a} = \mu b = e\rho. \quad (116)$$

Параметр μ может быть определен из его сравнения с выражением (107)

$$\mu = -\frac{2\theta\hbar c}{e^2}. \quad (117)$$

Для затравочной фермионной частицы с $\theta = \pi(2n + 1)$ параметр μ лагранжиана (112) равен

$$-\frac{2\pi\hbar c}{e^2}(2n + 1) = -(2n + 1)\frac{\phi_0}{e}.$$

Третья вариация по a_i дает

$$\mu(\nabla a_0 - \partial_i \mathbf{a}) = e\mathbf{j}(r), \quad (118)$$

где $\mathbf{j}(r)$ есть 2D-плотность тока, определяемая выражением

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} \left\{ \phi^* \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c}(\mathbf{A} + \mathbf{a}) \right) \phi - \phi \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c}(\mathbf{A} + \mathbf{a}) \right) \phi^* \right\}. \quad (119)$$

Уравнение (118) означает, что статистическое „электрическое“ поле

$$\varepsilon = -\nabla a_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{a} \quad (120)$$

связано с плотностью тока частиц $\mathbf{j}(r)$.

Плотность энергии системы Гинзбурга–Ландау–Черна–Саймонса в чисто статическом внешнем магнитном поле ($\mathbf{A}_0 = 0$) равна

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left| \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c}(\mathbf{A} + \mathbf{a}) \right) \phi \right|^2 + \frac{\lambda}{2}(\rho - \rho_0)^2. \quad (121)$$

Простое решение этих уравнений может быть получено, если положить

$$\phi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho_0} e^{iS(\mathbf{r})}. \quad (122)$$

Функция $S(r)$ должна подчиняться уравнению

$$\nabla S + \frac{e}{\hbar c}(\mathbf{A} + \mathbf{a}) = 0. \quad (123)$$

В случае $S = \text{const}$ имеем

$$\mathbf{A} + \mathbf{a} = 0. \quad (124)$$

Это означает, что соответствующие магнитные поля $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ и $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ компенсируют друг друга. Окончательные квазичастицы, названные композитными бозонами [68–70], не чувствуют результирующего магнитного поля и ведут себя как бозоны, взаимодействие между которыми имеет вид ϕ^4 .

Выше мы рассмотрели случай, когда начальная волновая функция $\psi(z)$ со статистикой Ферми была преобразована в другую волновую функцию $\phi(z)$, подчиняющуюся статистике Бозе, при помощи особого калибровочного преобразования. Ридом [40,71–73] были исследованы 2D-системы заряженных бозонов, взаимодействующих с перпендикулярным магнитным полем и между собой. Предполагалось, что фактор заполнения НУЛ равняется единице. Это означает, что есть один квант потока или один вихрь для каждой частицы. В этом случае вихрь имеет статистику Ферми и заряд противоположного знака по сравнению с заряженным бозоном. Теперь калибровочное преобразование создает композитные частицы с нулевым общим зарядом. Они подчиняются статистике Ферми. Такие нейтральные КФ будут двигаться в нулевом магнитном поле. Подобная система может быть описана в рамках теории Фермижидкости. Другой вариант, предложенный Гальперином, Ли и Ридом [39], был рассмотрен в разделе 4. Его исходный гамильтониан описывает электроны, образующие 2DEG с фактором заполнения НУЛ, равным половине ($\nu = 1/2$). Для каждого электрона есть два кванта потока (два вихря), каждый из которых имеет заряд $-e/2$ и подчиняется статистике Ферми. Два вихря эквивалентны одному двухкратному вихрю с зарядом $-e$ и статистикой Бозе. Калибровочное преобразование волновой функции будет преобразовывать электроны в нейтральные КФ, каждый из которых состоит из одного электрона и двухкратного вихря. Гамильтониан системы изменится: появится дополнительное калибровочное магнитное поле, которое в точности компенсирует внешнее магнитное поле. В итоге затравочные электрически заряженные фермионы в магнитном поле преобразовались в нейтральные КФ, движущиеся в нулевом магнитном поле. Фиктивное „магнитное“ поле Черна–Саймонса, созданное вихрями, в приближении среднего поля точно компенсирует внешнее магнитное поле только в статистическом смысле и в определенных условиях. Это происходит, когда средняя плотность электронов соответствует дробному целочисленному фактору заполнения. В приведенном примере с $\nu = 1/2$ калибровочное преобразование не изменяет статистику КЧ. Как и раньше, они являются нейтральными КФ, но зато в нулевом магнитном поле.

Одночастичные элементарные возбуждения появляются в виде вихрей с дробным зарядом. Они являются фермионами и имеют конечную энергию создания, как это было отмечено Гирвином [52] и Гирвином и Макдональдом [53]. Рид [39,40,71–73] обосновал взгляд, согласно которому основное состояние системы в условиях ДКЭХ с различными дробными целочисленными

факторами заполнения $\nu = 1/m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) содержат электроны, связанные с вихрями, поскольку такие связи понижают энергию системы. Отметим, что m -кратный вихрь имеет заряд $-evm$, где e — заряд электрона ($e = -|e|$). Составная частица из электрона и m -кратного вихря при $\nu = 1/m$ обладает нулевым зарядом и ведет себя как частица в нулевом магнитном поле. Вихрь чувствителен к электронной плотности, которая может изменяться в пространстве и времени. Композитные бозоны могут испытать БЭК, потому что она минимизирует их „кинетическую“ энергию. Состояние, введенное Лафлином, интерпретируется как БЭК композитных бозонов [65]. По своему происхождению „кинетическая“ энергия появляется из потенциальной энергии взаимодействия между частицами. В случае электронов это кулоновское электрон-электронное взаимодействие, которое не компенсировано калибровочным преобразованием и калибровочным потенциалом Черна-Саймонса. Она названа „кинетической“, поскольку зависит от волнового вектора [39]. Связанные объекты, такие как КЧ, имеют такую эффективную „кинетическую“ энергию. Существует притяжение между электронами и m -кратными вихрями, которые играют для электронов роль корреляционных квазидырок.

Оператор рождения в координатном представлении $\psi^\dagger(\mathbf{r})$ можно переписать в импульсном представлении следующим образом:

$$\psi^\dagger(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi^\dagger(\mathbf{r}). \quad (125)$$

У КЧ с $\mathbf{k} = 0$ электрон будет находиться в центре вихря, где многоэлектронная волновая функция обращается в нуль, в то время как у КЧ с волновым вектором $|\mathbf{k}| \neq 0$ электрон смещается от центра вихря на расстояние $|\mathbf{k}|l^2$. Можно сказать, что потенциал взаимодействия $V(|\mathbf{k}|)$ электрона с его корреляционной квазидыркой (другими словами, электрона и m -кратного вихря) есть результат кулоновского взаимодействия этого электрона с другими электронами. Обе компоненты, входящие в состав пары, испытывают дрейф в одном и том же направлении, которое перпендикулярно вектору, соединяющему их центры, так что их расстояние остается постоянным и равным $|\mathbf{k}|l^2$. Энергия взаимодействия пары есть $V(|\mathbf{k}|)$, а ее групповая скорость равна $\partial V(|\mathbf{k}|)/\partial |\mathbf{k}|$ [40,71–73]. Мы можем добавить, что эта картина совпадает с имеющей место в случае структуры 2D-магнитоэкситона, где вместо энергии $V(|\mathbf{k}|)$ нужно рассматривать выражение $E(|\mathbf{k}|)$

$$E(|\mathbf{k}|) = 2 \sum_Q W_Q \sin^2 \left(\frac{[\mathbf{Q} \times \mathbf{k}]_z l^2}{2} \right),$$

$$W_Q = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 S |\mathbf{Q}|} e^{-Q^2 l^2 / 2}. \quad (126)$$

Здесь ϵ_0 — диэлектрическая константа, S — площадь поверхности слоя.

Гирвин, Макдональд и Платцман [54] разработали теорию спектра коллективных элементарных возбуждений в случае ДКЭХ, которая аналогична теории Фейнмана для сверхтекучего гелия. Предсказанный спектр имеет щель при $\mathbf{k} = 0$ и глубокий магниторотонный минимум при конечном волновом векторе, который является предшественником коллапса щели, связанного с нестабильностью по отношению к образованию вигнеровского кристалла. В [54] предполагалось существование только одной ветви спектра коллективных элементарных возбуждений. В этом приближении, называемом одно-модовым приближением, авторы [54] построили волновую функцию возбужденных состояний ϕ_k , действуя оператором плотности частиц $\hat{\rho}_k$ на волновую функцию основного состояния ψ_g ($\phi_k = \hat{\rho}_k \psi_g$). Они определили энергию возбужденного состояния $\Delta(\mathbf{k})$, равную

$$\Delta(\mathbf{k}) = \frac{\langle \phi_k | (H - E_0) | \phi_k \rangle}{\langle \phi_k | \phi_k \rangle} = \frac{\langle \psi_g | \rho_k^\dagger [H_0, \rho_k] \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \rho_k^\dagger \rho_k | \psi_g \rangle} = \frac{f(\mathbf{k})}{s(\mathbf{k})}, \quad (127)$$

где $f(\mathbf{k})$ — сила осциллятора, $s(\mathbf{k})$ — статический структурный фактор. Полная сумма сил осцилляторов насыщается вкладом циклотронной моды, и $f(\mathbf{k})$ будет иметь зависимость типа $|\mathbf{k}|^4$. Как было установлено Ли и Жангом [74], квантовые вихри оказывают существенное влияние на динамический и статический структурные факторы. Это приводит к зависимости типа $s(\mathbf{k}) \sim |\mathbf{k}|^4$ при $k \rightarrow 0$. В этом случае в спектре $\Delta(\mathbf{k})$ имеется щель. В пренебрежении влиянием квантовых вихрей зависимость $s(\mathbf{k})$ пропорциональна $|\mathbf{k}|^2$, а энергетический спектр будет бесщелевым (голдстоуновского типа) $\Delta(\mathbf{k}) \approx \mathbf{k}^2$ при $k \rightarrow 0$ [2]. В заключение этого раздела укажем, что в условиях ДКЭХ с частично заполненным уровнем Ландау ($\nu < 1$) принцип Паули более не исключает существование низколежащих возбуждений внутри НУЛ. Они существуют наряду с межуровневыми возбуждениями. Последние имеют в спектре щель, равную циклотронной энергии [75].

Мы изучаем компланарную электронно-дырочную систему, где электроны находятся в зоне проводимости, а дырки в валентной зоне в присутствии сильного перпендикулярного магнитного поля. Ранее такая система была изучена в ряде работ [9,22–25,27,76]. Большинство из них было посвящено теории 2D-магнитоэкситонов. Но были и работы, посвященные другим аспектам этой системы. Например, Макдональд, Резай и Келлер [77], а также Жоглекар и Макдональд [78] обсудили спектр фотолюминесценции (ФЛ) в режиме ДКЭХ. Было отмечено, что в компланарной системе спектр ФЛ не проявляет аномалий, связанных с ДКЭХ. Однако если разделить электронный и дырочный слои (двойная квантовая яма), то при факторе заполнения $\nu > \nu_0$, когда происходит образование несжимаемой квантовой жидкости, появляется новый пик в спектре ФЛ. Он отделен щелью от других пиков. Нас интересует распределение квантов магнитного потока в случае электронно-дырочной

системы с равными средними числами электронов и дырок $\bar{N}_e = \bar{N}_h$, с фактором заполнения $\nu = \bar{N}_e/N$, где N — общее число квантов потока $N = S/2\pi l^2$, а S — площадь поверхности слоя, $2\pi l^2$ — площадь циклотронной орбиты. Для дробного целочисленного фактора заполнения имеется целое число квантов потока на каждую электронно-дырочную пару. Образование вихрей в этом случае не изучалось до настоящего времени. Можно представить себе два возможных сценария этого процесса. Один из них связан с формированием вихрей из уже созданных магнитоэкситонов. Это будут нейтральные вихри, как в случае He-II, с экстенсивной энергией образования отдельного вихря и конечной энергией образования пары вихрь–антивихрь. Появление таких вихрей ведет к фазовому переходу типа Березинского–Костерлица–Таулесса [79,80]. Другой сценарий предполагает создание заряженных вихрей в каждой из двух подсистем (электронной и дырочной) по отдельности. При концентрациях электронов и дырок, близких к режиму ДКЭХ, заряженные вихри будут создавать свои калибровочные магнитные поля, которые в среднем компенсируют друг друга. В этом приближении теория 2D-магнитоэкситонов останется без изменений. Но благодаря квантовым флуктуациям концентрации электронов и дырок не совпадают в точности в отдельные моменты времени в отдельных местах системы, и это будет проявляться в виде новых ветвей в спектре одночастичных и коллективных элементарных возбуждений системы.

8. Экситоны в условиях квантового эффекта Холла в двухслойных электронных системах

В этом разделе мы дадим краткий обзор БЭК экситонов в режиме квантового эффекта Холла в двухслойных электронных системах. Для краткости назовем эти экситоны экситонами Фертига. На каждом слое фактор заполнения полагается равным $1/2$, т.е. общий фактор заполнения для двух слоев равен единице: $\nu_t = 1$. Наша основная цель состоит в том, чтобы сравнить это явление со случаем БЭК двумерных магнитоэкситонов. Такое сравнение позволит лучше понять физику этих явлений и проверить правильность сделанных приближений.

В работе [81] Фертиг исследовал энергетический спектр двухслойных электронных систем в сильном перпендикулярном магнитном поле и ввел понятие фазовой когерентности электронных состояний в двух смежных слоях, что привело к модели БЭК экситонов в условиях квантового эффекта Холла. Были найдены доказательства того, что БЭК экситонов Фертига действительно имеет место [82]. Экситоны Фертига состоят из электронов на НУЛ зоны проводимости одного слоя и дырок, которые появляются на НУЛ зоны проводимости в другом слое. Образование таких необычных дырок

объясняется тем, что наполовину заполненный НУЛ из зоны проводимости, например, первого слоя можно себе представить формально как полностью заполненный электронами и одновременно наполовину заполненный дырками. Полностью заполненный электронами первый слой компенсируется примесями легированного соседнего слоя, и теоретическая модель учитывает только дырки в первом слое и электроны во втором слое. Обе компоненты находятся на НУЛ зоны проводимости в разных слоях и характеризуются фактором заполнения, равным половине для каждого из них. Экситоны Фертига появляются, когда расстояние между слоями достаточно мало, а общая плотность n_t электронов в двойном слое равна $eB/hc = n_t = 1/2\pi l^2$. Общий фактор заполнения $\nu_t = n_t 2\pi l^2$ равен единице. Температура системы предполагается низкой. БЭК экситонов Фертига [81] используется для описания некоторых электрических и транспортных свойств, обнаруженных в работах [83–85]. Как было отмечено в [82], БЭК экситонов Фертига является отражением того, что электроны находятся в когерентном линейной комбинации состояний двух слоев. Эта межслойная фазовая когерентность возникает только тогда, когда эффективное расстояние между слоями d/l меньше критического значения $(d/l)_c$ (при больших d/l двухслойная система ведет себя как две независимые 2D-электронные системы). Следуя [86], это новое состояние можно представить как состояние Ферми-жидкости, составленной из композитных фермионов. Оно уникально тем, что в отличие от других квантовых холловских состояний обладает нарушенной симметрией в отсутствие туннелирования между слоями.

В двухслойных системах имеются два энергетических масштаба. Один из них — потенциальная энергия взаимодействия между электронами в разных слоях, другой — энергетическая щель между симметричным и асимметричным состояниями электронов в двух слоях, определяемая амплитудой туннелирования между ними. Возможность изменения силы взаимодействия между слоями путем изменения напряжения на контактах позволяет изучать фазовые переходы между сжимаемой жидкостью Ферми и несжимаемыми состояниями квантового эффекта Холла в зависимости от величины d/l [86]. В большинстве теоретических исследований, за исключением работы [86], были использованы упрощающие предположения о полной поляризации спинов электронов. Поэтому далее мы исключим из обсуждения зеемановскую энергию. Согласно [87], в отсутствие туннелирования между слоями имеются две симметрии типа $U(1)$. Одна из них связана с сохранением полного электрического заряда $N_1 + N_2$, где N_1 и N_2 — число электронов в первом и втором слоях соответственно; другая связана с законом сохранения разности $N_1 - N_2$. В этих условиях появляются бесщелевые моды спектра. Это моды НГ, возникающие из-за нарушения симметрии, связанной с сохранением разности $N_1 - N_2$; они характеризуются недиагональным дальним порядком.

Спектр коллективных возбуждений двухслойной электронной системы с $\nu_l = 1$ был исследован Фертигом [81] на основе теоретической модели без туннелирования, но с разным расстоянием между слоями, в том числе и $d = 0$, с учетом того, что при $d > 0$ кулоновское электрон-электронное взаимодействие между слоями меньше внутрислоевого взаимодействия. Волновая функция основного состояния вводит межслоевую фазовую когерентность, отражающую новое состояние, в котором электроны более не принадлежат тому или иному слою, а вместо этого находятся в суперпозиционном состоянии, описываемом линейной комбинацией однослойных состояний

$$|\psi\rangle = \prod_t (ua_{1t}^\dagger + va_{2t}^\dagger)|0\rangle, \quad u^2 + v^2 = 1, \quad (128)$$

где a_{1t}^\dagger и a_{2t}^\dagger являются операторами рождения электрона на НУЛ зоны проводимости в соответствующих слоях, $|0\rangle$ — это вакуумное состояние. НУЛ в калибровке Ландау характеризуется квантовым числом $n = 0$ и одномерным волновым числом t . Равенство $u^2 = v^2 = 1/2$ означает наполовину заполненные НУЛ в каждом слое. Вводя операторы дырок d_t^\dagger , d_t для первого слоя вместо операторов a_{1t}^\dagger и a_{1t} , перепишем функцию (128) в виде

$$|\psi\rangle = \prod_t (u + va_t^\dagger d_{-t}^\dagger)|\psi_0\rangle, \quad |\psi_0\rangle = \prod_t a_{1t}^\dagger|0\rangle,$$

$$a_{2t} = a_t, \quad a_{2t}^\dagger = a_t^\dagger, \quad a_{1t} = d_{-t}^\dagger, \quad a_{1t}^\dagger = d_{-t}. \quad (129)$$

Операторы $a_t^\dagger d_{-t}^\dagger$ рождают электронно-дырочные пары с общим волновым вектором, равным нулю. Волновую функцию (129) можно интерпретировать как описывающую БЭК экситонов Фертига. Эта модель похожа на случай БЭК 2D-магнитоэкситонов, исследованной в работах [22–24, 76]. В случае магнитоэкситонов дырки образованы в валентной зоне.

В работе [81] были введены долинные концентрации в виде двухчастичных интегральных операторов, которые в электронно-дырочном представлении имеют вид

$$\begin{aligned} p^\pm(q) &= \sum_t e^{iq_y t^2} \left[d_{-\frac{q_x}{2}-t}^\dagger d_{\frac{q_x}{2}-t} + a_{-\frac{q_x}{2}+t}^\dagger a_{\frac{q_x}{2}+t} \right. \\ &\quad \left. \pm \left(d_{\frac{q_x}{2}-t} a_{\frac{q_x}{2}+t} - a_{-\frac{q_x}{2}+t}^\dagger d_{-\frac{q_x}{2}-t}^\dagger \right) \right], \\ \rho_z(q) &= \sum_t e^{iq_y t^2} \left(d_{\frac{q_x}{2}-t} a_{\frac{q_x}{2}+t} + a_{-\frac{q_x}{2}+t}^\dagger d_{-\frac{q_x}{2}-t}^\dagger \right), \\ \rho_F(q) &= \sum_t e^{iq_y t^2} \left(a_{\frac{q_x}{2}+t}^\dagger a_{\frac{q_x}{2}+t} - d_{-\frac{q_x}{2}-t}^\dagger d_{\frac{q_x}{2}-t} \right). \end{aligned} \quad (130)$$

Вместо них можно ввести другие, более привычные двухчастичные интегральные операторы, представляющие рождение и уничтожение экситонов Фертига, опти-

ческие и акустические плазмоны в двухслойной структуре с электронами и дырками в зоне проводимости,

$$\begin{aligned} \rho(q) &= \sum_t e^{iq_y t^2} \left[d_{-\frac{q_x}{2}-t}^\dagger d_{\frac{q_x}{2}-t} + a_{-\frac{q_x}{2}+t}^\dagger a_{\frac{q_x}{2}+t} \right], \\ D(q) &= \sum_t e^{iq_y t^2} \left[a_{-\frac{q_x}{2}+t}^\dagger a_{\frac{q_x}{2}+t} - d_{-\frac{q_x}{2}-t}^\dagger d_{\frac{q_x}{2}-t} \right], \\ d(q) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_t e^{iq_y t^2} d_{\frac{q_x}{2}-t} a_{\frac{q_x}{2}+t}, \\ d^\dagger(q) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_t e^{iq_y t^2} a_{\frac{q_x}{2}+t}^\dagger d_{\frac{q_x}{2}-t}^\dagger. \end{aligned} \quad (131)$$

Для случая дырок в валентной зоне в работах [23, 24] были введены противоположные знаки в выражениях для $\rho(q)$ и $D(q)$.

Отношение между двумя наборами операторов (130) и (131) есть

$$\begin{aligned} p^\pm(q) &= \rho(q) \pm \sqrt{N} [d(q) - d^\dagger(-q)], \\ \rho_z(q) &= \sqrt{N} [d(q) + d^\dagger(-q)], \\ \rho_F(q) &= D(q). \end{aligned} \quad (132)$$

Введенные в [81] функции отклика имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_\pm(q, \omega) &= -i \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle [\rho^\mp(q, t), \rho^\pm(-q, 0)] \rangle, \\ \chi_z(q, \omega) &= -i \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle [\rho_z(q, t), \rho_z(-q, 0)] \rangle, \\ \chi_F(q, \omega) &= -i \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle [\rho_F(q, t), \rho_F(-q, 0)] \rangle. \end{aligned} \quad (133)$$

Полюса этих функций представляют возбуждения системы. Возбуждения можно рассматривать как волны долинной концентрации или как волны псевдоспиновой плотности. Расчет функции отклика был сделан Фертигом [81] с использованием диаграммной техники, разработанной Каллиным и Гальпериним [75]. Функции отклика записаны в терминах вершинных частей функции Грина и собственноэнергетических частей. Это приближение показано на диаграммах (см. рис. 3, а в [81]). Среди них нет диаграмм, содержащих электронно-дырочные петли. Вклады этих петель обратно пропорциональны циклотронной частоте ω_c и убывают в пределе сильного поля. Самосогласованный расчет вершинных частей, включая петли, довольно сложен. Далее приведем результаты, полученные в работе [81] для энергетического спектра коллективных элементарных возбуждений.

Для $d = 0$ гамильтониан взаимодействия является инвариантным относительно унитарного преобразования $SU(2)$. Конкретный выбор волновой функции основного состояния (129) предполагает состояние с нарушенной

симметрией, поэтому можно ожидать появления моды НГ. При $d = 0$ мода НГ имеет зависимость $\omega(k) \sim k^2$ для малых k . Для $d > 0$ задача может быть представлена в терминах эквивалентной спиновой системы с линейным законом дисперсии при малых волновых векторах. Мода НГ при $d > 0$ имеет линейный закон дисперсии с наклоном зависящим от d . Такая зависимость похожа на акустическую плазмонную моду, возникающую в двухслойной системе в отсутствие магнитного поля [88]. Чтобы лучше понять этот результат, можно вспомнить, что основное состояние интерпретируется как БЭК экситонов Фертига. В самом деле, при $d > 0$ межслоевое электронно-дырочное кулоновское притяжение меньше, чем внутрислоевые электрон-электронное и дырочно-дырочное отталкивания, что приводит к результирующему отталкиванию в системе и превращает параболический закон дисперсии в линейный при малых значениях волнового вектора, как это происходит в теории сверхтекучести Бозе-газа Боголюбова [1]. При kl порядка единицы закон дисперсии [81] обнаруживает провал при некоторых критических значениях d , что свидетельствует о тенденции системы к фазовому переходу.

Другие соображения, касающиеся бесщелевых мод в ДКЭХ с участием многокомпонентных фермионов, можно найти в работах [89,90]. Мода НГ, полученная Фертигом, соответствует функции отклика $\chi_{\pm}(q, \omega)$. Согласно (132), оператор $\rho^{\pm}(q)$ описывает две суперпозиции оптических плазмонов и операторов экситонной моды. Имеются два других оператора $\rho_z(q)$ и $\rho_F(q)$, которые описывают истинные экситонную и акустическую моды. Как было установлено в работе [81], соответствующие две функции отклика $\chi_z(q, \omega)$ и $\chi_F(q, \omega)$ не имеют полюсов в области низких энергий, когда рассматриваются возбуждения в рамках НУЛ. Принято считать, что связанные с этими функциями возбуждения имеют более высокие энергии, чем обсуждавшаяся выше мода НГ (на величину порядка $\hbar\omega_c$). Это означает, что истинные экситонные моды и мода акустических плазмонов в случае БЭК экситонов Фертига не могут быть описаны бесщелевыми модами НГ. Как показано в следующем разделе, в аналогичном случае БЭК компланарных 2D-магнитоэкситонов оптическая плазменная ветвь спектра является также единственной модой НГ. Экситонные ветви спектра (энергетическая и квазиэнергетическая) имеют щели в точке $q = 0$, ротонный тип поведения при средних значениях q и тенденцию к насыщению в области $q \rightarrow \infty$. В то же время ветвь акустических плазмонов в области малых волновых векторов имеет абсолютную нестабильность: ей соответствуют чисто мнимые значения энергии. В случае БЭК магнитоэкситонов имеется одна мода НГ оптических плазмонов, две щелевые моды экситонов и одна нестабильная мода акустических плазмонов. Это качественно согласуется с результатами, полученными Фертигом [81] в случае БЭК экситонов в условиях квантового эффекта Холла. В этой работе была выявлена одна мода НГ бесщелевого типа, соответствующая оптическим плазмонам, а поведение

других мод в области малых значений энергий не было установлено.

9. Истинные, квази- и неустойчивые моды Намбу–Голдстоуна в случае бозе-эйнштейновской конденсации компланарных магнитоэкситонов

В этом разделе представим результаты, полученные в работах [32,33] для энергетического спектра коллективных элементарных возбуждений, возникающих над основным состоянием бозе-эйнштейновского конденсата компланарных магнитоэкситонов.

Полный гамильтониан, описывающий взаимодействие электронов и дырок, лежащих на НУЛ, есть

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{Coul}} + \hat{H}_{\text{Suppl}}, \quad (134)$$

где \hat{H}_{Coul} — гамильтониан кулоновского взаимодействия между электронами и дырками, лежащими на НУЛ,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{Coul}} = D \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{Q}} W_{\mathbf{Q}} [\hat{\rho}(\mathbf{Q})\hat{\rho}(-\mathbf{Q}) - \hat{N}_e - \hat{N}_h] \\ - \mu_e \hat{N}_e - \mu_h \hat{N}_h, \end{aligned} \quad (135)$$

а \hat{H}_{Suppl} — дополнительное косвенное взаимодействие между электронами и дырками, возникающее при их виртуальных переходах с НУЛ на возбужденные уровни Ландау (ВУЛ) и обратно. Выражение для этого взаимодействия было получено в [27] в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{Suppl}} = \frac{1}{2} B_{i-i} \hat{N} - \frac{1}{4N} \sum_{\mathbf{Q}} V(\mathbf{Q}) \hat{\rho}(\mathbf{Q}) \hat{\rho}(-\mathbf{Q}) \\ - \frac{1}{4N} \sum_{\mathbf{Q}} U(\mathbf{Q}) \hat{D}(\mathbf{Q}) \hat{D}(-\mathbf{Q}), \end{aligned} \quad (136)$$

где $\hat{\rho}(\mathbf{Q})$ — оператор флуктуации плотности. Он выражается через операторы флуктуации плотности для электронов $\hat{\rho}_e(\mathbf{Q})$ и дырок $\hat{\rho}_h(\mathbf{Q})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_e(\mathbf{Q}) = \sum_t e^{iQ_y t^2} a_{t-\frac{Q_x}{2}}^\dagger a_{t+\frac{Q_x}{2}}, \\ \hat{\rho}_h(\mathbf{Q}) = \sum_t e^{iQ_y t^2} b_{t+\frac{Q_x}{2}}^\dagger b_{t-\frac{Q_x}{2}}, \quad \hat{\rho}(\mathbf{Q}) = \hat{\rho}_e(\mathbf{Q}) - \hat{\rho}_h(-\mathbf{Q}), \\ \hat{D}(\mathbf{Q}) = \hat{\rho}_e(\mathbf{Q}) + \hat{\rho}_h(-\mathbf{Q}), \\ \hat{N}_e = \hat{\rho}_e(0), \quad \hat{N}_h = \hat{\rho}_h(0), \quad \hat{N} = \hat{N}_e + \hat{N}_h, \\ W_{\mathbf{Q}} = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 S |\mathbf{Q}|} e^{-Q^2 l^2 / 2}. \end{aligned} \quad (137)$$

Здесь ϵ_0 есть диэлектрическая проницаемость фона, μ_e и μ_h — химические потенциалы для электронов и дырок, а коэффициенты $V(\mathbf{Q})$, $U(\mathbf{Q})$ и B_{i-i} были рассчитаны в [27,31]. Операторы плотности являются

интегральными двухчастичными операторами. Они выражаются через одночастичные операторы рождения и уничтожения электронов a_p^\dagger, a_p и дырок b_p^\dagger, b_p .

Начальный гамильтониан (134) имеет две непрерывные симметрии. Одна из них является глобальной калибровочной симметрией $U(1)$, а вторая — симметрией вращения $SO(2)$, так что полная симметрия есть $U(1) \times SO(2)$. Калибровочная симметрия порождается оператором полного числа частиц \hat{N} , если он коммутирует с гамильтонианом. Это означает, что гамильтониан инвариантен относительно следующего унитарного преобразования $\hat{U}(\varphi)$:

$$\hat{U}(\varphi)\hat{H}\hat{U}^{-1}(\varphi) = \hat{H},$$

$$\hat{U}(\varphi) = e^{i\hat{N}\varphi}, \quad [\hat{H}, \hat{N}] = 0. \quad (138)$$

Оператор \hat{N} называется генератором симметрии. Вращательная симметрия $SO(2)$ порождается оператором вращения $\hat{C}_z(\varphi)$, который поворачивает в плоскости волновой вектор \mathbf{Q} на произвольный угол φ вокруг оси z , перпендикулярной плоскости слоя и параллельной внешнему магнитному полю. Коэффициенты $W_{\mathbf{Q}}, U(\mathbf{Q})$ и $V(\mathbf{Q})$ в формулах (6) и (9) работы [32] зависят от квадрата волнового вектора \mathbf{Q} , который инвариантен относительно поворотов $\hat{C}_z(\varphi)$. Этот факт определяет симметрию $SO(2)$ гамильтониана (134). Калибровочная симметрия гамильтониана (134) после фазового перехода в бозе-эйнштейновское конденсированное состояние нарушается, как это следует из выражения (16) работы [32]. В терминах теории Боголюбова о квазисредних гамильтониан содержит дополнительный член, пропорциональный $\tilde{\eta}$. Калибровочная симметрия нарушается, поскольку этот член не коммутирует с оператором \hat{N} . Более того, этот член не является инвариантным относительно поворота $\hat{C}_z(\varphi)$, потому что лежащий в плоскости волновой вектор \mathbf{k} бозе-эйнштейновского конденсата превращается в другой волновой вектор, повернутый на угол φ . Вторая непрерывная симметрия также нарушена. Таким образом, установление состояния БЭК с произвольным лежащим в плоскости волновым вектором \mathbf{k} приводит к спонтанному нарушению обеих непрерывных симметрий.

Мы будем рассматривать более общий случай $\mathbf{k} \neq 0$ и примем $\mathbf{k} = 0$ как предел $\mathbf{k} \rightarrow 0$ для малых значений $kl \ll 1$. При этом следует иметь в виду, что дополнительные члены в гамильтониане (134), описывающие влияние ВУЛ, представляют интерес в области малых $kl < 0.5$. Выше мы установили, что количество генераторов нарушенных симметрий равно двум ($N_{\text{BG}} = 2$).

Как отмечалось в предыдущих работах [24–27,29,76,91,92] нарушение калибровочной симметрии гамильтониана (134) может быть достигнуто при помощи метода Келдыша–Козлова–Кобаева [93] с использованием унитарного преобразования

$$\hat{D}(\sqrt{N_{\text{ex}}}) = \exp\left[\sqrt{N_{\text{ex}}}(d^\dagger(\mathbf{k}) - d(\mathbf{k}))\right], \quad (139)$$

где $d^\dagger(\mathbf{k})$ и $d(\mathbf{k})$ являются операторами рождения и уничтожения магнитоэкситона. В электронно-дырочном представлении они запишутся в виде [24–27,29,76,91,92]

$$d^\dagger(\mathbf{P}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_t e^{-iP_y t^2} a_{t+\frac{P_x}{2}}^\dagger b_{-t+\frac{P_x}{2}}^\dagger,$$

$$d(\mathbf{P}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_t e^{iP_y t^2} b_{-t+\frac{P_x}{2}} a_{t+\frac{P_x}{2}}. \quad (140)$$

БЭК магнитоэкситонов приводит к формированию когерентного макроскопического состояния в качестве основного состояния системы с волновой функцией

$$|\psi_g(\mathbf{k})\rangle = \hat{D}(\sqrt{N_{\text{ex}}})|0\rangle, \quad a_p|0\rangle = b_p|0\rangle = 0. \quad (141)$$

Несмотря на то что мы сохранили произвольное значение \mathbf{k} , нашей основной целью является БЭК в состоянии с $\mathbf{k} = 0$, и мы будем рассматривать интервал $0 \leq kl < 0.5$. Функция (141) будет использоваться для вычисления средних значений типа $\langle D(\mathbf{Q})D(-\mathbf{Q}) \rangle$. Преобразованный гамильтониан (134) выглядит следующим образом:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{D}(\sqrt{N_{\text{ex}}})\hat{H}\hat{D}^\dagger(\sqrt{N_{\text{ex}}}). \quad (142)$$

Обычно за этим преобразованием следует боголюбовское $u-v$ -преобразование для одночастичных операторов Ферми

$$\alpha_p = \hat{D}(\sqrt{N_{\text{ex}}}) a_p \hat{D}^\dagger(\sqrt{N_{\text{ex}}})$$

$$= u a_p - v \left(p - \frac{k_x}{2}\right) b_{k_x-p}^\dagger, \quad \alpha_p |\psi_g(\mathbf{k})\rangle = 0,$$

$$\beta_p = \hat{D}(\sqrt{N_{\text{ex}}}) b_p \hat{D}^\dagger(\sqrt{N_{\text{ex}}})$$

$$= u b_p + v \left(\frac{k_x}{2} - p\right) a_{k_x-p}^\dagger, \quad \beta_p |\psi_g(\mathbf{k})\rangle = 0. \quad (143)$$

Вместо этого традиционного пути преобразования выражений исходного гамильтониана (134) и интегральных двухчастичных операторов (137) и (140) будем использовать метод, предложенный Боголюбовым в его теории квазисредних [1,51], благодаря чему останемся в терминах исходных операторов. Оба варианта полностью эквивалентны и могут быть использованы на различных этапах вычислений. Например, средние значения могут быть рассчитаны с помощью волновой функции (141) и $u-v$ -преобразования Боголюбова (143), в то время как уравнения движения для интегральных двухчастичных операторов могут быть записаны в начальном представлении.

Гамильтониан (134) с нарушенной симметрией имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{Q}} W_{\mathbf{Q}} [\hat{\rho}(\mathbf{Q})\hat{\rho}(-\mathbf{Q}) - \hat{N}_e - \hat{N}_h] - \mu_e \hat{N}_e - \mu_h \hat{N}_h \\ & + \frac{1}{2} B_{i-i} \hat{N} - \frac{1}{4N} \sum_{\mathbf{Q}} V(\mathbf{Q}) \hat{\rho}(\mathbf{Q}) \hat{\rho}(-\mathbf{Q}) \\ & - \frac{1}{4N} \sum_{\mathbf{Q}} U(\mathbf{Q}) \hat{D}(\mathbf{Q}) \hat{D}(-\mathbf{Q}) - \tilde{\eta} \sqrt{N} (d^\dagger(\mathbf{k}) + d(\mathbf{k})). \end{aligned} \quad (144)$$

Для простоты здесь опущены более малые члены пропорциональные параметру $\tilde{\eta}$ (параметр $\tilde{\eta}$, определяющий нарушения калибровочной симметрии, зависит от химического потенциала μ и от квадратного корня из концентрации экситонов, как и в случае слабонеидеального Бозе-газа Боголюбова [1,51]).

С использованием методов теории функции Грина [94,95] нами были найдены коллективные элементарные возбуждения в системе. Закон дисперсии для ветви оптических плазмонов имеет вид

$$\begin{aligned} (\hbar\omega(\mathbf{P}))^2 = & \frac{\langle D(\mathbf{P})D(-\mathbf{P}) \rangle}{N^2} \sum_{\mathbf{Q}} U(\mathbf{Q}) \\ & \times (U(-\mathbf{Q}) - U(\mathbf{Q} - \mathbf{P})) \sin^2 \left(\frac{[\mathbf{P} \times \mathbf{Q}]_z l^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (145)$$

где среднее значение $\langle D(\mathbf{P})D(-\mathbf{P}) \rangle$ рассчитано на основе функции основного состояния (141) и коэффициентов u - v -преобразования Боголюбова (143). Правая часть этого выражения имеет зависимость $|P|^4$ при малых P и стремится к насыщению при больших P . Оптическая ветвь плазмонов $\hbar\omega_{\text{оп}}(P)$ имеет квадратичный закон дисперсии в длинноволновом пределе и стремится к насыщению в диапазоне коротких волн. Энергия оптических плазмонов зависит от концентрации как $\sqrt{v^2(1-v^2)}$, что совпадает с зависимостью для 3D-плазмы $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_e / \epsilon_0 m$ [96] и 2D-плазмы $\omega_p^2(q) = 2\pi e^2 n_{s,q} / \epsilon_0 m$ [88] (n_e и n_s — концентрации электронов в соответствующей размерности). Дополнительный множитель $(1-v^2)$ в нашем случае отражает принцип Паули и исчезновение плазменных колебаний при $v = v^2 = 1$. Полученный закон дисперсии показан на рис. 2. Похожие законы дисперсии были получены для случая 2D электронно-дырочной жидкости в сильном перпендикулярном магнитном поле [97], когда влияние квантовых вихрей, созданных в электронной и дырочной подсистемах, в точности компенсируется. В случае БЭК магнитоэкситонов в точке $\mathbf{k} = 0$ закон дисперсии определяется влиянием ВУЛ, тогда как в случае электронно-дырочной жидкости [97] — кулоновским взаимодействием в рамках НУЛ.

Акустическая плазменная ветвь имеет закон дисперсии, который полностью отличается от закона дисперсии оптических плазмонов. Начиная с малых значений

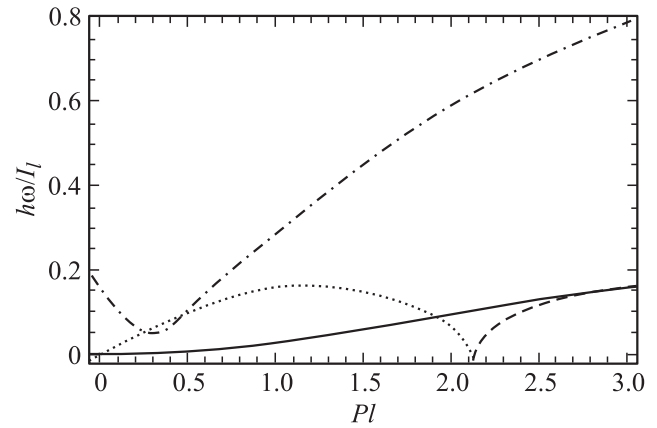


Рис. 2. Три ветви коллективных элементарных возбуждений: экситонная мода типа квази-НГ со щелью в точке $Pl = 0$ (штрихпунктирная линия); второй тип моды НГ, описывающий оптические плазмоны (сплошная линия), и первый тип моды НГ (штриховая линия) с абсолютной неустойчивостью (пунктирная линия), описывающий акустические плазмоны.

волнового вектора до значения $\mathbf{P} \approx 2$ она имеет абсолютную нестабильность. В этом диапазоне волновых векторов оптический плазмон имеет энергию, которая не превышает энергию $U(\mathbf{Q} = 0)$ („энергию активации“), возникающую из-за сил притяжения в системе. Это означает, что оптический плазмон, содержащий колебания электронной и дырочной подсистем с противоположными фазами и без смещения их общего центра масс, разрешен в условиях существования в системе притягивающих сил. Напомним, что они появляются в результате учета ВУЛ. С другой стороны, синфазные колебания электронной и дырочной подсистем в составе акустических плазмонов связаны с перемещениями центра масс. Такие перемещения могут иметь место только тогда, когда их энергия превышает энергию активации для преодоления притягивающих сил порядка $U(\mathbf{Q} = \mathbf{P})$. В результате спектр акустического плазмона имеет минимую часть, представленную пунктирной линией. Это означает абсолютную неустойчивость спектра в области значений волнового вектора $\mathbf{P} \leq 2$. При больших значениях $\mathbf{P} > 2$ энергетический спектр веществен, отличен от нуля и приближается к энергетическому спектру оптических плазмонов.

В случае БЭК 2D-магнитоэкситонов с малым волновым вектором $kl < 0.5$ обе непрерывные симметрии, присущие начальной форме гамильтониана (134), будут нарушены. Это произошло в связи с наличием слагаемого $\tilde{\eta}(d^\dagger(\mathbf{k}) + d(\mathbf{k}))$ в гамильтониане (144), записанном в рамках теории Боголюбова о квазисредних. Тем не менее энергия основного состояния, а также собственные энергетические части $\sum_{ij}(P, \omega)$ были рассчитаны лишь в простейшем случае волнового вектора конденсата $\mathbf{k} = 0$. Эти выражения могут быть актуальными и для бесконечно малых значений модуля $|\mathbf{k}|$, несмотря на то что у малых $|\mathbf{k}|$ имеются точно определенные направ-

ления. В этом случае симметрия основного состояния будет выше, чем у гамильтониана (144), что совпадает с ситуацией, описанной Джорджи и Паисом [23]. Это одно из возможных объяснений появления квази-НГ-мод в случае экситонных ветвей спектра. Другой возможной причиной появления щели в спектре является нарушение локальной калибровочной симметрии, которое приводит к эффекту Хиггса [7]. Взаимодействие электронов с прикрепленными вихрями приводит к щели в энергетическом спектре коллективных элементарных возбуждений, как было установлено в работах [42,54]. Число мод НГ в системах со многими нарушенными непрерывными симметриями было определено теоремой Нильсена и Чадхи [17], выраженной формулой (31). Три ветви энергетического спектра представлены вместе на рис. 2. Одна из них — это мода НГ второго типа, которая описывает оптические плазмоны, другая ветвь — мода НГ первого типа с абсолютной неустойчивостью, описывающая акустические плазмоны, третья ветвь является квази-НГ-модой и описывает коллективные элементарные возбуждения системы экситонного типа.

Мы можем повторить, что результаты, полученные в системе магнитоэкситонов, аналогичны тем, которые были получены для системы БЭК экситонов Фертига в условиях квантового эффекта Холла [81]. В обеих моделях есть только одна бесщелевая мода НГ среди четырех ветвей энергетического спектра. В нашей модели это оптическая плазменная ветвь, а в случае БЭК экситонов Фертига эта мода представляет собой суперпозицию операторов, описывающих оптический плазмон и экситонную моду. В обеих моделях экситонные ветви спектра не являются бесщелевыми и отличаются от мод НГ. В нашем случае экситонные энергетическая и квазиэнергетическая ветви имеют щель в точке $Pl = 0$, характеризуются поведением ротонного типа в области значений $Pl \sim 1$ и насыщением при больших значениях Pl . В случае, описанном в работе [81], функция отклика экситонного типа $\chi_z(q, \omega)$ и функция отклика акустического типа $\chi_F(q, \omega)$ не имеют полюсов в области малых значений энергии в рамках НУЛ. Можно сделать вывод, что эти возбуждения могут иметь большие значения энергии, что означает наличие щели в энергетическом спектре. Если эти возбуждения имеют мнимые значения энергии, то это соответствует нестабильности в системе. В нашем случае ветвь акустических плазмонов показывает абсолютную нестабильность в диапазоне малых и промежуточных значений Pl . Данный результат не противоречит результатам работы [81]. Можно сделать вывод, что качественные свойства энергетических спектров обеих моделей схожи, несмотря на указанные различия. Это дополнительный аргумент в пользу правильности наших расчетов, результаты которых, кроме того, удовлетворяют теореме Нильсена и Чадхи [17].

Результаты для БЭК при $T = 0$ можно использовать для качественного понимания ситуации, имеющей место

при конечных температурах ниже критической температуры топологического фазового перехода Березинского–Костерлица–Таулесса [79,80], связанного с наличием вихрей и их комплексов, называемых кластерами, таких как пары вихрь–антивихрь. Развязывание этих пар определяет критическую температуру фазового перехода $T_{\text{вкт}} = \pi n \hbar^2 / 2mk_B$, где n — поверхностная плотность Бозе-частиц, m — их масса. По одну сторону от точки фазового перехода имеется квазиупорядоченная жидкость, а по другую — неупорядоченная плазма несвязанных вихрей. Хотя изолированный вихрь не возникает при низкой температуре из-за его экстенсивной энергии образования, может происходить рождение пары вихрь–антивихрь с равными по модулю и противоположными по знаку завихренностями. Потенциал возмущения, созданный такой парой, достаточно быстро убывает на больших расстояниях, так что энергия возмущения конечна [80]. Такие топологические образования могут быть легко созданы тепловыми флуктуациями.

Наличие вихревых кластеров делает ранее бесконечно-однородную 2D электронно-дырочную систему неоднородной. Тем не менее однородные области с конечной площадью поверхности могут возникать и приводить к БЭК при конечной критической температуре $T_c = 2\pi n \hbar^2 / mk_B \lg(nS)$ [98]. Вместо недиагонального дальнего порядка, как в случае с 3D Бозе-газом, в 2D-системах имеются лишь корреляции дальнего порядка, которые убывают с расстоянием степенным образом. Таким образом, квантовые вихри способствуют БЭК и формированию сверхтекучей компоненты 2D Бозе-газа при конечной температуре, и в то же время сверхтекучая компонента необходима для формирования квантовых вихрей. Самоорганизация в условиях фазового перехода Березинского–Костерлица–Таулесса является широко изучаемым явлением [99–101].

Попытки экспериментально обнаружить спонтанное нарушение симметрии в экситонной области спектра и усилия, направленные на выявление спонтанной когерентности в 2D-экситонных системах, будут рассмотрены в следующем разделе на основе работ [102–146].

10. Спонтанная когерентность в 2D-экситонных системах

Как было отмечено Сноуком в работах [102,103], недавние экспериментальные усилия нескольких групп исследователей позволили продемонстрировать спонтанную когерентность в поляритонной системе, которую можно рассматривать как своего рода неравновесный бозе-эйнштейновский конденсат. Система поляритонов в квантовых ямах (КЯ), встроенных в микрорезонаторы, способна проявлять БЭК и сверхтекучесть. Достижения в этой области представлены в работах [104–110]. В таких системах время жизни поляритонов превышает, хотя и не намного, время поляритон–поляритонного рассеяния, что приводит к термализации. В последние

двадцать лет несколько групп исследователей, представленных Сноуком [111–121], Бутовым [122–130], Тимофеевым [131–138], Криволапчуком [139–143], Фукудзавой [144–146], продолжало эксперименты над экситонными системами с очень большими временами жизни в ДКЯ. В этих системах не прямые экситоны (IX), состоящие из пространственно разделенных электронов и дырок, имеют дипольные моменты, ориентированные перпендикулярно слоям. Они называются дипольными экситонами, и их взаимодействие является не ближним контактным взаимодействием, а дальнедействующим диполь-дипольным отталкиванием. Напомним вкратце результаты, полученные в работах [142,143].

При анализе спонтанной когерентности и возможности БЭК в 2D-системе следует отметить, что при $T \neq 0$ конденсация однородного 2D Бозе-газа невозможна из-за разрушения конденсата тепловыми флуктуациями [147]. В 2D-системе плотность состояний $\rho(E)$ является постоянной величиной, и интеграл $N = \sum_k N_k = \int_0^\infty dE \rho(E) / (e^{(E-\mu)/k_B T} - 1)$ расходится при $\mu \rightarrow 0$ и $T \neq 0$ из-за нулевого знаменателя на нижнем пределе интегрирования. Это означает, что вместимость свободных вконденсатных состояний бесконечна. Однако если в 2D-системе бозонов имеется некоторое дискретное состояние ε_0 , такое что $\varepsilon_0 < 0$, то ситуация существенно меняется. В этом случае при увеличении числа бозонов в системе значение химического потенциала не может сколь угодно приближаться к значению $E = 0$, потому что $N(\varepsilon_0) \geq 0$ и $(-\mu)_{\min} = |\varepsilon_0|$. В этом случае интеграл имеет конечное значение [148]

$$n_c(T) = -\frac{mk_B T}{2\pi\hbar} \ln \left(1 - \exp \left(-\frac{|\varepsilon_0|}{k_B T} \right) \right). \quad (146)$$

Таким образом, в тот момент, когда n превышает $n_c(T)$, локализованные состояния заняты макроскопическим числом частиц $n - n_c(T) = n(\varepsilon)$. Эти соображения применимы к экситонам, хотя они лишь приблизительно являются бозонами. Локализованные экситонные состояния возникают из-за флуктуаций неоднородного поверхностного потенциала [149]. Это означает, что БЭК в локализованные состояния происходит в ограниченной области 2D-пространства. В этом случае БЭК в системе 2D-бозонов с дискретным и непрерывным спектром энергии напоминает явление БЭК для атомов щелочных металлов в ловушках обнаруженное экспериментально [150].

Очевидным преимуществом IX в ДКЯ как перспективной системе для обнаружения БЭК является возможность эффективного управления радиационным временем жизни τ_R с помощью внешних воздействий. Так, например, приложение постоянного электрического поля V_{dc} к ДКЯ в направлении оси роста структуры приводит к существенному снижению перекрытия волновых функций электрона и дырки в IX в направлении z ; как результат, τ_R значительно увеличивается

(рост до трех порядков [145]). Это позволяет сделать более эффективным охлаждение системы и, что не менее важно, дает возможность повышать концентрацию газа IX без увеличения плотности накачки. Последнее обстоятельство играет важную роль в эксперименте, поскольку оно позволяет уменьшить нагрев образца фотонами, которые неизбежно излучаются при релаксации фотовозбужденных носителей и экситонов. Именно этот нагрев исследуемого образца часто является основной причиной невозможности достижения критической температуры газа бозонов в экспериментах. Нужны большие плотности оптической накачки для создания критической плотности бозонов, имеющих очень малое время жизни.

Убедительным свидетельством наступления эффекта БЭК было бы появление в эксперименте соответствующей функции распределения экситонов по энергиям (импульсам). Вообще функция распределения экситонов может быть определена в эксперименте по форме линии фононной реплики в спектре люминесценции, но в этих исследованиях такой линии не наблюдалось. Поэтому в данных работах изучались бесфононные линии люминесценции IX. Поскольку интенсивность излучения экситонов пропорциональна степени заполнения частицами радиационных состояний, она косвенно отражает функцию распределения экситонов на свободных и локализованных состояниях, которые вместе вносят вклад в формирование неоднородно уширенной линии IX. В связи с этим можно надеяться, что исследования люминесценции IX обнаружат эффект БЭК, предсказанный в [148] для системы 2D-бозонов, распределенных по свободным и локализованным состояниям.

В экспериментах [142,143] было обнаружено гигантское (трехкратное) увеличение интенсивности люминесценции в центральной части спектрального профиля линии IX в ДКЯ на основе GaAs/Al_{0.33}Ga_{0.67}As при изменении температуры образца и величины внешнего электрического поля, приложенного к ДКЯ. Кроме того, интенсивность люминесценции этой части спектрального профиля линии IX флуктуировала с характерным временем порядка десятков секунд. Такое необычное поведение линии IX рассматривалось как возможное свидетельство БЭК в системе 2D-бозонов, размещенных на площади, ограниченной гетерограницами образца и неоднородностью потенциала.

На рис. 3 приведен спектр люминесценции ДКЯ в зависимости от V_{dc} при $T = 1.8$ K и плотности оптического возбуждения $P = 5$ W · cm⁻². При $V_{dc} = 0$ (линия 1) спектр излучения состоит из двух линий: DXW и DXN, отвечающих свечению прямых экситонов в широкой и узкой ямах соответственно. При отличном от нуля постоянном напряжении V_{dc} (линии 2–5) был достигнут не прямой режим (см. вставку), при котором нижнюю энергетическую позицию в спектрах ФЛ занимает линия IX. При увеличении V_{dc} линия IX монотонно смещается в сторону меньших энергий.

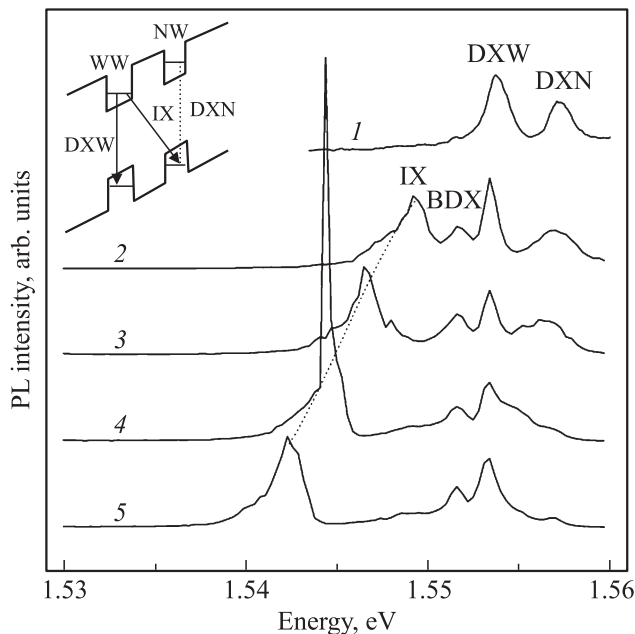


Рис. 3. Спектр ФЛ при $T = 1.8 \text{ K}$, $P = 5 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ и $V_{\text{dc}} = 0$ (1), -0.5 (2), -1 (3), -2 (4), -3.5 V (5). На вставке изображен наклонный режим ДКЯ (данные [142], рис. 1).

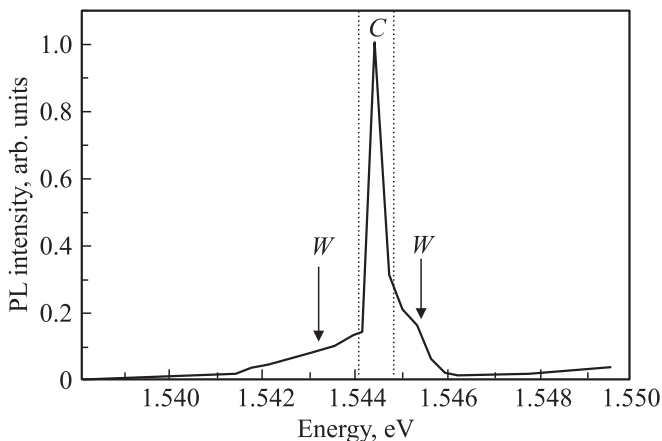


Рис. 4. Спектральная линия IX (линия 4). Две вертикальные пунктирные прямые отделяют различные спектральные части профиля IX линии (данные [142], рис. 3).

Было отмечено, что в некотором интервале V_{dc} происходило гигантское (до 3 раз) увеличение интенсивности центральной части спектральной линии IX (линия 4). Это происходило в специальных условиях. Например, всплеск интенсивности отсутствовал во всем спектральном интервале линии IX при любой температуре $4.2 \leq T \leq 30 \text{ K}$ и при плотности оптической накачки $P \leq 5 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$. Спектральный профиль линии IX, соответствующий случаю 4, показан в большом масштабе на рис. 4. Он состоит из узкой интенсивной линии C и „крыльев“ W , имеющих значительно меньшую интенсивность. Измерения временной эволюции интенсивности

компонент C и W показали, что интенсивность центральной части C в отличие от интенсивности крыльев W флуктуирует во времени (изменения в 3 раза) с характерным временем в десятки секунд.

Форма линии люминесценции IX в ДКЯ неоднородна и определяется излучением экситонов из разных пространственных областей плоскости ДКЯ, различающихся толщинами слоев КЯ, флуктуациями состава барьеров ДКЯ, а также величиной локального электрического поля примесей. Интенсивность излучения каждого спектрального участка линии IX пропорциональна заселенности экситонами соответствующего пространственного участка, занятого экситонами в плоскости КЯ. В области, показанной на рис. 3 (линия 4) ($T = 1.8 \text{ K}$, $P = 5 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$), было обнаружено значительное (в 3 раза) увеличение интенсивности люминесценции участка C спектрального профиля линии IX. Такое поведение было аномальным по сравнению с монотонным уменьшением I_{IX} (и отсутствием интенсивного всплеска) с ростом V_{dc} при других экспериментальных условиях (при $T = 1.8 \text{ K}$ и $P < 1 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$; $4.2 \leq T \leq 30 \text{ K}$ и любой $P \leq 5 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$). Это аномальное поведение линии IX показало, что в случае кривой 4 (рис. 1 работы [142]) в излучении участвует гораздо больше частиц, чем в случаях кривых 2, 3, 5.

Для объяснения этих явлений была использована модель БЭК, разработанная для 2D-систем [148]. Было показано, что если в системе бозонов (экситонов) имеется локализованное состояние ε_0 ниже дна экситонной зоны, то химический потенциал экситонов захвачен локализованным уровнем ε_0 . Как следствие, число частиц n_c конечно. Поэтому когда концентрация n экситонов в рассматриваемой системе превышает n_c , макроскопическое число частиц $n - n_c$ оседает на самом низком энергетическом уровне всей системы бозонов, что приводит к появлению конденсата.

Явление гигантского всплеска является следствием увеличения радиационного времени жизни экситонов и увеличения концентрации экситонов при постоянной оптической накачке. Это приводит к эффективной термализации при температуре термостата. Эти два обстоятельства, по мнению авторов, привели к БЭК и макроскопическому заселению локализованного состояния.

Поскольку все локализованные экситоны принимают участие в излучательной рекомбинации, это приводит к значительному изменению формы линии люминесценции IX.

Таким образом, по мнению авторов, совокупность экспериментальных данных, описывающих эволюцию линии люминесценции IX (а именно гигантский всплеск интенсивности части спектрального профиля линии IX, сопровождаемый колебанием интенсивности с большим характерным временем), явилась доказательством того, что в системе произошла БЭК IX высокой плотности, находившихся в локализованных состояниях (ловушках) в ДКЯ. Тепловое равновесие этого типа экситонов в

ловушке было продемонстрировано экспериментально авторами [102,103].

Как было отмечено в работах [102,103], до сих пор не получено общепринятого доказательства наступления БЭК в этом типе систем, и есть необходимость более глубокого понимания эффектов в системе взаимодействующих дипольных IX. Но накопленные знания позволяют сформулировать некоторые выводы. Один из них гласит, что заключение экситонов в ловушки, аналогичные оптическим ловушкам для холодных атомов является большим преимуществом. Последние работы [117] показали, что IX в ДКЯ в индуцированных давлением ловушках достигают состояния квазиравновесия. Именно вариант БЭК экситонов, эквивалентной БЭК атомов в ловушке [150], был предложен Яном и Ли [148] и реализован в работах [142,143]. Другой вывод, сформулированный в работах [102,103], касается роли температуры. Если температура мала по сравнению с энергией, характеризующей локальные состояния, то экситоны, захваченные многими малыми ловушками, не будут вести себя как коллектив и не будут формировать свободный газ. Такие мелкие минимумы энергии могут локализовать только один или несколько IX, потому что они отталкивают друг друга за счет диполь-дипольного взаимодействия. В отличие от этого в ловушке, индуцированной внешними условиями, есть локализованные уровни, которые в состоянии вместить макроскопическое число IX. Сильный сдвиг энергии за счет взаимодействия может компенсировать потенциал захвата или сгладить его [121].

Еще один важный вывод из работ [102,103] можно сделать на основе результатов Лайхтмана и Рапапорта [151], которые подчеркнули, что дипольные IX в квантовых ямах, скорее, есть коррелированная жидкость, нежели газ. Это не значит, что БЭК невозможна при высокой плотности. Но будет целесообразнее в случае коррелированной жидкости искать гидродинамические эффекты, связанные с конденсацией экситонов, такие как квантовые вихри и сверхтекучесть.

11. Двумерные магнитоэкситонные поляритоны в микрорезонаторе

Возникает вопрос: почему БЭК долгоживущих IX в ДКЯ не имеет надежных подтверждений и ее доказательство требует дополнительных экспериментальных усилий, в то время как БЭК экситонных поляритонов в микрорезонаторе достоверно достигнута экспериментально и стала выдающимся событием в физике твердого тела последних лет?

Этот факт объясняется рекордно малой эффективной массой экситонного поляритона в микрорезонаторе (порядка $10^{-4}m_0$, где m_0 — масса свободного электрона), что приводит к быстрому установлению квазиравновесия в системе 2D-поляритонов и их БЭК, несмотря на их малое время жизни [152]. Малая эффективная масса и

малое время жизни по сравнению со случаем IX в ДКЯ обусловлены фотонной компонентой поляритона, а взаимодействие между поляритонами, их упругое рассеяние и быстрая термализация — экситонной компонентой поляритона. Фотонная компонента в резонаторе имеет частоту отсечки, совпадающую с модой резонатора $\omega_c = \pi c/n_0 L_c$, где n_0 — показатель преломления среды, заполняющей резонатор Фабри–Перо, а L_c — его длина. Эффективная масса фотонной моды в окрестности частоты отсечки равна $m_{\text{eff}} = \hbar \pi n_0 / c L_c$ [152]. Малое время жизни поляритонов в микрорезонаторе обусловлено возможностью фотона после многократных отражений все же покинуть резонатор. Это время жизни порядка пикосекунд. Тем не менее благодаря экситонным компонентам поляритонов при определенных условиях возбуждения системы удалось достичь малых времен термализации порядка долей пикосекунды и наблюдать явление БЭК поляритонов в микрорезонаторе [104–110]. Далее остановимся на новом аспекте этой проблемы, связанном с влиянием внешнего магнитного поля на БЭК 2D-поляритонов. В работах [153–157] были изучены нелинейные эффекты, индуцированные магнитным полем, такие как подавление сверхтекучести поляритонов и эволюция циркулярно поляризованных неравновесных бозе-эйнштейновских конденсатов спиновых поляритонов. Взаимодействие спина поляритона с магнитным полем приводит к зеемановскому расщеплению экситонных состояний. Оно было обнаружено в геометрии Фарадея, когда магнитное поле ориентировано вдоль оси резонатора и перпендикулярно плоскости КЯ, внедренной в резонатор.

В работе [158] было теоретически изучено изменение коэффициентов Хопфилда [159], определяющих долю экситонной и фотонной компонент в структуре поляритона в зависимости от величины магнитного поля.

Комбинированный экситон-циклотронный резонанс в КЯ был обнаружен экспериментально в [160] и объяснен теоретически в [161].

Перечисленные явления в работах [153–157] обнаружены при небольших магнитных полях порядка 2–3 Т. Они недостаточно сильны, чтобы превратить 2D-экситоны Ванье–Мотта в магнитные экситоны. Для этого необходимо, чтобы циклотронная частота превышала энергию связи экситона, а магнитная длина l_0 была меньше боровского радиуса 2D-экситона Ванье–Мотта. В кристаллах типа GaAs необходимые для этого поля превышают 10 Т. Далее обсудим энергетический спектр магнитоэкситонных поляритонов в микрорезонаторе на основе работ [161,162], полагая с самого начала, что имеет место случай сильных магнитных полей, перпендикулярных плоскости КЯ. Квантование Ландау рассматривается для электронов в зоне проводимости s -типа и для тяжелых дырок в валентной зоне p -типа в двумерных полупроводниковых КЯ на основе GaAs.

Рассмотрим образование магнитоэкситонов в результате оптических межзонных переходов с образованием

дырок в валентной зоне и электронов в зоне проводимости. Мы имеем дело с 2D-компланарными электронно-дырочными парами, что отличается от случая пространственно разделенных зарядов, возникающих в ДКЯ во внешнем электрическом поле [111–146].

В работе [161] был выведен гамильтониан, описывающий электрон-фотонное взаимодействие при учете только межзонных переходов, приводящих к образованию компланарных электронно-дырочных пар в сильном перпендикулярном магнитном поле. В дальнейшем в [162] это взаимодействие было переписано для случая образования магнитоэкситонов в предположении, что кулоновское взаимодействие электрон–дырка в магнитоэкситоне и соответствующий потенциал ионизации I_l при $\mathbf{k} = 0$ больше, чем энергия Раби $\hbar\omega_R$, характеризующая превращение магнитоэкситона в фотон и обратно. Аналогичное рассмотрение было проведено в работе [158] для случая внутризонных переходов.

Введем оператор рождения магнитоэкситона $\hat{\psi}_{\text{ex}}^\dagger(\mathbf{k}_{\parallel}, M, n, m)$ с 2D-волновым вектором в плоскости слоя $\mathbf{k}_{\parallel}(k_x, k_y)$. Электрон находится в зоне проводимости s -типа с проекцией спина s_z , на уровне Ландау с квантовым числом n в калибровке Ландау. Тяжелая дырка расположена в валентной зоне p -типа с проекцией орбитального момента M на направление магнитного поля и проекцией полного момента j_z . Она находится на уровне квантования Ландау m . Следуя [25,26], имеем

$$\hat{\psi}_{\text{ex}}^\dagger(\mathbf{k}_{\parallel}, M, n, m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_t e^{ik_y t l_0^2} a_{s_z, n, k_z/2+t}^\dagger b_{j_z, m, k_x/2-t}^\dagger, \quad s_z + j_z = M. \quad (147)$$

Здесь $a_{s_z, n, p}^\dagger$ и $b_{j_z, m, q}^\dagger$ являются Ферми-операторами рождения электрона и дырки в соответствующих квантовых состояниях. Волновая функция, описывающая магнитоэкситон, получается действием оператора (147) на волновую функцию вакуума $|0\rangle$.

Операторы рождения и уничтожения фотонов $C_{\mathbf{k}, j}$, $C_{\mathbf{k}, j}$ характеризуются волновым вектором \mathbf{k} , произвольно ориентированным в 3D-пространстве, а также линейной $\mathbf{e}_{\mathbf{k}, j}$ или циркулярной $\sigma_{\mathbf{k}}^\pm$ поляризацией. Они определяются следующим образом:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{a}_3 k_z, \quad \mathbf{k}_{\parallel} = \mathbf{a}_1 k_x + \mathbf{a}_2 k_y,$$

$$\sigma_M = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1 \pm i\mathbf{a}_2), \quad M = \pm 1,$$

$$\sigma_{\mathbf{k}}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{\mathbf{k}, 1} \pm i\mathbf{e}_{\mathbf{k}, 2}), \quad (\mathbf{e}_{\mathbf{k}, j} \cdot \mathbf{k}) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (148)$$

где \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 — единичные векторы в плоскости КЯ, \mathbf{a}_3 — единичный вектор, перпендикулярный слою и параллельный оси микрорезонатора, σ_M обозначает циркулярную поляризацию тяжелой дырки в p -оболочке

валентной зоны и магнитоэкситона в целом. Фотонные операторы в двух поляризациях имеют вид

$$C_{\mathbf{k}, \pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_{\mathbf{k}, 1} \pm iC_{\mathbf{k}, 2}), \quad (C_{\mathbf{k}, \pm})^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_{\mathbf{k}, 1}^\dagger \pm iC_{\mathbf{k}, 2}^\dagger),$$

$$\sum_{j=1}^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k}, j} C_{\mathbf{k}, j} = C_{\mathbf{k}, -} \sigma_{\mathbf{k}}^+ + C_{\mathbf{k}, +} \sigma_{\mathbf{k}}^-,$$

$$\sum_{j=1}^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k}, j} C_{\mathbf{k}, j}^\dagger = (C_{\mathbf{k}, -})^\dagger \sigma_{\mathbf{k}}^- + (C_{\mathbf{k}, +})^\dagger \sigma_{\mathbf{k}}^+. \quad (149)$$

Запишем в этих обозначениях гамильтониан, описывающий взаимодействие 2D-магнитоэкситонов с 3D-фотонами, распространяющимися в объеме $V = SL_z$, где S есть площадь поверхности КЯ, а L_z — размер 3D-пространства в направлении, перпендикулярном слою. В случае КЯ в микрорезонаторе $L_z = L_c$.

Полученный нами гамильтониан основан на учете взаимодействия электрон–излучение типа $\sum_i \mathbf{A}(r_i) \nabla_i$ и на рассмотрении межзонных переходов в кристаллах GaAs [161,162] (внутризонные переходы нами не были учтены; этот случай рассмотрен в работе [158]). Взаимодействие, пропорциональное квадрату вектор-потенциала $\sum_i \mathbf{A}^2(r_i)$, нами не учитывалось. С учетом сделанных приближений гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{magex-ph}} = & \left(-\frac{e}{m_0 l_0} \right) \sum_{\mathbf{k}(\mathbf{k}_{\parallel}, k_z)} \sum_{M=\pm 1} \sum_{n, m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar}{L_z \omega_{\mathbf{k}}}} \\ & \times \left\{ P_{cv}(\mathbf{k}_{\parallel}) \Phi(n, m, \mathbf{k}_{\parallel}) e^{\frac{ik_x k_y l_0^2}{2}} \right. \\ & \times [C_{\mathbf{k}, -} (\sigma_{\mathbf{k}}^+ \cdot \sigma_M^*) + C_{\mathbf{k}, +} (\sigma_{\mathbf{k}}^- \cdot \sigma_M^*)] \\ & \times \hat{\Psi}_{\text{ex}}^\dagger(\mathbf{k}_{\parallel}, M, n, m) + P_{cv}^*(\mathbf{k}_{\parallel}) \Phi^*(n, m, \mathbf{k}_{\parallel}) e^{\frac{-ik_x k_y l_0^2}{2}} \\ & \times [(C_{\mathbf{k}, -})^\dagger (\sigma_{\mathbf{k}}^+ \cdot \sigma_M^*)^* + (C_{\mathbf{k}, +})^\dagger (\sigma_{\mathbf{k}}^- \cdot \sigma_M^*)^*] \\ & \times \hat{\Psi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}, M, n, m) + P_{cv}(-\mathbf{k}_{\parallel}) \Phi(n, m, -\mathbf{k}_{\parallel}) e^{\frac{ik_x k_y l_0^2}{2}} \\ & \times [(C_{\mathbf{k}, -})^\dagger (\sigma_{\mathbf{k}}^+ \cdot \sigma_M^*)^* + (C_{\mathbf{k}, +})^\dagger (\sigma_{\mathbf{k}}^- \cdot \sigma_M^*)^*] \\ & \times \hat{\Psi}_{\text{ex}}^\dagger(-\mathbf{k}_{\parallel}, -M, n, m) + P_{cv}^*(-\mathbf{k}_{\parallel}) \\ & \times \Phi^*(n, m, -\mathbf{k}_{\parallel}) e^{\frac{-ik_x k_y l_0^2}{2}} \\ & \times [C_{\mathbf{k}, -} (\sigma_{\mathbf{k}}^+ \cdot \sigma_M^*) + C_{\mathbf{k}, +} (\sigma_{\mathbf{k}}^- \cdot \sigma_M^*)] \\ & \left. \times \hat{\Psi}_{\text{ex}}(-\mathbf{k}_{\parallel}, -M, n, m) \right\}. \quad (150) \end{aligned}$$

Матричный элемент межзонного перехода $P_{cv}(\mathbf{k}_{\parallel}, p)$ и функции $\Phi(n_e, p; n_h, p - k_x; k_y)$ определяются соответ-

ственно формулами (A7) и (A11) из работы [161]

$$\begin{aligned}
 P_{cv}(\mathbf{k}_{\parallel}, g) &= \frac{1}{v_0} \\
 &\times \int_{v_0} d\rho U_{c,s,g}^*(\rho) e^{ik_y \rho_y} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \rho} \right) U_{v,p,x,g,-k_x}(\rho), \\
 \Phi(n_e, p; n_h, p - k_x; k_y) &= e^{ik_y p l_0^2} \Phi(n_e, n_h; k_{\parallel}), \\
 \Phi(n_e, n_h; \mathbf{k}_{\parallel}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \varphi_{n_e}^*(y) \varphi_{n_h}(y + k_x l_0^2) e^{iky}. \quad (151)
 \end{aligned}$$

В этих выражениях $U_{c,s,g}(\rho)$ и $U_{v,p,x,g-k_x}(\rho)$ являются периодическими частями электронных блоховских функций зоны проводимости и валентной зоны. Последний интеграл в случае $\mathbf{k}_{\parallel} = 0$ есть интеграл нормировки. Дипольно-активные переходы ($\mathbf{k}_{\parallel=0}$) имеют место только в случае $n_e = n_h$. Это означает, что 2D-магнитоэкситон может быть создан в процессе оптического дипольного перехода, только если он состоит из электрона и дырки на уровнях Ландау с одними и теми же квантовыми числами. Другими словами, в случае дипольно-активных переходов электрон из валентной зоны, находящийся на уровне Ландау с квантовым числом n_v , может быть возбужден в зону проводимости только на уровень квантования Ландау с тем же номером $n_c = n_v$. В случае квадрупольно-активных переходов, когда амплитуда перехода $\Phi(n_e, n_h; \mathbf{k}_{\parallel})$ пропорциональна $(k_x + ik_y)l_0$, правило отбора имеет следующий вид: $n_e = n_h \pm 1$.

Выражения (151) вместе с множителями $e/m_0 l_0$ и $\sqrt{\hbar/(L_z \omega_k)}$ определяют константы взаимодействия 2D-магнитных экситонов с фотонами. В случае дипольно-активных переходов эти константы пропорциональны l_0^{-1} и возрастают пропорционально \sqrt{B} . В случае квадрупольно-активных переходов они не зависят от B , но пропорциональны $|\mathbf{k}_{\parallel}|$. Первые два резонансных члена в гамильтониане (150) описывают уничтожение фотонов с циркулярными поляризациями $\sigma_{\mathbf{k}}^{\pm}$ и создание магнитных экситонов с циркулярными поляризациями σ_M и наоборот. Два антирезонансных члена гамильтониана (150) описывают одновременное создание и уничтожение обоих участников квантовых переходов таким образом, что магнитоэкситон и фотон имеют 2D-волновые векторы \mathbf{k}_{\parallel} и $-\mathbf{k}_{\parallel}$ соответственно, сумма которых равна нулю. Аналогично они имеют противоположные проекции орбитального момента M .

Гамильтониан взаимодействия должен быть дополнен гамильтонианом H_0 свободных магнитоэкситонов и фотонов

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_M \sum_{n,m} \hat{E}_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}, M, n, m) \hat{\Psi}_{\text{ex}}^{\dagger}(\mathbf{k}_{\parallel}, M, n, m) \\
 &\times \hat{\Psi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}, M, n, m) + \sum_{k(\mathbf{k}_{\parallel}, k_z)} \hbar \omega_k [(C_{\mathbf{k},+})^{\dagger} C_{\mathbf{k},+} + (C_{\mathbf{k},-})^{\dagger} C_{\mathbf{k},-}],
 \end{aligned}$$

где $E_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}, M, n, m) = \hbar \omega_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}, M, n, m)$ — энергия 2D-магнитоэкситона. Она содержит вклад циклотронных

энергий $n\hbar\omega_{ce} + m\hbar\omega_{ch}$ электронно-дырочной пары, образующей магнитоэкситон, и кулоновского электронно-дырочного взаимодействия в присутствии сильного магнитного поля. Циклотронные энергии ω_{ce} и ω_{ch} линейно возрастают как функция B , тогда как кулоновская энергия растет пропорционально \sqrt{B} аналогично константе магнитоэкситон-фотонного взаимодействия в случае дипольных переходов. Мы предполагаем, что кулоновское электронно-дырочное взаимодействие, приводящее к формированию магнитоэкситона, больше, чем магнитоэкситон-фотонное взаимодействие, обуславливающее создание магнитополяритона. Это значит, что потенциал ионизации магнитоэкситона $I_l = (e^2/\epsilon l_0)\sqrt{\pi/2}$, где ϵ — диэлектрическая постоянная, больше энергии Раби $\hbar|\omega_R|$. Если не учитывать эффект Зеемана, то энергия магнитоэкситона не зависит от M . Частота фотона $\omega_{\mathbf{k}} = \frac{c}{n} \sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 + k_z^2}$ зависит от 3D-волнового вектора \mathbf{k} . Полный гамильтониан, описывающий магнитоэкситонные поляритоны, выглядит следующим образом:

$$H = H_0 + H_{\text{magex-ph}}. \quad (152)$$

Закон дисперсии магнитоэкситонного поляритона может быть получен в приближении вращающейся волны. Когда k_z и L_z имеют определенные значения, как в случае микрорезонатора, а именно $L_z = L_c$ и $k_z = \pi/L_c$, частота Раби в случае дипольного перехода равна

$$|\omega_R| = \frac{e}{m_0 l_0} \sqrt{\frac{1}{L_c \hbar \omega_{\mathbf{k}}}} |P_{cv}(0)|. \quad (153)$$

В геометрии Фарадея, когда волновой вектор ориентирован вдоль оси микрорезонатора: $\mathbf{k} = \mathbf{a}_3(\pi/L_c)N$, свет с циркулярной поляризацией $\sigma_{\mathbf{k}}^+$ ($\sigma_{\mathbf{k}}^-$) возбуждает только магнитоэкситоны с орбитальным квантовым числом $M = 1$ ($M = -1$). Иными словами, имеет место оптическая ориентация магнитоэкситонов. В случае малого отклонения волнового вектора света \mathbf{k} от фарадеевской геометрии ($|\mathbf{k}_{\parallel}| \ll \pi/L_c$) упомянутое ранее правило отбора лишь приближенно верно. Второе магнитоэкситонное состояние также возбуждается, но с намного меньшей амплитудой, поэтому далее им пренебрежем.

Слагаемые гамильтониана (150) с данным волновым вектором \mathbf{k}_{\parallel} могут быть выделены в отдельный гамильтониан. Для их упрощения используем обозначения

$$\begin{aligned}
 \hat{\Psi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}, M, 0, 0) &= \hat{\Psi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}), \quad C_{\mathbf{k},\sigma} = C_{\pi/L_c, k_{\parallel}, \sigma} = C(\mathbf{k}_{\parallel}), \\
 E_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}, M, 0, 0) &= \hbar \omega_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}), \\
 \hbar \omega_{\mathbf{k}} &= \hbar \omega_{\pi/L_c, \mathbf{k}_{\parallel}} = \hbar \omega_{\text{ph}}(\mathbf{k}_{\parallel}). \quad (154)
 \end{aligned}$$

Тогда уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d\hat{\Psi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel})}{dt} &= \hbar \omega_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}) \hat{\Psi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}) + \hbar \omega_R C(\mathbf{k}_{\parallel}), \\
 i\hbar \frac{dC(\mathbf{k}_{\parallel})}{dt} &= \hbar \omega_{\text{ph}}(\mathbf{k}_{\parallel}) C(\mathbf{k}_{\parallel}) + \hbar \omega_R^* \hat{\Psi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}). \quad (155)
 \end{aligned}$$

Выделив зависимость от времени в виде $e^{-i\omega t}$, для стационарных условий получим

$$\begin{aligned} (\omega_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}) - \omega) \hat{\Psi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}) + \omega_R C(\mathbf{k}_{\parallel}) &= 0, \\ (\omega_{\text{ph}}(\mathbf{k}_{\parallel}) - \omega) C(\mathbf{k}_{\parallel}) + \omega_R^* \hat{\Psi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}) &= 0. \end{aligned} \quad (156)$$

Решая их, найдем дисперсионные ветви магнитоэкситонного поляритона

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}) + \omega_{\text{ph}}(\mathbf{k}_{\parallel})}{2} \\ &\pm \sqrt{|\omega_R|^2 + \left(\frac{\omega_{\text{ex}}(\mathbf{k}_{\parallel}) - \omega_{\text{ph}}(\mathbf{k}_{\parallel})}{2} \right)^2}, \end{aligned} \quad (157)$$

эти выражения полностью согласуются с результатами работ [108,155].

Матричный элемент межзонного квантового перехода $|\mathbf{P}_{cv}|$ может быть выражен через силу осциллятора оптического квантового перехода из основного состояния объемного кристалла в состояние 3D-экситона Ванье-Мотта (f_{ex}) [24]

$$\begin{aligned} f_{\text{ex}} &= \frac{2}{m_0 E_g} |\mathbf{P}_{cv}(0)|^2 |\Psi_{\text{ex}}(0)|^2 v_0, \\ |\Psi_{\text{ex}}(0)|^2 &= \frac{1}{\pi a_{\text{ex}}^3}, \quad v_0 = a_0^3, \end{aligned} \quad (158)$$

где E_g — ширина запрещенной зоны полупроводника, v_0 — объем элементарной ячейки, $\Psi_{\text{ex}}(0)$ — волновая функция относительного движения электрона и дырки с боровским радиусом a_{ex} . Если допустить, что параметры кристалла GaAs равны $E_g \sim 1.5$ eV, $a_{\text{ex}} \sim 10^{-6}$ см, $a_0 \sim 2 \cdot 10^{-8}$ см и $f_{\text{ex}} \sim 10^{-6}$, то получим значение $|\mathbf{P}_{cv}(0)| \approx 2 \cdot 10^{-20}$ г·см/с. Для частоты света $\hbar\omega_k \sim E_g$, длины резонатора $L_c \approx 4 \cdot 10^{-5}$ см и магнитной длины $l_0 \sim 10^{-6}$ см частота Раби имеет величину $\omega_R \sim 10^{12}$ с $^{-1}$. Потенциал ионизации магнитоэкситона при $\epsilon_0 \cong 13$ и той же величине l_0 дает частоту $I_1/\hbar \approx 10^{13}$ с $^{-1}$, что превышает частоту Раби и согласуется со сделанным предположением, касающимся структуры магнитоэкситона (147).

Итак, мы вывели гамильтониан, описывающий взаимодействие двумерных магнитных экситонов с фотонами, распространяющимися без ограничения (конфайнмента) в произвольном направлении трехмерного пространства. Учитывались только межзонные оптические переходы. В этом случае электрон, находящийся на уровне Ландау с квантовым числом n_h в валентной зоне p -типа, переносится под действием света на уровень Ландау с номером n_e в зону проводимости s -типа в 2D-слое. Появившиеся в этих условиях 2D электронно-дырочные пары и магнитоэкситоны характеризуются квантовыми числами n_e и n_h , проекцией орбитального момента дырки M и результирующим 2D-волновым вектором

электронно-дырочной пары и магнитоэкситона \mathbf{k}_{\parallel} . Свет характеризуется двумя компонентами волнового вектора $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{a}_3 k_z$: одна компонента лежит в плоскости, а другая направлена перпендикулярно плоскости слоя. Когда полупроводниковый слой внедрен в микрорезонатор, компонента k_z волнового вектора света становится квантованной $k_z = (\pi/L_c)N$, $N = \pm 1, \pm 2, \dots$

Частота Раби, характеризующая взаимодействие магнитоэкситона с фотоном, пропорциональна матричному элементу $P_{cv}(0)$. Правила отбора для дипольных и квадрупольных квантовых переходов являются следующими: $n_e = n_h$ и $n_e = n_h \pm 1$ соответственно. Константа Раби пропорциональна \sqrt{B} для случая дипольных переходов и не зависит от B в случае квадрупольных переходов.

Выведены законы дисперсии магнитополяритонов в микрорезонаторе. Полученные результаты создают основу для развития теории магнитоэкситонных поляритонов большой плотности в микрорезонаторе. Эти аспекты данного обзора не были освещены в ранее опубликованных работах [163].

12. Заключение

Целью настоящего обзора было обсуждение явлений, связанных со спонтанным (вследствие квантовых флуктуаций) нарушением непрерывных симметрий, характеризующих двумерную электронно-дырочную систему в сильном перпендикулярном магнитном поле с электронами и дырками, лежащими на нижайших уровнях Ландау. Спонтанное нарушение симметрии приводит к образованию новых основных состояний и фазовым переходам и определяет энергетические спектры коллективных элементарных возбуждений, появляющихся над основным состоянием.

Основное внимание уделено электронно-дырочным системам, образующим компланарные магнитоэкситоны в состоянии БЭК с волновым вектором $\mathbf{k} = 0$ при учете влияния возбужденных уровней Ландау. При этом возбуждения экситонного типа сосуществуют с колебаниями плазмонного типа. В то же время принимаются во внимание свойства 2DEG в условиях ДКЭХ, а также свойства аналогичного 2DHG, пространственно отделенного от 2DEG. При уменьшении расстояния между слоями ДКЯ возникнет вопрос о судьбе ранее существовавших композитных частиц и о влиянии квантов потока магнитного поля на компланарные электронно-дырочные пары. Обсуждается 2DEG в двухслойных электронных системах в условиях ДКЭХ с фактором заполнения НУЛ, равным половине в каждом слое, и с общим фактором заполнения, равным единице. Нарушения глобальной калибровочной симметрии, а также симметрии непрерывного вращения приводят к образованию бесщелевых мод Намбу–Голдстоуна — коллективных элементарных возбуждений над выбранным основным состоянием, имеющих волновую функцию с

фиксированной фазой. Нарушение локальной калибровочной симметрии приводит к появлению феномена Хиггса, который характеризуется щелью в энергетическом спектре коллективных элементарных возбуждений 2DEG. Существование бесщелевых и щелевых ветвей энергетического спектра эквивалентно появлению безмассовых и массивных частиц в релятивистской физике.

В обзоре продемонстрировано применение теоремы Нильсена–Чадхи, устанавливающей связь между числом мод НГ и числом генераторов нарушенных симметрий, а также выяснены условия появления квази-НГ-мод. Это было сделано на конкретном примере спинорных атомов в состоянии БЭК в оптической ловушке с целью лучше понять результаты, касающиеся компланарных магнитоэкситонов. Феномен Хиггса приводит к образованию композитных частиц в системе 2DEG в условиях ДКЭХ, так что электрон с четным или нечетным числом прикрепленных точечных вихрей ведет себя как композитный фермион или бозон соответственно. Приведено их описание в рамках теории Гинзбурга–Ландау.

Обсуждены условия, при которых в системе с непрямыми экситонами в двойных квантовых ямах с пространственным разделением электронов и дырок может появиться спонтанная когерентность. Рассмотрены экспериментальные попытки достичь БЭК не прямых экситонов в ловушках, возникающих в связи с неоднородностью ширины интерфейса или за счет приложенного внешнего напряжения. Сформулированы основные свойства энергетического спектра магнитоэкситонных поляритонов в микрорезонаторе. Обсуждена возможность формирования 2D-магнитоэкситонов и магнитоэкситон-поляритонов высокой плотности с прикрепленными точечными вихрями.

Среди наиболее выдающихся достижений, обсуждавшихся в обзоре, отметим ДКЭХ, открытый в однокомпонентном 2DEG. Это побуждает искать аналогичные состояния в двухкомпонентной электронно-дырочной системе. Возникают вопросы, связанные с взаимодействиями между составными частями КЧ и между электронами и дырками, образующими магнитоэкситоны. Несмотря на то что добавочные калибровочные магнитные поля, создаваемые электронами и дырками, будут компенсировать друг друга в приближении среднего поля, можно тем не менее ожидать появления новых электронных квантовых состояний и новых ветвей спектра одночастичных и коллективных элементарных возбуждений.

Список литературы

[1] N.N. Bogoliubov. Selected works. Gordon and Breach Sci. Publ., N.Y. (1990–1991). V. 2,3.
 [2] J. Goldstone. Nuovo Cimento **19**, 154 (1961).
 [3] Y. Nambu. Phys. Rev. **117**, 648 (1960); Phys. Rev. Lett. **4**, 380 (1960).

[4] P. Higgs. Phys. Rev. **145**, 1156 (1966).
 [5] S. Weinberg. Phys. Rev. Lett. **29**, 1698 (1972).
 [6] J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer. Phys. Rev. **106**, 162 (1957).
 [7] L.H. Ryder. Quantum field theory. Cambridge University Press, Cambridge (1966). 502 p.
 [8] V.B. Berestetskii. Spontaneous breaking of the symmetry and the Goldstone's effect. In: Elementary particles. Pt 1/Ed. by the Institute of the Theoretical and Experimental Physics. Atomizdat, M. (1973). [in Russian].
 [9] S.A. Moskalenko, D.W. Snoke. Bose-Einstein condensation of excitons and Biexcitons and coherent nonlinear optics with excitons. Cambridge University Press, Cambridge (UK)–N.Y. (USA) (2000). 415 p.
 [10] K. Murata, H. Saito, M. Ueda. Phys. Rev. A **75**, 013 607 (2007).
 [11] Sh. Uchino, M. Kobayashi, M. Ueda. Phys. Rev. A **81**, 063 632 (2010).
 [12] H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, J. Stenger, S. Inouye, A.P. Chikkatur, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **82**, 2228 (1999).
 [13] Sh. Uchino, M. Kobayashi, M. Nitta. Phys. Rev. Lett. **105**, 230 406 (2010).
 [14] M. Ueda. Phys. Rev. A **63**, 013 601 (2000).
 [15] W.-J. Huang, S.-C. Gou. Phys. Rev. A **59**, 4608 (1999).
 [16] Tin-Lun Ho. Phys. Rev. Lett. **81**, 742 (1998).
 [17] H.B. Nielsen, S. Chadha. Nucl. Phys. B **105**, 445 (1976).
 [18] G.W. Semenoff, F. Zhou. Phys. Rev. Lett. **98**, 100 401 (2007).
 [19] H. Makela, Y. Zhang, K.-A. Suominen. J. Phys. A **36**, 8555 (2003).
 [20] F. Zhou. Phys. Rev. Lett. **87**, 080 401 (2001).
 [21] J.L. Song, G.W. Semenoff, F. Zhou. Phys. Rev. Lett. **98**, 160 408 (2007).
 [22] T.D. Lee, K. Huang, C.N. Yang. Phys. Rev. **106**, 1135 (1957).
 [23] H. Georgi, A. Pais. Phys. Rev. D **12**, 508 (1975).
 [24] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. ЖЭТФ **78**, 1167 (1980); ЖЭТФ **80**, 1488 (1981); I.V. Lerner, Yu.E. Lozovik. J. Low temp. Phys. **38**, 333 (1980).
 [25] D. Paquet, T.M. Rice, K. Ueda. Phys. Rev. B **32**, 5208 (1985).
 [26] S.A. Moskalenko, M.A. Liberman, D.W. Snoke, V. Botan. Phys. Rev. B **66**, 245 316 (2002).
 [27] S.A. Moskalenko, M.A. Liberman, P.I. Khadzhi, E.V. Dumanov, Ig.V. Podlesny, V. Botan. Solid State Commun. **140**, 5, 236 (2006); Physica E **39**, 1, 137 (2007).
 [28] S.A. Moskalenko, M.A. Liberman, V.V. Botan, E.V. Dumanov, Ig.V. Podlesny. Mold. J. Phys. Sci. **4**, 2, 142 (2005).
 [29] S.A. Moskalenko, M.A. Liberman, E.V. Dumanov. J. Nanoelectron. Optoelectron. **4**, 52 (2009).
 [30] S.A. Moskalenko, M.A. Liberman, E.V. Dumanov, Ig.V. Podlesny. Int. J. Quantum Chem. **110**, 1, 177 (2010).
 [31] S.A. Moskalenko, M.A. Liberman, E.V. Dumanov, S.S. Rusu, I. Sanduleac. Mold. J. Phys. Sci. **9**, 16 (2010).
 [32] S.A. Moskalenko, M.A. Liberman, D.W. Snoke, E.V. Dumanov, S.S. Rusu, F. Cerbu. Eur. Phys. J. B **85**, 359. (2012).
 [33] S.A. Moskalenko, M.A. Liberman, D.W. Snoke, E.V. Dumanov, S.S. Rusu, F. Cerbu. Solid State Commun. **155**, 57, (2013).
 [34] S. Uchino, T. Otsuka, M. Ueda. Phys. Rev. A **78**, 023 609 (2008).
 [35] C.V. Ciobanu, S.-K. Yip, Tin-Lin Ho. Phys. Rev. A **61**, 033 607 (2000).

- [36] R. Barnett, A. Turner, E. Demler. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 180 412 (2006).
- [37] J. Pang, T. Brauner, Q. Wang. arXiv: 1010.1986 (2010).
- [38] G.E. Volovik. *The universe in a helium droplet*. Oxford University, N.Y. (2003).
- [39] B.L. Halperin, P.A. Lee, N. Read. *Phys. Rev. B* **47**, 7312 (1993).
- [40] N. Read. *Phys. Rev. B* **58**, 16 262, (1998).
- [41] R. Jackiw, So Young Pi. *Phys. Rev. D* **42**, 3500 (1990).
- [42] S.C. Zhang, T.H. Hanson, S. Kivelson. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 82 (1989).
- [43] *The quantum Hall effect* / Eds E. Prange, S.M. Girvin. Springer-Verlag, N.Y. (1986). P. 419.
- [44] H. Enger. *Vortices in Chern–Simons–Ginzburg–Landau theory and the fractional quantum Hall effect*. Thesis submitted to the degree of Candidatus Scientiarum Department of Physics. University of Oslo (1998).
- [45] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Statistical physics*. Pergamon, Oxford (1969). V. 5.
- [46] В.Л. Гинзбург, Л.Д. Ландау. *ЖЭТФ* **20**, 1064 (1950).
- [47] В.Л. Гинзбург, Л.П. Питаевский. *ЖЭТФ* **34**, 1240 (1958).
- [48] Л.П. Питаевский. *ЖЭТФ* **39**, 216 (1960).
- [49] E.P. Gross. *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961).
- [50] P. Nozieres, D. Pines. *The theory of quantum liquids*. Addison-Wesley, N.Y. (1990). P. 180.
- [51] Н.Н. Боголюбов. *Изв. АН СССР. Сер. физ.* **11**, 77 (1947).
- [52] S.M. Girvin. *The quantum Hall effect: Novel excitations and broken-symmetries*. Indiana University, USA (1998); Ch. 9, 10 in Ref. [1].
- [53] S.M. Girvin, A.H. MacDonald. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1252 (1987).
- [54] S.M. Girvin, A.H. MacDonald, P.M. Platzman. *Phys. Rev. Lett.* **54**, 581 (1985); *Phys. Rev. B* **33**, 2481 (1986).
- [55] R.B. Laughlin. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2677 (1988).
- [56] S. Kivelson, C. Kallin, D.P. Arovas, J. Schrieffer. *Phys. Rev. Lett.* **56**, 873 (1986).
- [57] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Fluid mechanics*. Pergamon Press, Oxford (1989).
- [58] L.K. Myklebust. *Quantized vortices*. Cand. Sci. Thesis. University of Oslo (1996).
- [59] L. Onsager. *Nuovo Cimento* **6**, Suppl. 2, 249 (1949).
- [60] R.P. Feynman. In: *Progress in low temperature physics* / Ed. C.J. Gorter. North-Holland, Amsterdam (1955). V. 1. Ch. 2.
- [61] W.F. Vinen. *Nature* **181**, 1524 (1958); *Proc. Roy Soc. A* **260**, 218 (1961).
- [62] De Gennes. *Superconductivity of metals and alloys*. W.A. Bendjamine, inc, N.Y.–Amsterdam (1966).
- [63] А.А. Абрикосов. *ЖЭТФ* **32**, 1442 (1957).
- [64] F. London. *Super fluid*. 2nd ed. N.Y. (1961). V. 1.
- [65] R.B. Laughlin. *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983).
- [66] H.L. Stormer. *Rev. Mod. Phys.* **71**, 875 (1999).
- [67] S.S. Chern, J. Simons. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **68**, 791 (1971).
- [68] F. Wilczek. *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1144 (1982); *Phys. Rev. Lett.* **49**, 957 (1982).
- [69] R.B. Laughlin. *Rev. Mod. Phys.* **71**, 863 (1999).
- [70] J.K. Jain. *Composite fermions*. Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [71] N. Read. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 86 (1989).
- [72] N. Read. *Semicond. Sci. Technol.* **9**, 1859 (1994).
- [73] N. Read. arxiv: cond-mat / 9501090 (1995).
- [74] D.H. Lee, S.C. Zhang. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1220 (1991).
- [75] C. Kallin, B.I. Halperin. *Phys. Rev. B* **30**, 5655 (1984).
- [76] А.Б. Дзюбенко, Ю.Е. Лозовик. *ФТТ* **25**, 1519 (1983); *ФТТ* **26**, 1540 (1984); А.Б. Dzyubenko, Yu.E. Lozovik. *J. Phys. A* **24**, 415 (1991).
- [77] A.H. MacDonald, E.A. Rezayi, D. Keller. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1939 (1992).
- [78] Y.N. Joglekar, A.H. MacDonald. *Phys. Rev. B* **64**, 155 315 (2001).
- [79] В.Л. Березинский. *ЖЭТФ* **59**, 907 (1971).
- [80] J.M. Kosterlitz, D.J. Thouless. *J. Phys. C* **6**, 1181, (1973); *J. Phys. C* **5**, L124, (1972).
- [81] H.A. Fertig. *Phys. Rev. B* **40**, 1087 (1989).
- [82] A.D. Fink, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, K.W. West. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 016 801 (2010).
- [83] J.P. Eisenstein. *Exciton condensation in bilayer quantum Hall systems. Electronic/optical coherence in low dimensional semiconductors and atomic gases*. Cambridge–ITAP Workshop (2009).
- [84] I.B. Spielman, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, K.W. West. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 036 803 (2001).
- [85] I.B. Spielman, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, K.W. West. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5808 (2000).
- [86] P. Giudici, K. Muraki, N. Kumada, T. Fujisawa. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 056 802 (2010).
- [87] X.G. Wen, A. Zee. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1811 (1992).
- [88] S. Das Sarma, A. Madhukar. *Phys. Rev. B* **32**, 805 (1981).
- [89] M. Resolt, B.I. Halperin, D. Vanderbilt. *Phys. Rev. Lett.* **57**, 126 (1986).
- [90] M. Resolt, F. Perrot, A.H. MacDonald. *Phys. Rev. Lett.* **55**, 433 (1985).
- [91] T.M. Rice, D. Paquet, K. Ueda. *Helv. Phys. Acta* **58**, 410 (1985).
- [92] S.A. Moskalenko, M.A. Liberman, D.W. Snoke, V. Botan, B. Johansson. *Physica E* **19**, 278 (2003); V. Botan, M.A. Liberman, S.A. Moskalenko, D.W. Snoke, B. Johansson. *Physica B* **346–347**, 460 (2004).
- [93] Л.В. Келдыш, А.Н. Козлов. *ЖЭТФ* **54**, 978 (1968).
- [94] А.А. Абрикосов, Л.П. Гор'ков, И.Е. Дзьялошинский. *Methods of quantum field theory in statistical physics*. Dover, N.Y. (1975). P. 444.
- [95] Д.Н. Зубарев. *УФН* **71**, 71 (1960).
- [96] D. Pines. *Elementary excitations in solids*. Benjamin, N.Y. (1963).
- [97] S.A. Moskalenko, M.A. Liberman, E.V. Dumanov, A.G. Stefan, M.I. Shmiglyuk. *J. Phys.: Cond. Matter* **21**, 235 801 (2009).
- [98] W. Ketterle, N.J. van Druten. *Phys. Rev. A* **54**, 656 (1996).
- [99] Ю.Е. Лозовик, О.Л. Берман. *ЖЭТФ* **111**, 1879 (1997).
- [100] S. Stock, Z. Hadzibabic, B. Battelier, M. Cheneau, J. Dalibard. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 190 403 (2005).
- [101] T.P. Simula, M.D. Lee, D.A.W. Hutchinson. *Phil. Magaz. Lett.* **85**, 395 (2000).
- [102] D.W. Snoke. *Solid state physics: Essential concepts*. Pearson/Addison-Wesley (2009).
- [103] D.W. Snoke. arXiv: 1208.1213v1 (2012).
- [104] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jambro, J.M.J. Keeling, F.M. Marchetti, M.H. Szymanska, R. André, J.L. Staehli, V. Savona, P.B. Littlewood, B. Deveaud, Le Si Dang. *Nature* **443**, 409 (2006).
- [105] H. Deng, D. Press, S. Gotzinger, G. Solomon, R. Hey, K.H. Ploog, Y. Yamamoto. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 146 402 (2006).

- [106] K.G. Lagoudakis, M. Wouters, M. Richard, A. Baas, I. Carusotto, R. André, Le Si Dang, B. Deveaud-Plédran. *Nature Phys.* **4**, 706 (2008).
- [107] D.W. Snoke, P. Littlewood. *Phys. Today* **63**, 8, 42 (2010).
- [108] H. Deng, H. Haug, Y. Yamamoto. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1489 (2010).
- [109] M. Richard, J. Kasprzak. *Int. J. Nanotechnol.* **7**, 668 (2010).
- [110] I. Carusotto, C. Ciuti. arXiv:1205.6500v1 (2012).
- [111] V. Negoita, D.W. Snoke, K. Eberl. *Appl. Phys. Lett.* **75**, 2059 (1999).
- [112] V. Negoita, D. Hackworth, D.W. Snoke, K. Eberl. *Opt. Lett.* **25**, 572 (2000).
- [113] S. Denev, V. Negoita, D. Hackworth, D.W. Snoke, B. Laikhtman, K. Eberl, L. Pfeiffer. *Phys. Rev. B* **66**, 205 304 (2002).
- [114] D.W. Snoke, S. Denev, Y. Liu, L. Pfeiffer, K. West. *Nature* **418**, 754 (2002).
- [115] D.W. Snoke, S. Denev, Y. Liu, L. Pfeiffer, K. West. *Solid State Commun.* **127**, 187 (2003).
- [116] Z. Voros, R. Balili, D.W. Snoke, L. Pfeiffer, K. West. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 226 401 (2005).
- [117] Z. Voros, D. Snoke, L. Pfeiffer, K. West. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 016 803 (2006).
- [118] Z. Voros, V. Harttwell, D.W. Snoke, L. Pfeiffer, K. West. *J. Phys.: Cond. Matter* **19**, 295 216 (2007).
- [119] R. Balili, V. Harttwell, D.W. Snoke, L. Pfeiffer, K. West. *Science* **316**, 1007 (2007).
- [120] D.W. Snoke. *Solid State Commun.* **146**, 73 (2008).
- [121] Z. Voros, D.W. Snoke. *Mod. Phys. Lett. B* **22**, 701 (2008).
- [122] L.V. Butov, A. Zrenner, G.A. Abstreiter, G. Bohm, G. Weimann. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 304 (1994).
- [123] L.V. Butov, A.I. Filin. *Phys. Rev. B* **58**, 1980 (1998).
- [124] L.V. Butov, A. Imamoglu, A.V. Mintsev, K.L. Campman, A.C. Gossard. *Phys. Rev. B* **59**, 1625 (1999).
- [125] L.V. Butov, A.V. Mintsev, Yu.E. Lozovik, K.L. Campman, A.C. Gossard. *Phys. Rev. B* **62**, 1548 (2000).
- [126] L.V. Butov, C.W. Lai, A.L. Ivanov, A.C. Gossard, D.S. Chemla. *Nature* **417**, 47 (2002).
- [127] L.V. Butov, A.C. Gossard, D.S. Chemla. *Nature* **418**, 751 (2002).
- [128] L.V. Butov, L. Levitov, A. Mintsev, B. Simons, A.C. Gossard, D.S. Chemla. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 117 404 (2004).
- [129] L.V. Butov. *J. Phys.: Cond. Matter* **16**, R1577, R1613 (2004).
- [130] Sen Yang, A.T. Hammack, M.M. Fogler, L.V. Butov, A.C. Gossard. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 187 402 (2006).
- [131] V.B. Timofeev, A.V. Larionov, A.S. Ioselevich, J. Zeman, G. Martinez, J. Hvam, K. Soersen. *Письма в ЖЭТФ* **67**, 580 (1998).
- [132] В.Б. Тимофеев, А.В. Ларионов, Дж. Земан, Г. Мартинез, Дж. Хвам, Д. Биркедал, К. Соерсен. *УФН* **168**, 117 (1998).
- [133] V.B. Timofeev, A.I. Filin, A.V. Larionov, J. Zeman, G. Martinez, J.M. Hvam, D. Birke dal, C.B. Sørensen. *Europhys. Lett.* **41**, 535 (1998).
- [134] V.B. Timofeev, A.V. Larionov, M. Grassi Alessi, M. Capizzi, A. Frova, J.M. Hvam. *Phys. Rev. B* **60**, 8897 (1999).
- [135] А.В. Ларионов, В.Б. Тимофеев, И. Хвам, К. Соерсен. *Письма в ЖЭТФ* **71**, 174 (2000).
- [136] А.В. Ларионов, В.Б. Тимофеев, И. Хвам, К. Соерсен. *ЖЭТФ* **117**, 1255 (2000).
- [137] А.В. Ларионов, В.Б. Тимофеев. *Письма в ЖЭТФ* **73**, 341 (2001).
- [138] V.B. Timofeev, A.V. Gorbunova. *J. Appl. Phys.* **101**, 081 708 (2007).
- [139] В.В. Криволапчук, Д.А. Мазуренко, Е.С. Москаленко, Н.К. Полетаев, А.Л. Жмодиков, Т.С. Ченг, С.Т. Фоксон. *ФТТ* **40**, 803 (1998).
- [140] В.В. Криволапчук, Е.С. Москаленко, А.Л. Жмодиков, Т.С. Ченг, С.Т. Фоксон. *ФТТ* **41**, 325 (1999).
- [141] V.V. Krivolapchuk, E.S. Moskalenko, A.L. Zhmodikov, T.S. Cheng, C.T. Foxon. *Solid State Commun.* **111**, 49 (1999).
- [142] V.V. Krivolapchuk, E.S. Moskalenko, A.L. Zhmodikov. *Nanotechnology* **11**, 246 (2000).
- [143] Е.С. Москаленко, В.В. Криволапчук, А.Л. Жмодиков. *ФТТ* **42**, 1492 (2000).
- [144] T. Fukuzawa, E.E. Mendez, J.M. Hong. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 3066 (1990).
- [145] A. Alexandrou, J.A. Kash, E.E. Mendez, M. Zachau, J.M. Hong, T. Fukuzawa, Y. Hase. *Phys. Rev. B* **42**, 9225 (1990).
- [146] J.A. Kash, M. Zachau, E.E. Mendez, J.M. Hong, T. Fukuzawa. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2247 (1991).
- [147] P.C. Hohenberg. *Phys. Rev.* **158**, 3837 (1967).
- [148] J.F. Jan, Y.C. Lee. *Phys. Rev. B* **58**, R1714 (1998).
- [149] Y.C. Lee, C.S. Chu, E. Castano. *Phys. Rev. B* **27**, 6136 (1983).
- [150] F. Dalfolo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, S. Stringari. *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [151] B. Laikhtman, R. Rapaport. *Phys. Rev. B* **80**, 195 313 (2009).
- [152] V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, P. Schwendimann, F. Tassone. *Phase Trans. (Special issue on new aspects in optical properties of nanostructures)* **68**, 1, 169 (1999).
- [153] D.D. Solnyshkov, M.M. Glazov, I.A. Shelykh, A.V. Kavokin, E.L. Ivchenko, G. Malpuech. *Phys. Rev. B* **78**, 165 323 (2008).
- [154] I.A. Shelykh, A.V. Kavokin, G. Malpuech. *Phys. Status Solidi B* **242**, 2271 (2005).
- [155] Yu.G. Rubo, A.V. Kavokin, I.A. Shelykh. *Phys. Lett. A* **358**, 227 (2006).
- [156] A.V. Larionov, V.D. Kulakovskii, S. Hofling, C. Schneider, L. Worschech, A. Forchel. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 256 401 (2010).
- [157] P. Walker, T.C.H. Liew, D. Sarkar, M. Durska, A.P.D. Love, M.S. Skolnick, J.S. Roberts, I.A. Shelykh, A.V. Kavokin, D.N. Krizhanovskii. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 25 740 (2011).
- [158] O.L. Berman, R.Ya. Kezerashvili, Yu.E. Lozovik. *Phys. Rev. B* **80**, 115 302 (2009).
- [159] J.J. Hopfield. *Phys. Rev.* **112**, 1555 (1958).
- [160] V.P. Kochereshko, D.R. Yakovlev, G.V. Astakhov, W. Faschinger, W. Ossau, G. Landwehr, T. Wojtowicz, G. Karczewski, J. Kossut. In: *Optical properties of 2D systems with interacting electrons / Eds W.J. Ossau, R. Suris. Nato Science Series II. Kluwer Academic Publ., Springer, Dordrecht–Boston–London (2003). V. 119. 296 p.*
- [161] S.A. Moskalenko, M.A. Liberman, I.V. Podlesny. *Phys. Rev. B* **79**, 125 425 (2009).
- [162] S.A. Moskalenko, I.V. Podlesny, M.A. Liberman, B.V. Novikov. *J. Nanophotonics* **6**, 1, 061 806 (2012).
- [163] S.A. Moskalenko, M.A. Liberman, E.V. Dumanov, E.S. Moskalenko. *J. Nanoelectron. Optoelectron.* **7**, 640 (2012); arXiv: 1209.0597v1 (2012).